

Skript zur Vorlesung
Höhere Mathematik I
für die Fachrichtungen
MACH, MIT, MWT, BIW, CIW, VT, GEOD

24. Auflage

PD Dr. Frank Hettlich
und
Prof. Dr. Andreas Kirsch

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruher Institut für Technologie

Vorbereitende Literatur:

- F. Hettlich: Vorkurs Mathematik. Shaker Verlag, Aachen.
- G. Walz, F. Zeilfelder, Th. Rießinger: Brückenkurs Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Literatur für diese Vorlesung (u.a.)

- T. Arens, F. Hettlich, Ch. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel: Mathematik. Springer Spektrum, Heidelberg.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure. Band I: Analysis und Band II: Lineare Algebra. Teubner Verlag, Stuttgart.
- G. Merziger, T. Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik. Binomi Verlag.

Formelsammlungen:

- T. Arens, F. Hettlich, Ch. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel: Mathematik zum Mitnehmen. Springer Spektrum, Heidelberg.
- G. Merziger, G. Mühlbach, D. Wille, T. Wirth: Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik. Binomi Verlag.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	3
1.1	Die Mengenschreibweise	3
1.2	Das Summenzeichen	4
1.3	Beweismethoden	7
1.4	Die komplexen Zahlen	11
2	Folgen und Konvergenz	17
2.1	Beschränkte und konvergente Zahlenfolgen	17
2.2	Teilfolgen und das Monotoniekriterium	23
3	Funktionen und Stetigkeit	26
3.1	Der Funktionsbegriff	26
3.2	Stetigkeit	32
3.3	Eigenschaften reeller stetiger Funktionen	36
4	Reihen	40
4.1	Definition und Beispiele	40
4.2	Konvergenzkriterien für Reihen	42
4.3	Potenzreihen	51
4.4	Elementare Funktionen für komplexe Argumente	56
5	Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen	65
5.1	Ableitung einer Funktion einer Veränderlichen	65
5.2	Differentiationsregeln	68
5.3	Tangente und Differential	72
5.4	Extremwertaufgaben und Mittelwertsatz	74
5.5	Die Taylorformel und die Taylorreihe	79
6	Integralrechnung	84
6.1	Das Lebesgue Integral	84
6.2	Die Stammfunktion	90
6.3	Einfache Differentialgleichungen	97
6.4	Partialbruchzerlegung	102
6.5	Integration über unbeschränkte Intervalle und/oder Funktionen	105
6.6	Numerische Integration	109

1 Grundbegriffe

1.1 Die Mengenschreibweise

Die Grundbegriffe der Mengenschreibweise und der Zahlbereiche mit den Grundrechenarten setzen wir als bekannt voraus. Zur Wiederholung bieten sich die einschlägigen Schulbücher oder eines der Lehrbücher zur Höheren Mathematik an.

Eine **Menge** kann **explizit** durch auflisten ihrer **Elemente** oder durch eine charakterisierende **Beschreibung** angegeben werden, z.B. $M = \{\triangle, \square, \circ\}$ oder $M = \{A : A \text{ Dreieck}\}$. Insbesondere ist $\emptyset$ die **leere Menge**.

Schreibweise: Wir schreiben $x \in M$, wenn x ein Element aus M ist, anderenfalls $x \notin M$.

Beispiele 1.1

Die folgenden Notationen für Zahlbereiche werden benutzt:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} = \{n : n \text{ natürliche Zahl}\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \{n : n \text{ ganze Zahl}\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\} = \{x : x \text{ rationale Zahl}\} \\ \mathbb{R} &= \{x : x \text{ reelle Zahl}\}.\end{aligned}$$

Die Definition der reellen Zahlen liegt nicht auf der Hand. Wir begnügen uns zunächst mit der Anschauung als „kontinuierliche“ Zahlengerade, kommen aber später noch darauf zurück.

Es wird vorausgesetzt, dass Sie mit den üblichen Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $/$ in den Zahlbereichen und der Bruchrechnung gut vertraut sind. Auch ein elementarer Umgang mit Relationen wie „ $=$ “, „ $<$ “, „ $\leq$ “, „ $>$ “ und „ $\geq$ “ in den Zahlbereichen wird vorausgesetzt.

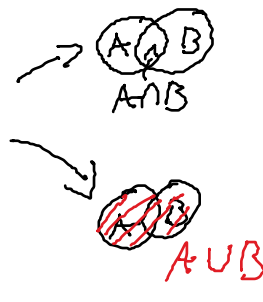
Beziehungen zwischen Mengen:

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von einer Menge B , wenn jedes Element von A in B liegt, in Zeichen: $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt, sind die beiden Mengen gleich, $A = B$.

Durchschnitt, Vereinigung und (Mengen-)Differenz sind erklärt durch

$$\begin{aligned}A \cap B &= \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} \\ A \cup B &= \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \in A : x \notin B\}\end{aligned}$$

Durchschnitt von A und B
Vereinigung von A und B
Differenz oder Restmenge



und erfüllen unter anderem folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}A \cap \emptyset &= \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A, \\ A \cap B &= B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \quad (\text{Kommutativgesetze}), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\text{Assoziativgesetze}), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{Distributivgesetze}).\end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen ergeben sich für uns wichtige Teilmengen in den reellen Zahlen.

Beispiele 1.2 Generell versteht man unter einem **Intervall** $I \subseteq \mathbb{R}$ eine „zusammenhängende“ Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir unterscheiden **offene Intervalle**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \subseteq \mathbb{R},$$

und **abgeschlossene Intervalle**,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$$

zu $a, b \in \mathbb{R}$. Für offenen Intervalle findet sich auch die Notation $]a, b[= (a, b)$. Auch **halboffene** Intervalle etwa $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ werden manchmal betrachtet. Darüberhinaus unterscheiden wir zwischen diesen beschränkten Intervallen und **unbeschränkten** Intervallen wie $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \subseteq \mathbb{R}$ oder $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \subseteq \mathbb{R}$ oder auch $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

1.2 Das Summenzeichen

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Dann setzen wir

$$\sum_{j=1}^n a_j := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

j heißt **Laufindex** und kann selbstverständlich auch mit anderen Buchstaben (z.B. k, ℓ, m oder n) bezeichnet werden. Der Laufindex **muss auch nicht ab 1 laufen**. Unter dem Summenzeichen wird der **Anfangswert festgelegt**, über dem Summenzeichen **der Endwert**. Es ist etwa:

$$\sum_{k=-2}^{n+1} a_k = a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}.$$

Beispiel 1.3 Wir betrachten $a_j = j^2$. Dann gilt für die Summe

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(Beweis mittels vollständiger Induktion s.u.).

Allgemein gelten folgende Rechenregeln mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) \quad \text{und} \quad \lambda \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n (\lambda a_j).$$

Beim Multiplizieren mit einer Zahl kann diese ausgeklammert werden

Man beachte, dass bei diesen Regeln die Laufindizes denselben Bereich durchlaufen, hier also von 1 bis n . Wenn das nicht der Fall ist, müssen die Bereiche erst auf einen gemeinsamen Bereich reduziert werden, etwa:

$$\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=0}^{n+1} b_j = \sum_{j=1}^n a_j + b_0 + b_{n+1} + \sum_{j=1}^n b_j = b_0 + b_{n+1} + \sum_{j=1}^n (a_j + b_j).$$

Oft ist es hilfreich, Indizes zu *verschieben*. Beispiel:

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=5}^{n+4} a_{j-4} = \sum_{j=s+1}^{n+s} a_{j-s} \quad (= a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Wie genau klappt das?

Wir schreiben manchmal die Indexverschiebung über das Gleichheitszeichen. Im folgenden Beispiel ist k der neue Index, der mittels $k = j + s$ mit dem alten zusammenhängt:

$$\sum_{j=1}^n a_j \stackrel{k=j+s}{=} \sum_{k=1+s}^{n+s} a_{k-s} = \sum_{j=1+s}^{n+s} a_{j-s}.$$

Zuletzt haben wir den Laufindex k wieder durch j ersetzt. Es ist ja egal, wie wir den Laufindex bezeichnen.

Beispiele 1.4 (a) Wir berechnen $\sum_{j=1}^n j = 1 + 2 + \dots + n$:

$$\sum_{j=1}^n j \stackrel{j'=n-j+1}{=} \sum_{j'=1}^n (n+1-j') = \sum_{j=1}^n (n+1-j),$$

also

$$2 \sum_{j=1}^n j = \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n (n+1-j) = \sum_{j=1}^n (n+1) = n(n+1)$$

Damit haben wir die Formel erhalten:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2} n(n+1).}$$

(b) Wir leiten die **geometrische Summenformel** her:

$$\sum_{n=0}^m q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}, \quad \text{falls } q \neq 1.$$

Es ist nämlich

$$q \sum_{n=0}^m q^n = \sum_{n=0}^m q^{n+1} \stackrel{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{m+1} q^k = \sum_{n=1}^{m+1} q^n.$$

Subtraktion von $\sum_{n=0}^m q^n$ liefert:

$$\begin{aligned} (1-q) \sum_{n=0}^m q^n &= \sum_{n=0}^m q^n - \sum_{n=1}^{m+1} q^n \\ &= \left(1 + \sum_{n=1}^m q^n\right) - \left(\sum_{n=1}^m q^n + q^{m+1}\right) = 1 - q^{m+1}, \end{aligned}$$

also

$$\boxed{\sum_{n=0}^m q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}, \quad \text{falls } q \neq 1.}$$

Für $q = 1$ gilt $\sum_{n=0}^m q^n = \sum_{n=0}^m 1 = m + 1$.

Produkte:

Das Produktzeichen wird ganz ähnlich wie das Summenzeichen benutzt (ist nur längst nicht so wichtig wie das Summenzeichen):

$$\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Z.B. ist die **Fakultät** definiert durch $0! := 1$ und

$$n! := \prod_{j=1}^n j \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wichtig sind die **Binomialkoeffizienten**: $\binom{n}{0} := 1$ und

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \prod_{j=1}^k \frac{(n+1-j)}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

für $k \in \{1, \dots, n\}$. Nebenbei, der Binomialkoeffizient liefert die Anzahl an Möglichkeiten k Objekte aus n Objekten auszuwählen.

