

**Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt**

Karlsruhe, 2. März 2024

Aufgabe 1

Rekursiv ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(n a_n + \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{mit } a_1 = 1.$$

- (a) Zeigen Sie $\frac{1}{n} \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert.
- (c) Begründen Sie, dass es sich um eine Nullfolge handelt. Zeigen Sie dazu zunächst die Darstellung

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

und dann die Abschätzung

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{j} \right) \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\tan(z) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Aufgabe 3

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$.

- (b) Zeigen Sie, für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \ln(1 - \cos(x)), & x \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\} \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

stetig ist. Hinweis: Teilaufgabe (a) lässt sich verwenden.

- (c) Gibt es im Intervall $(0, 2\pi)$ eine Lösung der Gleichung

$$\sqrt{x} \ln(1 - \cos(x)) = \frac{1}{2}?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f : (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln \left(\frac{x}{4-x} \right)$$

und den Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \left(\frac{1}{(4-x)^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \right), \quad x \in (0, 4), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stellen Sie die Taylorreihe zu f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ auf, und berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe. Für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie im Intervall $(0, 1]$ die Lösung zum Anfangswertproblem

$$\frac{v'(x)}{x^3} + \frac{\ln(x^2)}{v(x)} = 0$$

mit $v(1) = \frac{1}{2}$.

Lösung zu 1: zu (a): Wir zeigen die Schranken durch vollständige Induktion. Mit $a_1 = 1 \in \{1\}$ ist ein Induktionsanfang gegeben.

Nehmen wir nun an, dass $a_n \in [\frac{1}{n}, 1]$ ist, so folgt

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Weiterhin gilt

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)+1}{(n+1)^2} \leq \frac{n(n+1)+n+1}{(n+1)^2} = 1.$$

Also ergibt sich $\frac{1}{n+1} \leq a_{n+1} \leq 1$ und die Induktion ist abgeschlossen.

zu (b): Aus

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} - a_n = \frac{-1}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

folgt, dass die Folge streng monoton fällt. Zusammen mit der Beschränktheit aus Teil (a) liefert das Monotoniekriterium Konvergenz von (a_n) .

zu (c): Die Behauptung $a_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ zeigen wir induktiv. Der Induktionsanfang mit $a_1 = 1$ ist offensichtlich erfüllt. Der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(na_n + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j}.$$

Nun erhalten wir für jedes $k < n$ die angegebene Abschätzung aus

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{j}\right) \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k 1\right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{j=k+1}^n \frac{1}{k}\right) \leq \frac{k}{n} + \frac{n}{nk}.$$

Bezeichnen wir den Grenzwert mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, so ist

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}.$$

Da diese Abschätzung für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich $a = 0$.

Lösung zu 2: Mit den Euler Formeln erhalten wir

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right).$$

Eine Substitution $u = e^{iz}$ führt auf die quadratische Gleichung

$$u^2 - 1 = i \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) (u^2 + 1)$$

bzw.

$$u^2 = \frac{1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}{1 - \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i} = \frac{(\frac{9}{5} + \frac{3}{5}i)(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i)}{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = 3i.$$

Mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $u = x + iy$ ergeben sich aus $u^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3i$ die beiden Gleichungen $x^2 = y^2$ und $2xy = 3$ mit den Lösungen $x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Also ist $u = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + i)$.

Mit Polarkoordinatendarstellung erhalten wir die beiden Möglichkeiten

$$u = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{und} \quad u = -\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Setzen wir $z = a + ib$, so folgen aus $u = e^{iz} = e^{-b}(\cos(a) + i \sin(a))$ die Gleichungen

$$e^{-b} = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad a = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Damit sind die Lösungen der Gleichung gegeben durch die Menge

$$\left\{z = \frac{\pi}{4} + \pi n - i \ln(\sqrt{3}) : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Lösung zu 3: zu (a) Da sowohl jeweils Zähler und Nenner in $x = 0$ den Wert Null haben, lässt sich die Regel von L'Hospital zweimal anwenden. Es ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + x \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - x \sin(x)}{\cos(x)} = 2.$$

zu (b) Die Funktion ist stetig, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c$ gilt, da die Funktion in den Intervallen $(-2\pi, 0)$ und $(0, 2\pi)$ als Produkt stetiger Funktionen stetig ist.