Satz 1.5 Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \dots, n-1$ gilt die Formel:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis: Wir benutzen die Definition und bringen die Brüche auf den gemeinsamen Hauptnenner:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} [(k+1) + (n-k)] \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Doppelsummen:

Jetzt stellen wir uns Zahlen vor, die durch zwei Indizes i und j nummeriert werden. Dies können z.B. Kosten sein, die die Maschine Nr. i am Tag Nr. j erzeugt. Es seien also a_{ij} gewisse Zahlen, $i = 1, \dots, n$, und $j = 1, \dots, m$. Dann setzen wir:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} := \begin{cases} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1m} \\ + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2m} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ + a_{n1} + \quad \quad \quad \dots + a_{nm}. \end{cases}$$

Beispiel 1.6

Haben wir Zahlen $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_m$ gegeben, so ist

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j.$$

Ausgeschrieben sieht dies komplizierter aus:

$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_m) \\ = (a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_m) + (a_2 b_1 + \cdots + a_2 b_m) + \cdots + (a_n b_1 + \cdots + a_n b_m).\end{aligned}$$

1.3 Beweismethoden

In diesem Abschnitt gehen wir auf einige **Beweismethoden** ein. Die bisherigen Beweise in Abschnitt 1.2 waren **direkt**. Jetzt bringen wir ein Beispiel für einen **indirekten** Beweis. Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an und führen dies zu einem Widerspruch.

Satz 1.7 Wenn das Quadrat p^2 einer natürlichen Zahl gerade ist, so ist auch p selbst gerade.

Beweis: Annahme, p sei ungerade. Dann hat p die Form $p = 2m - 1$ für eine natürliche Zahl m . Damit ist $p^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$, und dies ist eine ungerade Zahl. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass p^2 gerade ist. Daher ist unsere Annahme falsch und p gerade. $\square$

Bei dem folgenden Beispiel ist uns kein anderer als ein indirekter Beweis bekannt.

Satz 1.8 $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl (ist also irrational).

Beweis: Annahme, $\sqrt{2}$ ist rational. Dann existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Durch eventuelles Kürzen können wir erreichen, dass p und q teilerfremd sind. Aus der Gleichung folgt $2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = 2q^2$, d.h. p^2 ist gerade. Wie im letzten Satz gezeigt wurde, ist dann auch p gerade, hat also die Form $p = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $2q^2 = p^2 = 4n^2$. Durch 2 kürzen ergibt $q^2 = 2n^2$, d.h. q^2 ist gerade. Der letzte Satz besagt, dass dann auch q gerade ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass p und q als teilerfremd vorausgesetzt wurden. Damit ist die Annahme widerlegt und die Behauptung bewiesen. $\square$

Besonders wichtig ist das **Beweisverfahren der vollständigen Induktion**: Dies wird angewandt, wenn eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle ganzen Zahlen $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ beginnend mit einem $n_0 \in \mathbb{Z}$ bewiesen werden soll. Das Verfahren besteht aus zwei Teilen:

- 1. Schritt (Induktionsanfang):** Ausgehend von den Voraussetzungen der Aufgabenstellung, zeige die Aussage für das kleinste n , für das die Behauptung gelten soll. Beweise also $\mathcal{A}(n_0)$. Dies ist i.a. einfach.
- 2. Schritt (Induktionsschritt):** Nehme an, die Aussage $\mathcal{A}(n)$ sei für ein $n \geq n_0$ richtig. Beweise unter dieser Annahme die Aussage $\mathcal{A}(n + 1)$, also für die nächste natürliche Zahl.

Dann gilt die Behauptung für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$; denn wegen des Induktionsanfangs gilt $\mathcal{A}(n_0)$ und mit dem Induktionsschritt folgt, dass die Aussage $\mathcal{A}(n_0 + 1)$ richtig ist. Aber wenn $\mathcal{A}(n_0 + 1)$ richtig ist folgt wiederum mit dem Induktionsschritt, dass $\mathcal{A}(n_0 + 2)$ gilt, usw.

Beispiel 1.9 Mit vollständiger Induktion zeigen wir die Formel

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann steht links 1 und rechts $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$. Also ist die Behauptung richtig für $n_0 = 1$.

Induktionsschritt: Sei die Behauptung richtig für ein $n \geq 1$. Unter dieser Voraussetzung zeigen wir die Behauptung für $n + 1$: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j^2 &= \sum_{j=1}^n j^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung auch für $n + 1$. Nun schließen wir so: Da die Behauptung für $n = 1$ gilt, so auch für $n = 2$, also auch für $n = 3$, etc., also für alle natürlichen Zahlen.

Satz 1.10 Die Menge M habe n Elemente. Dann gibt es genau 2^n Teilmengen von M .

Beweis: Wir nummerieren die Elemente der Menge, d.h. $M_n = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Die Menge $M_1 = \{a_1\}$ hat die beiden Teilmengen $\emptyset$ und M_1 , also $2 = 2^1$ Teilmengen. Daher ist die Behauptung richtig für $n = 1$.

Induktionsschritt: Sei die Behauptung richtig für ein $n \in \mathbb{N}$. Betrachte dann die Menge

$$M_{n+1} = M_n \cup \{a_{n+1}\} \quad \text{mit} \quad M_n = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Die Menge aller Teilmengen von M_{n+1} können wir in zwei Klassen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ unterteilen: $\mathcal{C}_1$ besteht aus den Teilmengen von M_{n+1} , die a_{n+1} enthalten, $\mathcal{C}_2$ aus den Teilmengen, die a_{n+1} *nicht* enthalten. Die beiden Klassen haben gleich viele Elemente (weshalb ?), die Klasse $\mathcal{C}_2$ ist gerade die Menge aller Teilmengen von M_n . Daher ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl der Mengen in $\mathcal{C}_1$ und in $\mathcal{C}_2$ jeweils 2^n , daher die Gesamtheit $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, und die Behauptung ist auch für $n + 1$ bewiesen. $\square$

Als nächstes zeigen wir die allgemeine **Binomische Formel**:

Satz 1.11 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis: Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Auf beiden Seiten steht $a + b$.

Induktionsschritt: Sei die Behauptung richtig für ein $n \geq 0$. Unter dieser Annahme ist

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n(a + b) = (a + b)^n a + (a + b)^n b \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Indexverschiebung in der 1. Summe $k' = k + 1$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{=\binom{n+1}{k} \text{ nach Satz 1.5}} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} a^{n+1} + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Daher gilt die Behauptung auch für $n+1$. Also ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. $\square$

Satz 1.12 (Bernoullische Ungleichung)

Für jedes $h \in \mathbb{R}$ mit $h \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+h)^n \geq 1+nh$.

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

Für $n=1$ ist die Behauptung sicher richtig, es gilt sogar Gleichheit.

Sei die Behauptung jetzt für ein $n \geq 1$ richtig. Dann ist mit der Induktionsvoraussetzung

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n (1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+\underbrace{nh^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)h.$$

Damit ist die Behauptung auch für $n+1$ gezeigt. (Wo wird die Voraussetzung $h \geq -1$ benötigt?) $\square$

Abschätzungen, wie im aufgezeigten Beweis, sind häufig erforderlich. Es erfordert einige Übung, um auch in einfachen Situationen zu sehen, wie sinnvoll(!) abgeschätzt werden kann. Ein Rezept kann hier nicht angeboten werden. Letztendlich basieren die Abschätzungen auf den Anordnungsaxiomen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, d.h. es gelten für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Regeln

- *Trichotomie*: entweder ist $a < b$, $a = b$ oder $a > b$
- *Transitivität*: mit $a \leq b$ und $b \leq c$ gilt auch $a \leq c$
- *Monotonie bzgl. der Addition*: mit $a \leq b$ gilt $a+c \leq b+c$.
- *Monotonie bzgl. Multiplikation mit positiven Zahlen*: mit $a \leq b$ und $c \geq 0$ gilt $ac \leq bc$.

Bei der ersten Abschätzung im Beweis haben wir genutzt, dass die durch die Annahme gegebene Ungleichung $(1+h)^n \geq (1+nh)$ bei Multiplikation mit der positiven Zahl $1+h$ erhalten bleibt, also die Monotonie bzgl. Multiplikation.

Bei der zweiten Abschätzung wird die Monotonie der Addition verwendet. Aus $nh^2 \geq 0$ ergibt sich $1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$, da auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Zahl $(n+1)h$ addiert wurde.

Beispiele 1.13

- (a) Bei Summen können wir Abschätzungen gewinnen, indem wir alle Summanden durch den kleinsten oder durch den größten Summanden abschätzen. So ist etwa

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} \leq \sum_{j=1}^n j = 1 + 2 + \cdots + n \leq \underbrace{n + n + \cdots + n}_{n\text{-mal}} \leq n^2$$

für $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Bei der folgende Abschätzung wird benutzt, dass für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ gilt: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$. Sei $n \geq 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

In der ersten Summe machen wir die Indexverschiebung $k' = k - 1$ und ersetzen im Ergebnis wieder k' durch k . Dann erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right] = 2 - \frac{1}{n}.$$

- (c) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, die der folgenden Ungleichung genügen:

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 2.$$

Da wir den Bruch wegbekommen möchten, müssen wir mit $x - 1$ multiplizieren. Hier müssen wir das Vorzeichen von $x - 1$ beachten!

1. Fall: $x > 1$. Dann erhalten wir die äquivalente Ungleichung $x + 1 \geq 2(x - 1) = 2x - 2$, also $x \leq 3$.

2. Fall: $x < 1$. Dann erhalten wir die äquivalente Ungleichung $x + 1 \leq 2(x - 1) = 2x - 2$, also $x \geq 3$. Da es kein x gibt mit $x < 1$ und zugleich $x \geq 3$, so tritt dieser 2. Fall nicht auf. Daher ist die Lösungsmenge dieser Ungleichung gegeben durch das halboffene Intervall $(1, 3]$.

Eine weitere wichtige Ungleichung, die bei Abschätzungen oft genutzt wird, tritt beim Rechnen mit dem Betrag

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ auf. **Ganz wichtig:** Wir interpretieren den Betrag $|a|$ als den Abstand von a zu 0 und allgemeiner $|a - b|$ als den Abstand von a zu b !

Ganz häufig werden wir die **Dreiecksungleichung** benutzen:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aus dieser erhält man eine zweite Version der Dreiecksungleichung; denn aus

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \text{bzw.} \quad |b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a|$$

folgt

$$|a - b| \geq \left| |a| - |b| \right|.$$

Beispiel 1.14

(a) Mit den Dreiecksungleichungen erhalten wir Abschätzungen wie z.B.

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{|2 - x|} \leq 1 \quad \text{für } x \in (-1, 1),$$

da wegen $|x| \leq 1$ gilt

$$1 = |2| - 1 \leq |2| - |x| \leq |2 - x| \leq 2 + |x| \leq 3$$

und der Kehrwert aufgrund der Monotonie bzgl. Multiplikation die Ungleichungen umkehrt.

(b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, die der folgenden Betragsungleichung genügen:

$$|3x - 6| \leq x + 2$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $x + 2 < 0$. Dann hat die Ungleichung keine Lösung, weil die linke Seite nicht negativ sein kann.

2. Fall: $x + 2 \geq 0$. Wegen $\{y \in \mathbb{R} : |y| \leq a\} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq a \text{ und } -y \leq a\}$ (für $a \geq 0$) so ist die Betragsungleichung äquivalent zu

$$3x - 6 \leq x + 2 \quad \text{und} \quad -(3x - 6) \leq x + 2$$

d.h. $2x \leq 8$ und $4x \geq 4$, d.h. $x \leq 4$ und $x \geq 1$. Also ist die Lösungsmenge gegeben durch das Intervall $[1, 4]$.

1.4 Die komplexen Zahlen

Häufig ist es nützlich, den Zahlbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu erweitern. Unser Ziel ist es (unter anderem), quadratische Gleichungen der Form $x^2 + ax + b = 0$ für *alle* Werte von a und b zu lösen. Für $a = 0$ und $b > 0$ z.B. besitzt diese Gleichung in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Wir fügen („adjungieren“) dazu eine geeignete neue Größe zu den reellen Zahlen hinzu. Diese bezeichnet man meistens mit i (die Elektroingenieure mit j) und nennt sie *imaginäre Einheit*.

Definition 1.15 (komplexe Zahlen)

Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}$ die Menge aller **formalen Ausdrücke** der Form $a + ib$, wobei a, b in $\mathbb{R}$ liegen, also

$$\mathbb{C} := \{z = (a + ib) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zwei komplexe Zahlen $u = (a + ib)$, $v = (c + id)$ sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Für $z = (a + ib)$ heißt a der **Realteil** und b der **Imaginärteil** von $z \in \mathbb{C}$ mit den Bezeichnungen $a = \operatorname{Re} z$ und $b = \operatorname{Im} z$.

Auf $\mathbb{C}$ führen wir eine **Addition** und eine **Multiplikation** ein durch

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(bc + ad), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dadurch wird $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein **Körper** mit $\mathbf{0} = (0 + i0)$ und $\mathbf{1} = (1 + i0)$ als **Null-** bzw. **Einselement**. Dies bedeutet, dass die folgenden Rechengesetze gelten, die wir schon von den reellen und rationalen Zahlen kennen:

Eigenschaften der Addition:

(K1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ (Assoziativgesetz)

(K2) Es gilt: $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$ für alle $u \in \mathbb{C}$ (Existenz eines Nullelements)

(K3) Zu jedem $z = (a + ib) \in \mathbb{C}$ ist $-z = (-a + i(-b)) \in \mathbb{C}$ sein „Negatives“, d.h. $z + (-z) = (-z) + z = \mathbf{0}$

(K4) $u + v = v + u$ für alle $u, v \in \mathbb{C}$ (Kommutativgesetz)

Eigenschaften der Multiplikation:

(K5) $(uv)w = u(vw)$ für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ (Assoziativgesetz)

(K6) Es gilt $z\mathbf{1} = \mathbf{1}z = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (Existenz eines Einselements)

(K7) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \mathbf{0}$, existiert ein $z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit $zz^{-1} = z^{-1}z = \mathbf{1}$ (Existenz eines inversen Elements der Multiplikation). Für $z = (a + ib) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $z^{-1} \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

(K8) $uv = vu$ für alle $u, v \in \mathbb{C}$ (Kommutativgesetz)

Eigenschaften der Verkettung von Addition und Multiplikation (Distributivgesetze):

(K9) $u(v + w) = (uv) + (uw)$ für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$

(K10) $(u + v)w = (uw) + (vw)$ für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$

Schreibweisen und Notationen: Komplexe Zahlen werden meistens mit Buchstaben am hinteren Ende des Alphabets bezeichnet, also u, v, w, z , reelle Zahlen dagegen mit Buchstaben im vorderen Teil, also a, b, c, d , aber auch x und y .

Wir schreiben auch $a - ib := a + i(-b)$ und $a + bi := a + ib$.

Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ wird durch $a + i0$ eine komplexe Zahl. Die reellen Zahlen sind also genau die komplexen Zahlen, deren Imaginärteil Null ist. Wir schreiben nach wie vor $a \in \mathbb{R}$ statt $a + i0$, fassen aber ab jetzt die reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf. Dies bedeutet, dass wir $\mathbb{R}$ mit dem „Teilkörper“ $R := \{a + i0 : a \in \mathbb{R}\}$ „identifizieren“.

Weiter schreiben wir ia statt $(0 + ia)$ und $a + i$ statt $(a + i1)$. Das Null- und Einselement in $\mathbb{C}$ wird nach wie vor mit 0 bzw. 1 bezeichnet. Es ist also $0 = 0 + i0$ und $1 = 1 + i0$ und $i = 0 + i1$. Mit diesen Vereinbarungen erhalten wir also als Spezialfälle die Addition und Multiplikation einer komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$:

$$(a + ib) + c = (a + c) + ib \quad \text{und} \quad (a + ib) \cdot c = (ac) + i(bc),$$

etwa $(3 + 2i)(4 - i) = 12 + 2 + 8i - 3i = 14 + 5i$, $i^2 = -1$, u.s.w.

Beispiel 1.16

Es lassen sich nun quadratische Gleichungen mit Koeffizienten $u, v \in \mathbb{C}$ durch **quadratische Ergänzung** lösen:

$$0 = z^2 + 2uz + v = (z + u)^2 + v - u^2,$$

Dies ist gleichbedeutend mit $(z + u)^2 = u^2 - v$.

Betrachten wir zunächst den Spezialfall, dass die Koeffizienten $u, v \in \mathbb{R}$ reell sind. Eine Fallunterscheidung liefert:

(a) $u^2 - v > 0$: Wir erhalten die beiden reellen Lösungen: $z_{1,2} = -u \pm \sqrt{u^2 - v}$.

(b) $u^2 - v = 0$: Wir erhalten eine reelle Lösung $z_1 = -u$.

(c) $u^2 - v < 0$: Wir schreiben $u^2 - v = i^2(v - u^2)$ und erhalten die beiden komplexen Lösungen:
 $z_{1,2} = -u \pm i\sqrt{v - u^2}$.

Im allgemeinen Fall mit komplexen Zahlen u, v setzen wir $w = z + u$ und haben die Gleichung $w^2 = u^2 - v$ zu lösen. Wir zerlegen $w = a + ib$ in Realteil a und Imaginärteil b . Dann ist

$$w^2 = a^2 - b^2 + 2iab.$$

Durch einen Vergleich der Real- und Imaginärteile aus der quadratischen Ergänzung lesen wir die zwei reellen Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \operatorname{Re}(u^2 - v) \\ ab &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(u^2 - v) \end{aligned}$$

ab. Dies sind zwei nichtlineare Gleichungen in den Unbekannten a und b . Wenn wir diese Gleichungen lösen können, erhalten wir $w = a + ib$ und daraus $z = w - u$.

Wir verdeutlichen das Vorgehen an einem Zahlenbeispiel: Betrachten Sie die quadratische Gleichung

$$0 = z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = \left(z - \frac{3 - i}{2}\right)^2 + 4 - 3i - \frac{(3 - i)^2}{4} = \left(z - \frac{3 - i}{2}\right)^2 + 2 - \frac{3}{2}i.$$

Wir setzen wieder $w = z - \frac{3 - i}{2}$ und zerlegen $w = a + ib$ mit $a = \operatorname{Re}(w)$ und $b = \operatorname{Im}(w)$. Dann geht die Gleichung über in $w^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -2 + \frac{3}{2}i$, und ein Vergleich des Real- und des Imaginärteils liefert die beiden Gleichungen

$$a^2 - b^2 = -2 \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{3}{2}.$$

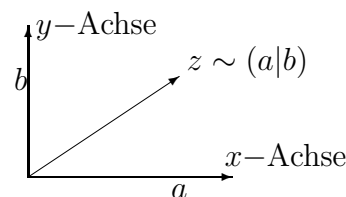
Lösen wir die zweite Gleichung nach $b = \frac{3}{4a}$ auf (beachte: wegen der zweiten Gleichung ist $a \neq 0$) und setzen dies in die erste ein, so folgt

$$a^4 + 2a^2 - \frac{9}{16} = 0$$

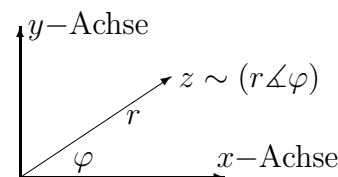
mit den Lösungen $a^2 = -1 \pm \frac{5}{4}$. Da $a \in \mathbb{R}$ und somit a^2 positiv ist, kommt nur die Lösung $a^2 = -1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$ in Frage, und wir erhalten für den Realteil die beiden Möglichkeiten $a = \pm \frac{1}{2}$. Mit a berechnen wir b , und es ergeben sich die gesuchten beiden Lösungen $z = w + \frac{3 - i}{2}$ der ursprünglichen quadratischen Gleichung zu $z = 2 + i$ oder $z = 1 - 2i$.

Achtung: Das Symbol $\sqrt{\cdot}$ verwenden wir nur für Wurzeln aus *nicht-negativen reellen* Zahlen. Das Symbol $\sqrt{-1}$ benutzen wir nicht, weil wir nicht wissen, welche Wurzel $+i$ oder $-i$ sinnvoll ist (siehe Bemerkung zu Satz 4.29).