Für den Fall $x > 0$ nutzen wir nochmal die Regel von L'Hospital und bekommen mit dem Grenzwert aus Teil (a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(1 - \cos(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos(x))}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^{-\frac{3}{2}}(1 - \cos(x))} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{(1 - \cos(x))} = 0. \end{aligned}$$

Analog folgt der Grenzwert für $x < 0$. Somit ist die Funktion stetig, wenn $c = 0$ gesetzt wird.

zu (c): Es gilt

$$f(\pi) = \sqrt{\pi} \ln(1 - \cos(\pi)) = \sqrt{\pi} \ln(2) \geq \ln(2) \geq \frac{1}{2},$$

denn $4 \geq e$ impliziert $2 \geq \sqrt{e}$ und somit $\ln(2) \geq \frac{1}{2}$, da sowohl $\sqrt{x}$ als auch $\ln(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ monoton steigend sind.

Damit und mit $f(0) = 0$ liefert der Zwischenwertsatz, dass es eine Lösung der Gleichung $\sqrt{x} \ln(1 - \cos(x)) = \frac{1}{2}$ gibt.

Lösung zu 4:

Für die Taylorreihe um $x_0 = 2$ gilt mit $f(2) = 0$

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} (2^{-n} + (-1)^{n-1} 2^{-n}) (x-2)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+1)!} (2^{-(2k+1)} + 2^{-(2k+1)}) (x-2)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \frac{1}{4^k} (x-2)^{2k+1}. \end{aligned}$$

Um den Konvergenzradius zu ermitteln, betrachten wir

$$\left| \frac{\frac{1}{2k+3} \frac{1}{4^{k+1}} (x-2)^{2k+3}}{\frac{1}{2k+1} \frac{1}{4^k} (x-2)^{2k+1}} \right| = \frac{(2k+1)}{(2k+3)} \frac{1}{4} |x-2|^2 \rightarrow \frac{1}{4} |x-2|^2$$

für $k \rightarrow \infty$. Das Quotientenkriterium liefert für absolute Konvergenz die Bedingung $\frac{1}{4} |x-2|^2 < 1$ bzw. $|x-2| < 2$. Insgesamt ergibt sich der Konvergenzradius $r = 2$.

Somit konvergiert die Reihe absolut im Intervall $(0, 4)$, und sie ist divergent für $x \notin [0, 4]$. Für die beiden Randpunkte $x = 0$ und $x = 4$ ergibt sich

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \frac{1}{4^k} (\mp 2)^{2k+1} \right) = \left(\mp 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \right).$$

Die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k}, \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N},$$

impliziert Divergenz der Taylorreihe in den beiden Randpunkten aufgrund der Divergenz der harmonischen Reihe.

Lösung zu 5: Es handelt sich um eine separable Differentialgleichung, die wir trennen können zu

$$v'(x) v(x) = -x^3 \ln(x^2).$$

Eine Stammfunktion auf der linken Seite erhalten wir durch Substitution:

$$\int v'(x) v(x) dx = \int v dv = \frac{1}{2} v^2(x).$$

Bemerkung: Alternativ lässt sich die DGL als Bernoulli DGL auffassen. Mit dem Ansatz $u(x) = (v(x))^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich $u'(x) = -2x^3 \ln(x^2)$ und die folgende Integration liefert u bzw. v^2 .

Wir berechnen mit einer Substitution $u = x^2$ und partieller Integration

$$\begin{aligned} - \int x^3 \ln(x^2) dx &= -\frac{1}{2} \int u \ln(u) du \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} u^2 \ln(u) - \frac{1}{2} \int u^2 \frac{1}{u} du \right] \\ &= \frac{1}{8} u^2 (1 - 2 \ln(u)) + c = \frac{1}{8} x^4 (1 - 2 \ln(x^2)) + c \end{aligned}$$

alle Stammfunktionen mit Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir formal die allgemeinen Lösungen

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{4} x^4 (1 - 2 \ln(x^2)) + 2c}.$$

Aus der Bedingung $v(1) = \frac{1}{2}$ ergibt sich $c = 0$ und das positive Vorzeichen für die gesuchte Lösung

$$v(x) = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{1 - 2 \ln(x^2)}.$$