Bekanntlich können wir die **reellen** Zahlen auf der **Zahlengeraden** veranschaulichen. Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen kann als Punkteebene aufgefaßt werden und heißt die **komplexe Zahlenebene**. Jeder komplexen Zahl $z = a + ib$ entspricht also genau ein Punkt $(a|b)$ der Ebene mit den Koordinaten a und b . Dies ist die Darstellung der komplexen Zahl z in **kartesischen Koordinaten**.



Eine andere Möglichkeit ist die Beschreibung in **Polarkoordinaten** r und φ , wobei r der Abstand zum Ursprung 0 und φ der Winkel zur x -Achse (mathematisch positiv, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) sei. Dafür schreiben wir vorübergehend: $z \sim (r \angle \varphi)$.



Diese Darstellung in Polarkoordinaten ist **nicht** eindeutig möglich:

$$z_1 = z_2 \iff (r_1 = r_2 \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi m \text{ für beliebiges } m \in \mathbb{Z}).$$

Der Winkel φ läßt sich angeben in Grad oder Bogenmaß ($360^\circ = 2\pi$). r heißt **Betrag** (oder Modul) von z , in Zeichen $r = |z|$, und φ heißt **Argument** (oder Phase) von z .

Der komplexe Betrag ist **verträglich** mit dem reellen Betrag, d.h. $|a + i0| = |a|$ für $a \in \mathbb{R}$.

Vereinbarung: Wir bezeichnen das Argument von z , welches in $(-\pi, \pi]$ liegt, mit $\text{Arg } z$ und nennen $\text{Arg } z$ den **Hauptwert des Arguments**.

Die Zahlen bi auf der y -Achse heißen **imaginäre Zahlen**.

Hat man die komplexe Zahl z in Polarkoordinaten r und φ gegeben, so rechnen wir die kartesischen Koordinaten aus:

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi,$$

also $\text{Re } z = r \cos \varphi$ und $\text{Im } z = r \sin \varphi$. Hier benutzen wir also schon Sinus und Kosinus.

Ist umgekehrt z in kartesischen Koordinaten, $z = a + ib$, gegeben, so ist

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Als nächstes wollen wir das Argument $\varphi = \text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ bestimmen. Nach Definition des Kosinus ist $\cos \varphi = a/r = a/\sqrt{a^2 + b^2}$. Diese Zahl liegt im Intervall $[-1, 1]$. Die Kosinusfunktion $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$ ist streng monoton fallend, hat also eine „Umkehrfunktion“, den **Arcuskosinus** $\arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$ (wie wir in Kapitel 3 noch sehen werden). Daher ist $\varphi = \arccos(a/r)$. Da dies immer in $[0, \pi]$ liegt, erhalten wir auf diese Weise nur alle komplexen Zahlen mit $b \geq 0$. Da auch $\cos(-\varphi) = a/r$ gilt, so erhalten wir $\varphi = -\arccos(a/r)$ für $b < 0$. Zusammengenommen haben wir für den Hauptwert φ des **Arguments** einer komplexen Zahl $z = a + ib \neq 0$:

$$\text{Arg } z = \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & b \geq 0, \\ -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & b < 0. \end{cases}$$

Beispiele:

$$\operatorname{Arg}(1+2i) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 1.1071 \hat{=} 63.435^\circ,$$

$$\operatorname{Arg}(-2+i) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \approx 2.6779 \hat{=} 153.43^\circ,$$

$$\operatorname{Arg}(-1-i) = -\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\pi/4 \hat{=} -135^\circ,$$

$$\operatorname{Arg}(-3) = \arccos(-1) = \pi \hat{=} 180^\circ,$$

$$\operatorname{Arg}(i) = \arccos(0) = \pi/2,$$

$$\operatorname{Arg}(-i) = -\arccos(0) = -\pi/2.$$

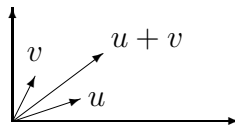
Wir wollen jetzt die Addition und die Multiplikation geometrisch veranschaulichen. Seien $u = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $v = c + id = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ zwei komplexe Zahlen in kartesischen- und Polarkoordinaten. Dann ergibt sich mit den Rechenregeln:

$$u + v = (a + c) + i(b + d) \quad \text{und} \quad uv = rs [\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)].$$

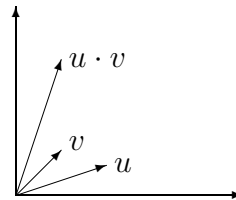
Hier wurden die **Additionstheoreme** $\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi = \cos(\varphi + \psi)$ und $\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi = \sin(\varphi + \psi)$ benutzt. Die Herleitung von Additionstheoremen werden wir in Kapitel 4 betrachten.

In Worten: Der Real- bzw. Imaginärteil von $u+v$ ist gleich der Summe der Real- bzw. Imaginärteile von u und v . Der Betrag von $u \cdot v$ ist gleich dem Produkt der Beträge von u und v , und das Argument von $u \cdot v$ ist gleich der Summe der Argumente von u und v . **Achtung:** Für die Hauptwerte der Argumente muss man aufpassen. Liegt die Summe der Argumente von u und v außerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi]$, so muss man 2π addieren (wenn kleiner als $-\pi$) bzw. subtrahieren (wenn größer oder gleich π), damit man in das Intervall $(-\pi, \pi]$ kommt.

Für die **Addition** ergänze man die Strecken $\overline{0u}$ und $\overline{0v}$ zu einem *Parallelogramm*. Der vierte Eckpunkt ist dann $u + v$.



Die **Multiplikation** ist eine *Drehstreckung*: Der Vektor u wird um ψ gedreht und dann um den Faktor s gestreckt.



Für die Division komplexer Zahlen benötigen wir:

Definition 1.17 Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$ das **(komplex) konjugierte Element** zu z .

Anschaulich bedeutet $\bar{z}$ die Spiegelung von z an der reellen Achse. In Polarkoordinaten ist $\bar{z} = r[\cos \varphi - i \sin \varphi] = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$ für $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Wir listen einige **Eigenschaften** des konjugierten Elements auf:

(a) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z},$

(b) $\overline{\bar{z}} = z,$

(c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad \text{und} \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$

$$(d) \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z,$$

$$(e) \quad |\bar{z}| = |z|,$$

$$(f) \quad \bar{z} z = |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$$

Achtung: Es ist $|z|^2 \neq z^2$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Bei der **Division komplexer Zahlen** in kartesischen Koordinaten erweitern wir immer mit dem Konjugierten des Nenners:

$$\frac{u}{v} = \frac{u \bar{v}}{v \bar{v}} = \frac{u \bar{v}}{|v|^2} = \underbrace{\frac{\operatorname{Re} u \operatorname{Re} v + \operatorname{Im} u \operatorname{Im} v}{(\operatorname{Re} v)^2 + (\operatorname{Im} v)^2}}_{= \operatorname{Re}(u/v)} + i \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{Re} v \operatorname{Im} u - \operatorname{Re} u \operatorname{Im} v}{(\operatorname{Re} v)^2 + (\operatorname{Im} v)^2}}_{= \operatorname{Im}(u/v)}.$$

Beispiel: $u = 1 + 2i$, $v = 3 + i$. Dann ist

$$\frac{u}{v} = \frac{1 + 2i}{3 + i} = \frac{(1 + 2i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{1}{10}(3 + 2 + 6i - i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Wie groß ist der **Betrag** von $u \pm v$?

$$\begin{aligned} |u \pm v|^2 &= (u \pm v)(\bar{u} \pm \bar{v}) = |u|^2 + |v|^2 \pm [u\bar{v} + v\bar{u}] \\ &= |u|^2 + |v|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(u\bar{v}). \end{aligned}$$

Mit $|u| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $|v| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ und $\operatorname{Re}(u\bar{v}) = \operatorname{Re}((1+2i)(3-i)) = \operatorname{Re}(5+5i) = 5$ verifizieren wir $|u+v|^2 = 25 = |4+3i|^2$.

Satz 1.18 Es gilt $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und die **Dreiecksungleichungen**

$$|u+v| \leq |u| + |v| \quad \text{und} \quad |u-v| \geq ||u| - |v|| \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{C}.$$

Beweis: Für $z = a+ib$ ist $|\operatorname{Re} z| = |a| \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ und genauso $|\operatorname{Im} z| = |b| \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= |u|^2 + |v|^2 + 2 \operatorname{Re}(u\bar{v}) \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u\bar{v}| \\ &= |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| = (|u| + |v|)^2. \end{aligned}$$

Da die Quadratwurzel die Relation nicht verändert (*Monotonie der Wurzel*), folgt die erste Version der Dreiecksungleichung.

Weiter ergibt sich $|u| = |(u-v)+v| \leq |u-v| + |v|$, also $|u| - |v| \leq |u-v|$. Genauso folgt durch Vertauschung von u und v die Ungleichung $|v| - |u| \leq |v-u|$. Also gilt auch wie im Reellen die zweite Variante der Dreiecksungleichung, $||v| - |u|| \leq |v-u|$. $\square$

Wenn wir mehr als einen Summanden haben, so gilt die Dreiecksungleichung natürlich auch in der Form

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Dies kann man leicht durch vollständige Induktion nach n zeigen.

2 Folgen und Konvergenz

2.1 Beschränkte und konvergente Zahlenfolgen

Definition 2.1 (Folge)

Sei X eine Menge von Objekten (z.B. Zahlen, Vektoren, Matrizen, Funktionen, Wörter). Eine **Folge** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in der Menge X ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Objekt $x_n := x(n) \in X$ zuordnet.

Der Index n kann selbstverständlich auch i (oder anders) heißen und kann ab 0 oder jeder anderen ganzen Zahl laufen. Statt $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ verwenden wir auch die Schreibweisen $(x_n)_n$ oder sogar nur (x_n) , falls klar ist, welches Symbol den Index bezeichnet.

Beispiele:

- (a) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, (explizite Definition),
- (b) $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, (rekursive Definition),
- (c) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}$, (Folge von Summen von Zahlen, also selbst eine Zahlenfolge),
- (d) $f_n(t) = \sin(nt)$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, (Folge von Funktionen).

Wir wollen die anschaulichen Vorstellungen von „beschränkten Folgen“ und „konvergenten Folgen“ präzisieren und beschränken uns zunächst auf **Zahlenfolgen**.

Definition 2.2 (beschränkte Folge, konvergente Folge)

- (a) Eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls es eine Zahl $r > 0$ gibt mit $|x_n| \leq r$ für alle n .
- (b) Eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{C}$ heißt **konvergent**, wenn ein **Grenzwert**, d.h. eine Zahl $x \in \mathbb{C}$, existiert mit der folgenden Eigenschaft:

Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Existiert kein solches $x \in \mathbb{C}$, so heißt die Folge **divergent**.

Bezeichnung: Wir schreiben $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$).

Bemerkungen:

- (a) Für die Konvergenz muss gesichert werden, dass es zu **jedem** $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass der „Folgenschwanz“ ab N den Abstand höchstens ε zum Grenzwert hat. Die Zahl N hängt von ε ab, also $N = N_\varepsilon$, und wird i.a. größer, je kleiner ε gewählt wird.
- (b) (i) Besitzt eine reelle Folge $(x_n)_n$ keine obere Schranke r , d.h. zu jedem $r \in \mathbb{R}$ gibt es ein n mit $x_n > r$, so heißt $(x_n)_n$ **nach oben unbeschränkt**.

- (ii) Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ und sagen „ $(x_n)_n$ **strebt gegen unendlich**“, falls es zu jedem $R > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n \geq R$ für alle $n \geq N$. In der Literatur findet man hierfür gelegentlich auch den Begriff *uneigentlich konvergent*.

Wir schreiben somit etwa $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$. Genauso werden nach unten unbeschränkte Folgen erklärt und solche, die gegen $-\infty$ streben.

- (c) Diese Begriffe lassen sich auch auf andere Objekte etwa Folgen von Vektoren oder Folgen von Funktionen übertragen, die uns später noch begegnen werden.
- (d) Eine Folge $(x_n)_n$ konvergiert genau dann gegen x , wenn die Folge $(|x_n - x|)_n$ gegen Null konvergiert. Dies sieht man sofort aus der Definition! Folgen, die gegen Null konvergieren, heißen **Nullfolgen**.

Beispiele 2.3

- (a) Sei $c \in \mathbb{C}$ eine beliebige Konstante und $x_n = \frac{c}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_n$ eine Nullfolge, d.h. konvergiert gegen $0 \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0.}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle dann $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $N \geq |c|/\varepsilon$. Für jedes $n \geq N$ gilt dann: $|x_n - 0| = |c|/n \leq |c|/N \leq \varepsilon$. Dies beweist $x_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. $\square$

- (b) Sei $r = p/q \in \mathbb{Q}$ eine rationale, positive Zahl, also $p, q \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $x_n = 1/n^r = 1/\sqrt[q]{n^p}$ gegen 0, also

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[q]{n^p}} = 0.}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1/\sqrt[q]{\varepsilon^q}$. Für $n \geq N$ ist dann

$$|x_n| = \frac{1}{\sqrt[q]{n^p}} \leq \frac{1}{\sqrt[q]{N^p}} \leq \varepsilon.$$

Bevor wir weitere Beispiele besprechen, wiederholen wir die wichtige **Bernoullische Ungleichung** (Satz 1.12): Für jedes $h > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+h)^n \geq 1 + nh$.

Beispiele 2.4

- (a) Für jedes $a > 0$ gilt $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.}$

Beweis: Sei $x_n := \sqrt[n]{a}$ und zunächst $a \geq 1$. Dann ist auch die n -te Wurzel $x_n \geq 1$ und daher mit der Bernoullischen Ungleichung:

$$a = x_n^n = [1 + (x_n - 1)]^n \geq 1 + n(x_n - 1).$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq (a-1)/\varepsilon$. Dann ist mit der eben gezeigten Ungleichung

$$|x_n - 1| = x_n - 1 \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{N} \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Sei jetzt $a < 1$. Dann ist $x_n \leq 1$ und, da $1/a > 1$, nach dem eben Bewiesenen $1/x_n = \sqrt[n]{1/a} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Wir schätzen jetzt ab:

$$|x_n - 1| = |x_n| \left| 1 - \frac{1}{x_n} \right| \leq \left| 1 - \frac{1}{x_n} \right|.$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Wähle dann $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left| 1 - \frac{1}{x_n} \right| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$. Dann ist auch $|x_n - 1| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$, und auch dieser Fall ist erledigt. $\square$

(b) Für jedes $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ gilt: $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0}$. Die Folge $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **geometrische Folge**.

Beweis: Wir wenden wieder die Bernoullische Ungleichung in etwas trickreicher Weise an (beachte $|a| < 1$):

$$\frac{1}{|a^n|} = \frac{1}{|a|^n} = \left(1 + \frac{1 - |a|}{|a|} \right)^n \geq 1 + n \frac{1 - |a|}{|a|},$$

und daher

$$|a^n| \leq \frac{1}{1 + n \frac{1 - |a|}{|a|}} = \frac{|a|}{|a| + n(1 - |a|)} \leq \frac{|a|}{n(1 - |a|)}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{|a|}{\varepsilon(1 - |a|)}$. Dann folgt $|a^n| \leq \frac{|a|}{N(1 - |a|)} \leq \varepsilon$ für $n \geq N$. $\square$

Mit den Beweisen zu den folgenden Sätzen können wir den Konvergenzbegriff weiter üben.

Satz 2.5 Ist die Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{C}$ konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten: Gilt $x_n \rightarrow x$ und $x_n \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$, so ist $x = y$.

Beweis: Wegen der Konvergenz von $(x_n)_n$ gegen x und gegen y existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \geq N \quad \text{und} \quad |x_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \geq M.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$|x - y| = |(x - x_n) + (x_n - y)| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \varepsilon.$$

Da diese Ungleichung für jeden Wert $\varepsilon > 0$ gilt, ist $x = y$. $\square$

Satz 2.6 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Für $\varepsilon = 1$ existiert nach Definition der Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| \leq 1$ für alle $n \geq N$. Aus der Dreiecksungleichung folgt also für alle $n \geq N$, dass

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq 1 + |x|.$$

Setze nun $R := \max\{1 + |x|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|\}$. Dann gilt $|x_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Hier können wir das Beispiel 2.4 (b) fortführen:

Beispiel 2.7 Ist $a \in \mathbb{C}$ und $|a| > 1$, so **divergiert** die geometrische Folge $\boxed{(a^n)_{n=1}^\infty}$, denn sie ist nicht beschränkt. Mit der Bernoullischen Ungleichung gilt nämlich

$$|a^n| = (1 + (|a| - 1))^n \geq 1 + n(|a| - 1),$$

und der rechte Ausdruck ist wegen $|a| - 1 > 0$ sicher unbeschränkt (Widerspruchsbeweis!).

Wir wollen ein weiteres Beispiel für eine divergente Folge untersuchen.

Beispiel 2.8 Die Folge $\boxed{x_n = (-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, divergiert.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Dann würde es zu $\varepsilon = 1/2$ ein $N \in \mathbb{N}$ geben mit $|x_n - x| \leq 1/2$ für alle $n \geq N$. Sei nun $n \geq N$ eine gerade Zahl. Dann ist $n + 1$ ungerade und daher

$$2 = |x_n - x_{n+1}| = |(x_n - x) + (x - x_{n+1})| \leq |x_n - x| + |x - x_{n+1}| \leq 1,$$

und dies ist sicher ein Widerspruch. □

Für viele Konvergenzuntersuchungen kann die Differenz $|x_n - x|$ durch eine schon bekannte Nullfolge abgeschätzt werden (s. Beispiel 2.4 (b)). Der folgende wichtige Satz belegt, dass eine solche Abschätzung für einen Konvergenzbeweis ausreicht.

Satz 2.9 (*Majorantenkriterium*)

Sei $(y_n)_n$ eine Nullfolge. Sei ferner $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$ sowie $x \in \mathbb{C}$ und $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|x_n - x| \leq c |y_n| \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann konvergiert $(x_n)_n$ gegen x .

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(y_n)_n$ eine Nullfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| \leq \varepsilon/c$ für alle $n \geq N$. Für $n \geq \max\{N, n_0\}$ folgt dann $|x_n - x| \leq c |y_n| \leq \varepsilon$. □

Als Anwendung betrachten wir das folgende Beispiel:

Beispiel 2.10 Für jedes $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.}$$

Dies bedeutet, dass die Fakultät $n!$ „schneller gegen unendlich strebt“ als jede Potenz a^n .

Beweis: Wir halten $a \in \mathbb{C}$ fest und wählen $p \in \mathbb{N}$ mit $p > |a|$. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p + 1$, gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{|a|^n}{n!} &= \frac{|a|^n}{(p-1)! \underbrace{p \cdot (p+1) \cdot \dots \cdot n}_{n-p+1 \text{ Faktoren}}} \\ &\leq \frac{|a|^n}{(p-1)! p^{n-p+1}} = \frac{p^{p-1}}{(p-1)!} \left(\frac{|a|}{p} \right)^n \end{aligned}$$

Die geometrische Folge $(|a|/p)^n$ konvergiert gegen 0 (s. Bsp. 2.4), also auch die Folge $(|a_n|/(n!))_{n \in \mathbb{N}}$.

Der nächste Satz folgt direkt aus dem Majorantenkriterium.

Satz 2.11 (*Einschließungskriterium*)

Für drei **reelle** Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle „hinreichend großen n “ (d.h. für alle $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$). Außerdem konvergiere sowohl $(x_n)_n$ als auch $(z_n)_n$ gegen den selben Grenzwert y . Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Beweis: Wir schätzen den Fehler $|y_n - y|$ ab:

$$y_n - y \leq z_n - y \leq |z_n - y| \quad \text{und} \quad y - y_n \leq y - x_n \leq |x_n - y|,$$

und daher $|y_n - y| \leq |x_n - y| + |z_n - y|$. Das Majorantenkriterium liefert die Konvergenz. $\square$

Allgemeines Vorgehen zur Konvergenzuntersuchung: Ist x „Kandidat“ für den Grenzwert von $(x_n)_n$, so forme man den Ausdruck $|x_n - x|$ solange um, bis er durch eine bekannte Nullfolge nach oben abgeschätzt werden kann. Nach dem Majorantenkriterium ist dann die Konvergenz $x_n \rightarrow x$ gezeigt. Das Handwerkszeug für diese Abschätzungen ist fast immer die Dreiecksungleichung.

Wie erhält man einen **Kandidaten für den Grenzwert**? Ein allgemeines Rezept dafür gibt es nicht. Bei gewissen Typen von Folgen gibt es aber Methoden:

- (i) Bei einer **rekursiven** Definition ersetze x_n und x_{n+1} etc. durch x und löse nach x auf. Dies ist jedoch **kein** Konvergenzbeweis!
- (ii) Bei rationalen Ausdrücken dividiere durch die „führenden“ Terme.

Bevor wir dies an Beispielen illustrieren, brauchen wir noch gewisse Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz 2.12 (*Rechenregeln*)

Es seien $(x_n)_n, (y_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

- (a) Dann konvergieren die Folgen $(x_n \pm y_n)_n$ und $(y_n x_n)_n$ und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n x_n) = y x.$$

- (b) Falls $y \neq 0$, so gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $y_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

- (c) Ist $(x_n)_n$ konvergente Folge in $\mathbb{R}$ und es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch für den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq c$. Man beachte, dass auch im Fall $x_n < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im allgemeinen nur $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq c$ folgt.

Beweis von Teil (b): Wegen $y_n \rightarrow y$ und $y \neq 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y| \leq \frac{1}{2}|y|$ für alle $n \geq N$. Für diese $n \geq N$ ist dann mit der zweiten Dreiecksungleichung

$$|y_n| = |y - (y - y_n)| \geq |y| - |y - y_n| \geq |y| - \frac{1}{2}|y| = \frac{1}{2}|y| > 0.$$

Daher ist die Folge $(x_n/y_n)_{n \geq N}$ wohldefiniert. Ferner ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \frac{|y x_n - y_n x|}{|y| |y_n|} \leq \frac{2}{|y|^2} |y(x_n - x) + (y - y_n)x| \\ &\leq \frac{2|x_n - x|}{|y|} + \frac{2|x||y_n - y|}{|y|^2}. \end{aligned}$$

Nach Teil (a) konvergiert der rechte Ausdruck gegen 0. Aus dem Majorantenkriterium folgt dann die Behauptung.

Beweis zu Teil (c): Wir setzen wieder $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $|x - x_n| \leq \varepsilon$. Somit ergibt sich

$$x = x_n + x - x_n \leq x_n + |x - x_n| \leq c + \varepsilon.$$

Da diese Ungleichung für jeden Wert $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $x \leq c$. Für die weitere Bemerkung betrachte zum Beispiel $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ mit $x_n < 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. $\square$

Beispiele 2.12

$$(a) \quad \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 1} = \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \longrightarrow 3 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

$$(b) \quad \frac{3n^2 + 17n + 3}{2n^2 - 13n + 2} = \frac{3 + 17/n + 3/n^2}{2 - 13/n + 2/n^2} \longrightarrow \frac{3}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

$$(c) \quad x_n := \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \longrightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

denn durch Erweiterung ist mit der 3. Binomischen Formel

$$|x_n - 1| = \frac{|n - \sqrt{n^2 + 1}|}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}[n + \sqrt{n^2 + 1}]} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

$$(d) \quad \sqrt{n+7} - \sqrt{n-1} = \frac{8}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n-1}} \leq \frac{8}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(e) Die Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv definiert: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ für $n \in \mathbb{N}$. Setzt man für a_n und a_{n+1} jeweils a ein und löst nach a auf, so kommt als Grenzwert nur $\pm\sqrt{2}$ in Frage. Da mit a_1 auch alle weiteren Folgenglieder nicht negativ sind, so gilt das auch für den Grenzwert a . Also kommt nur $a = +\sqrt{2}$ in Frage. Dies ist aber **kein Beweis** dafür, dass die Folge wirklich gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Im nächsten Abschnitt werden wir die Konvergenz klären.

(f) Die rekursiv definierte Folge $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert sicher nicht, da sie unbeschränkt ist (weshalb?). Trotzdem kann man den Grenzwert „ausrechnen“: Aus $a = a^2$ folgt $a = 0$ oder $a = 1$. Beides ist aber falsch, da die Folge nicht konvergiert. Dieses Beispiel motiviert die Notwendigkeit eines theoretischen Konvergenzbeweises.

2.2 Teilfolgen und das Monotoniekriterium

Bisher haben wir nur die Konvergenz von sehr einfachen Folgen explizit mit der Definition (oder dem Majorantenkriterium) nachgewiesen. Dies klappt natürlich nur, wenn wir den Grenzwert kennen (oder vermuten). Dies ist aber eher selten der Fall. Viel häufiger wird ein unbekannter Wert mit Hilfe einer Folge angenähert (etwa durch einen Algorithmus im Rechner). Als Beispiel betrachten wir etwa eine Folge von Summen.

$$x_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir benötigen also Kriterien, die uns die Konvergenz sichern, ohne dass wir den Grenzwert kennen.

Definition 2.13 (Teilfolge, Häufungspunkt)

Sei $(x_n)_n$ eine beliebige (komplexe) Zahlenfolge.

(a) Als **Teilfolge** von $(x_n)_n$ werden Folgen der Form $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ bezeichnet, wobei $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ aufsteigende natürliche Zahlen sind. Wir notieren dies kurz mit

$$(x_{n_k})_{k=1}^\infty \subseteq (x_n)_{n=1}^\infty.$$

(b) $x \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** von $(x_n)_n$, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^\infty \subseteq (x_n)_{n=1}^\infty$ gibt mit $x_{n_k} \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$.

Beispiel 2.14 Als Standardbeispiel dient die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Diese ist nicht konvergent (siehe Beispiel 2.8 oben), besitzt aber die beiden konvergenten Teilfolgen mit $x_{2n} = 1$ und $x_{2n-1} = -1$. Daher besitzt die divergente Folge $(x_n)_n$ die beiden Häufungspunkte $+1$ und -1 .

Ganz wichtig in Hinblick auf Konvergenzkriterien ist der folgende Satz.

Satz 2.15 (Bolzano–Weierstraß)

Jede **beschränkte** Zahlenfolge $(x_n)_n$ besitzt einen Häufungspunkt, d.h. eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung: Dieser Satz ist eng verknüpft mit der *Definition* der reellen Zahlen als Erweiterung der rationalen Zahlen. Im $\mathbb{Q}$ gilt er nämlich nicht: Die Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1 = 1$, konvergiert gegen $\sqrt{2}$ (siehe unten). Sie ist daher beschränkt, besitzt aber in $\mathbb{Q}$ keinen Häufungspunkt, denn sie konvergiert gegen eine nicht-rationale Zahl. Wir nehmen diesen Satz als **Axiom** (dann ist er kein Satz mehr, der zu beweisen ist). Ansonsten müßten wir ein anderes **Vollständigkeitsaxiom** der reellen Zahlen annehmen und diesen Satz damit beweisen. Häufig wird etwa die *Existenz von Suprema* beschränkter Mengen oder der *Durchschnittssatz* bei Intervallschachtelungen vorausgesetzt. Wir gehen anders vor und beweisen den Durchschnittssatz unter Annahme des Satz von Bolzano–Weierstraß.

Satz 2.16 (Durchschnittssatz)

Sei $I_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, eine Folge von nichtleeren Intervallen der Form $I_j = [a_j, b_j]$ mit $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \dots$. Dann gibt es (mindestens) einen gemeinsamen Punkt $\hat{x} \in \bigcap \{I_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Aus jedem Intervall I_j wählen wir uns einen Punkt x_j aus, also $x_j \in I_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wegen der Inklusionseigenschaft der Intervalle ist $x_k \in I_j$ für alle $k \geq j$. Insbesondere ist die Folge (x_j) beschränkt, besitzt also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $x_{j_k} \rightarrow \hat{x}$. Aus $x_{j_k} \in I_m$ für alle $j_k \geq m$ und der Abgeschlossenheit von I_m folgt für $k \rightarrow \infty$, dass auch $\hat{x} \in I_m$. Da dies für jedes m gilt, ist $\hat{x} \in \bigcap \{I_m : m \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Ganz einfach ist der Beweis zum folgenden Satz:

Satz 2.17

- (a) Konvergiert $(x_n)_n$ gegen x , so auch jede Teilfolge, und x ist der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_n$.
- (b) Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge mit einem, aber auch nur einem einzigen Häufungspunkt x (d.h. jede konvergente Teilfolge strebt gegen dieses x). Dann konvergiert die ganze Folge gegen x .

Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß läßt sich nun ein einfaches und sehr nützliches Konvergenzkriterium zeigen. Dazu führen wir den Begriff der Monotonie ein.

Definition 2.18 (Monotonie)

Die reelle Zahlenfolge $(x_n)_n$ heißt **monoton wachsend** (bzw. **monoton fallend**), falls $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n (bzw. $x_{n+1} \leq x_n$ für alle n). Wenn $x_{n+1} > x_n$ bzw. $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, sprechen wir von **strenger Monotonie**.

Den folgenden Satz werden wir häufig benutzen, insbesondere immer dann, wenn wir den Grenzwert nicht kennen.

Satz 2.19 (Monotoniekriterium)

Jede reelle, beschränkte und monotone Folge konvergiert.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall einer monoton wachsenden Folge. Sei also $(x_n)_n$ monoton wachsend, d.h. $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n . Da nach Voraussetzung die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz 2.15 von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen ein x konvergiert. Wir zeigen, dass sogar die ganze Folge gegen x konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_k} - x| \leq \varepsilon$. Da die Folge $(x_m)_m$ monoton wachsend ist, so ist $x \geq x_m$ für alle m und daher

$$0 \leq x - x_m \leq x - x_{n_k} \leq \varepsilon \text{ für alle } m \geq n_k.$$

Setzen wir $N := n_k$, so folgt die Behauptung. $\square$

Beispiele 2.20

(a) Jetzt können wir die Konvergenz der rekursiv definierten Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2/x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, für beliebigen Anfangswert $x_1 > 0$ zeigen:

Zunächst sehen wir induktiv, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Als nächstes zeigen wir $x_n^2 \geq 2$ für alle $n \geq 2$:

Aus der Definitionsgleichung folgt durch Multiplikation mit $2x_n$, dass $2x_n x_{n+1} = x_n^2 + 2$, d.h. $(x_n - x_{n+1})^2 = x_{n+1}^2 - 2$ für alle $n \geq 1$, also $x_n^2 - 2 \geq 0$ für alle $n \geq 2$.

Jetzt ist

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x_n} - x_n \right) = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0,$$

d.h. die Folge $(x_n)_n$ ist monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt, also konvergent. Der Grenzwert ist $x = \sqrt{2}$, wie oben berechnet wurde. Außerdem gilt

$$\frac{|x_{n+1} - \sqrt{2}|}{|x_n - \sqrt{2}|^2} = \frac{1}{2x_n} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Die Eigenschaft $|x_{n+1} - x| \leq c |x_n - x|^2$ für $n \in \mathbb{N}$ bei konvergenten Folgen mit einer Konstanten $c > 0$, hier etwa $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, nennt man **quadratische Konvergenz**. Sie bedeutet anschaulich, dass sich in jedem Schritt die Anzahl der korrekten Dezimalstellen im wesentlichen verdoppelt. Dies ist eine sehr schnelle Konvergenz!

(b) Auch diese Folge haben wir schon vorgestellt:

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit der binomischen Formel erhalten wir

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Da für $k \geq 1$ die Abschätzung

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ mal}}} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

gilt, folgt mit der geometrischen Summe

$$x_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(x_n)_n$ ist nach oben beschränkt. Wir zeigen, dass sie monoton steigend ist und betrachten dazu den Quotienten

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) (1+h)^{n+1} \quad \text{mit}$$

$$1+h = \frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n(n+1) + n}{n(n+1) + (n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Die Bernoullische Ungleichung liefert

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) [1 + (n+1)h] = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Also ist $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Satz 2.19 folgt die Konvergenz der Folge. (Ihr Grenzwert ist die Eulersche Zahl e , wie später gezeigt wird.)

3 Funktionen und Stetigkeit

3.1 Der Funktionsbegriff

Funktionen sind schon aus der Schule bekannt – jedenfalls Funktionen **einer** reellen Veränderlichen. Wir betrachten im ersten Semester im wesentlichen Funktionen in einer (komplexen) Veränderlichen und werden später die Begriffe auf vektorwertige Funktionen in mehreren Variablen erweitern.

Definition 3.1 (*Funktion einer Veränderlichen*)

Eine **Funktion** ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D \subseteq \mathbb{C}$ genau ein $y \in W \subseteq \mathbb{C}$ zuordnet. Wir schreiben $f : D \rightarrow W$ und $y = f(x)$ oder

$$\begin{array}{ccc} f : D & \longrightarrow & W \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Die Menge D heißt **Definitionsmenge**. Die Menge W wird **Wertemenge** genannt. Spezieller heißt die Menge aller Funktionswerte,

$$f(D) := \{f(x) \in W : x \in D\} \subseteq W,$$

das **Bild** von f . Der Fall reeller Argumente bzw. reellwertiger Funktionen ist durch die Forderung $D \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $W = \mathbb{R}$ in der Definition enthalten.

Beispiele 3.2

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^2 + 2ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter seien. Wegen $f(x) = (x + a)^2 + b - a^2$ ist $[b - a^2, \infty)$ das Bild.
- (b) Hier sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, wobei natürlich wie üblich das Symbol $\sqrt{\cdot}$ die positive Wurzel bezeichne. Dann ist $\mathbb{R}_{\geq 0}$ Definitionsmenge und das Bild.

Wie veranschaulicht man sich Funktionen? In diesem Zusammenhang ist der Graph einer Funktion wichtig.

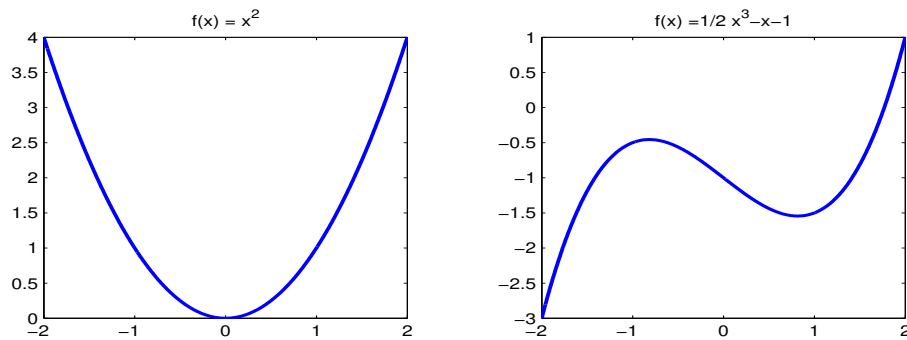
Definition 3.3 (*Graph einer Funktion*)

Sei $f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : x \in D\}$$

der **Graph** der Funktion. Der Graph ist somit eine Teilmenge von $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{(u, v) : u, v \in \mathbb{C}\}$.

Für **reellwertige** Funktionen einer reellen Veränderlichen, also $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und dieser lässt sich wie gewohnt skizzieren.



Die Mengen-Schreibweise

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\},$$

um geordnete Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$ anzugeben, ist üblich und wird **direktes Produkt** der Mengen A und B genannt.

Für die Veranschaulichung von **komplexen** Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ können wir nicht den Graphen skizzieren, da dieser ja in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, also in einem vier-dimensionalen Raum (über $\mathbb{R}$) liegt. Daher beschreibt man Abbildungen von $\mathbb{C}$ in sich auf andere Weise, z.B. wie gewisse Mengen von $\mathbb{C}$ abgebildet werden. Wir gehen einige Funktionen durch und benutzen dabei natürlich Eigenschaften der komplexen Zahlen aus Abschnitt 1.4:

Beispiele 3.4

(a) Sei $u \in \mathbb{C}$ fest gewählt, $u \neq 0$, und $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch $f(z) = uz$, $z \in \mathbb{C}$. Dieses f bedeutet eine **Drehstreckung**, d.h. z wird um $|u|$ gestreckt und um $\arg u$ gedreht.

(b) Mit $k \in \mathbb{N}$ sei $f(z) := z^k$, $z \in \mathbb{C}$. In Polarkoordinaten ist $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, also

$$f(z) = z^k = r^k [\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)].$$

Liegt also z auf dem Kreis vom Radius $r > 0$ und Zentrum 0, so liegt $f(z)$ auf dem Kreis vom Radius r^k . Der Halbstrahl von 0 ausgehend mit dem Winkel φ zur positiven reellen Halbachse wird auf den Halbstrahl mit Winkel $k\varphi$ abgebildet. Für $k = 2$ wird die Viertelebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ „aufgeklappt“ in die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, und die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ wird auf die „geschlitzte“ Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (-\infty, 0], \operatorname{Im} z = 0\}$ abgebildet.

(c) Jetzt betrachten wir $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Erweitern mit $\bar{z}$ liefert $f(z) = \bar{z}/|z|^2$. In Polarkoordinaten $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ist daher:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r} [\cos \varphi - i \sin \varphi] = \frac{1}{r} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].$$

Die komplexe Zahl $z \neq 0$ wird also durch f am Einheitskreis „gespiegelt“ und anschließend an der reellen Achse gespiegelt. Diese Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$ hat eine interessante Eigenschaft:

Kreise, die nicht durch 0 gehen, werden auf Kreise abgebildet, die ebenfalls nicht durch 0 gehen. Dies sieht man so: Die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$ beschreibt einen Kreis mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Er geht nicht durch 0, wenn $|z_0| \neq R$ vorausgesetzt wird. Sei

$u = f(z) = 1/z$. Dann ist $z = 1/u$, und wir formen die Gleichung $\left|\frac{1}{u} - z_0\right|^2 = R^2$ äquivalent um:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{u} - z_0\right|^2 = R^2 &\iff |1 - u z_0|^2 = |u|^2 R^2 \\ &\iff 1 + |u|^2 |z_0|^2 - 2\operatorname{Re}(u z_0) = R^2 |u|^2 \\ &\iff 1 + (|z_0|^2 - R^2) |u|^2 - 2\operatorname{Re}(u z_0) = 0 \\ &\iff \left|u - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}\right|^2 = \frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2} - \frac{1}{|z_0|^2 - R^2} \\ &= \frac{R^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2}. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung bedeutet, dass $u = 1/z$ auf dem Kreis mit Radius $\frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$ und Mittelpunkt $\frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}$ liegt.

Geraden, die nicht durch 0 gehen, werden ebenfalls in Kreise abgebildet. Wir können Geraden in $\mathbb{C}$ in der Normalenform durch die Gleichung $\operatorname{Re}(\overline{v} z) = \gamma$ beschreiben, denn mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, und $v = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, ist $\gamma = \operatorname{Re}(\overline{v} z) = ax + by$ bzw. $y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$ (für $b \neq 0$), und dies ist die aus der Schule bekannte Darstellung. Für $\gamma \neq 0$ geht die Gerade nicht durch 0. Mit $u = 1/z$ ist wieder $\operatorname{Re}(\overline{v}/u) = \gamma$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\overline{v}/u) = \gamma &\iff \operatorname{Re}(\overline{v} \overline{u}) = \gamma |u|^2 \iff |u|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{v}}{2\gamma} \overline{u}\right) = 0 \\ &\iff \left|u - \frac{\overline{v}}{2\gamma}\right|^2 = \frac{|v|^2}{4\gamma^2} \end{aligned}$$

Dies beschreibt einen Kreis mit Radius $\frac{|v|}{2|\gamma|}$ und Mittelpunkt $\frac{\overline{v}}{2\gamma}$. Dieser geht durch 0.

Besonders wichtige Funktionen sind die **Polynome** (genauer: Polynomfunktionen):

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad x \in \mathbb{C},$$

auf die wir ausführlicher eingehen wollen. Die $a_k \in \mathbb{C}$ heißen **Koeffizienten** von p , und n heißt der **Grad** von p (falls $a_n \neq 0$). Es gilt $p(0) = a_0$, d.h. es gilt bei dieser Notation von Polynomfunktionen die Konvention, den im allgemeinen nicht definierten Ausdruck 0^0 gleich 1 zu interpretieren. Eine Zahl $\hat{x} \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von p , wenn $p(\hat{x}) = 0$ ist. Die Diskussion der Nullstellen von linearen (d.h. $n = 1$) und quadratischen Polynomen (d.h. $n = 2$) mit reellen Koeffizienten sind aus der Schule bekannt. Auch für kubische (d.h. $n = 3$) Polynome und Polynome 4. Ordnung gibt es noch Nullstellenformeln, die aber ziemlich kompliziert und für uns nicht wichtig sind.

Wesentlich ist, dass wir im Fall einer Nullstelle $\hat{x} \in \mathbb{C}$ eines Polynoms p dieses durch das lineare Polynom $(x - \hat{x})$ „teilen“ können.

Satz 3.5 Sei $\hat{x} \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines Polynoms p , d.h. $p(\hat{x}) = 0$, und p habe den Grad n . Dann kann p in der Form

$$p(x) = (x - \hat{x}) q(x), \quad x \in \mathbb{C},$$

geschrieben werden, wobei q ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

Bevor wir diesen Satz beweisen, machen wir folgende **Vorüberlegung**:

Ist p ein Polynom vom Grad n und $\hat{x} \in \mathbb{C}$, so gibt es $b_0, \dots, b_n$ mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{\ell=0}^n b_\ell (x - \hat{x})^\ell.$$

Dies nennen wir die **Entwicklung von p um den Entwicklungspunkt $\hat{x}$** .

Beweis: Wir betrachten $x = (x - \hat{x}) + \hat{x}$ und benutzen die binomische Formel,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k ((x - \hat{x}) + \hat{x})^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (x - \hat{x})^\ell \hat{x}^{k-\ell} = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_k \hat{x}^{k-\ell} (x - \hat{x})^\ell.$$

Definieren wir zur Abkürzung

$$D_{k,\ell} = \begin{cases} a_k \binom{k}{\ell} \hat{x}^{k-\ell} (x - \hat{x})^\ell, & \text{für } 0 \leq \ell \leq k, \\ 0, & \text{für } \ell > k, \end{cases}$$

so gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n D_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n D_{k,\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n a_k \binom{k}{\ell} \hat{x}^{k-\ell} (x - \hat{x})^\ell = \sum_{\ell=0}^n b_\ell (x - \hat{x})^\ell, \end{aligned}$$

wenn wir $b_\ell = \sum_{k=\ell}^n a_k \binom{k}{\ell} \hat{x}^{k-\ell}$ für $\ell = 0, \dots, n$ setzen. □

Beweis von Satz 3.5: Wir entwickeln p um die Nullstelle $\hat{x}$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - \hat{x})^k.$$

Dann ist $0 = p(\hat{x}) = \sum_{k=0}^n b_k (\hat{x} - \hat{x})^k = b_0$. Also erhalten wir

$$p(x) = \sum_{k=1}^n b_k (x - \hat{x})^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} (x - \hat{x})^{k+1} = (x - \hat{x}) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} (x - \hat{x})^k}_{= q(x)}.$$

□

Durch fortgesetzte Anwendung dieses Abdividierens erhalten wir

$$p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m) q(x) \quad \text{mit einem Polynom } q \text{ vom Grad } n - m, \quad (3.1)$$

wobei $x_1, \dots, x_m$ Nullstellen von p sind. Dies lässt sich fortführen, bis keine Nullstellen von p mehr übrig sind – unabhängig davon, ob wir als Grundkörper die reellen oder komplexen Zahlen nehmen. Wir haben insbesondere gezeigt:

Satz 3.6 Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n Nullstellen.

In $\mathbb{C}$ können wir dies sogar bis $m = n$ fortführen. Dies ist der Inhalt des folgenden herausragenden Ergebnisses:

Satz 3.7 (*Fundamentalsatz der Algebra*)

Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ein Polynom n -ten Grades in $x \in \mathbb{C}$, wobei $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, n-1$. Dann existieren Nullstellen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ (nicht unbedingt alle verschieden), und es gilt $p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Der erste Beweis dieses Satzes stammt von Carl Friedrich Gauß und ist eine seiner herausragenden Leistungen. Einen Beweis werden wir später nachholen, wenn wir den Begriff der Stetigkeit eingeführt haben. Beachte: Der Satz gilt nicht im Reellen, d.h. wenn überall $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt wird! Als Beispiel kann man $p(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, nehmen.

Außer Polynomfunktionen gibt es natürlich noch viele andere Funktionen. Wir werden später etwa noch die Exponentialfunktion und die Klasse der trigonometrischen Funktionen einführen. Aus zwei gegebenen Funktionen f und g mit passenden Definitionsmengen entstehen durch die üblichen Verknüpfungen neue Funktionen. Etwa definieren wir $f+g : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ für alle $x \in D$. Genauso lassen sich Differenzen und Produkte betrachten. Bei der Division $f/g : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ muss die Definitionsmenge mindestens um die Nullstellen von g auf $\tilde{D} = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ verkleinert werden.

Sind p, q Polynome, so sind auch $p \pm q$ und $p \cdot q$ wiederum Polynome. Im allgemeinen ist aber p/q mit $q \neq 0$ kein Polynom, sondern eine **rationale Funktion**.

Eine weitere Verknüpfung von Funktionen ist grundlegend, die Komposition bzw. Verkettung von Funktionen. Die Verkettung ist definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

d.h. es wird zunächst f ausgeführt, und dann auf das Ergebnis g angewandt. Man beachte, $g \circ f \neq f \circ g$! Dies sollte man sich an einem Beispiel klar machen.

Die Komposition einer Funktion mit ihrer „Umkehrfunktion“ spielt eine besondere Rolle.

Definition 3.8 Sei $f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow W \subseteq \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $g : \mathbb{C} \supseteq W \rightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Umkehrfunktion**, wenn

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in W \quad (3.2)$$

gilt. Wir verwenden die Notation $g = f^{-1}$.

Achtung: f^{-1} bedeutet hier die Umkehrfunktion, also Umkehrung bzgl. der Verkettung, und **nicht** die Funktion $\frac{1}{f}$ mit $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$, die Inversion bzgl. der Multiplikation.

Beispiel: Die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ ist $g(x) = \sqrt{x}$. Beachte, dass für $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}_{\geq 0}$ keine Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ existiert, da es zu jedem $x \in f(D)$ zwei Urbilder, $\pm\sqrt{x}$ gibt. Wir können also keine Funktion definieren, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften (3.2) erfüllt. Anschaulich ergibt sich die Umkehrfunktion zu einer reellen Funktion, durch Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden (siehe Abbildungen am Ende von Kapitel 4).

Besitzt eine Funktion f eine Umkehrfunktion g , so sind Gleichungen der Form $f(x) = y$ durch $x = g(f(x)) = g(y)$ nach x **auflösbar**. In diesem Zusammenhang mit der Umkehrbarkeit von Abbildungen/Funktionen nutzt man häufig drei Begriffe:

- Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **injektiv**, wenn für $x, y \in D$ aus $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$ folgt.
- Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt **surjektiv**, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ existiert mit $f(x) = y$.
- Eine Funktion $f : D \rightarrow W$, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heißt **bijektiv**.

Damit gilt für Funktionen f und g :

- $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D \implies f$ injektiv,
- $f(g(y)) = y$ für alle $y \in W \implies f$ surjektiv,
- $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in W \iff f$ bijektiv.

Letzteres besagt, dass f genau dann bijektiv ist, wenn f eine Umkehrfunktion besitzt. Jede Abbildung $f : D \rightarrow f(D)$ ist auf dem Bild natürlich surjektiv! Das heißt, dass jede injektive Abbildung $f : D \rightarrow f(D)$ eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ besitzt. Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion ist genau das Bild von f .

Beim obigen Beispiel der Normalparabel, d.h. $f(x) = x^2$, ist somit die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bijektiv. Betrachten wir aber $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist f zwar surjektiv, aber nicht injektiv; denn es gilt etwa $f(2) = f(-2)$, aber $2 \neq -2$. Andererseits ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv, da es zu $y = -2$ kein Urbild $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt. Um die Begriffe klar zu trennen, überlegen Sie sich, auf welchen Intervallen die Funktion $f : I \rightarrow J$ mit $f(x) = |x - 1| - 1$ diese Eigenschaften aufweist.

In Analogie zu den Begriffen für reelle Folgen nennen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ **monoton wachsend** (bzw. **monoton fallend**), falls für $x < y$ stets $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$) gilt. Wir sprechen von **strenger Monotonie**, wenn diese Bedingungen mit echten Ungleichungszeichen erfüllt sind. Mit diesem Begriff können wir eine Aussage über die Existenz einer Umkehrfunktion formulieren.

Satz 3.9 Sei $f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow f(I) \subseteq \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend auf einem Intervall I . Dann besitzt f eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ auf $f(I)$. Diese ist ebenfalls streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend.

Beweis: Wegen $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ gibt es zu jedem $y \in f(I)$ mindestens ein $x \in I$ mit $y = f(x)$. Wir müssen zeigen, dass es nicht mehr als ein x mit dieser Eigenschaft gibt. Wenn es aber x_1 und x_2 gibt mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2) = y$, so muss $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$ gelten, also wegen der strengen Monotonie $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_2) < f(x_1)$. In jedem Fall ist dies ein Widerspruch. Also gibt es zu jedem $y \in f(I)$ genau ein x mit $y = f(x)$ und wir definieren $f^{-1}(y) = x$. Die strenge Monotonie von f^{-1} zu zeigen, verbleibt als Übung. $\square$

3.2 Stetigkeit

Der Begriff der Stetigkeit lässt sich auf verschiedene Weisen einführen. Da wir die Konvergenz von Folgen ausführlich besprochen haben, benutzen wir Folgen für die Definition.

Definition 3.10 (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt $\hat{x} \in D$ **stetig**, wenn für alle Folgen (x_k) in D mit $x_k \rightarrow \hat{x}$, $k \rightarrow \infty$, stets auch $f(x_k) \rightarrow f(\hat{x})$, $k \rightarrow \infty$, gilt. f heißt **stetig auf D** , wenn f in jedem Punkt $\hat{x} \in D$ stetig ist.

Veranschaulicht bedeutet Stetigkeit von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dass der Graph keine „Sprünge“ hat.

Beispiel 3.11 (a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{C}$, ist stetig in jedem Punkt. Dies erkennt man aus der 2. Dreiecksungleichung $|f(x) - f(\hat{x})| = ||x| - |\hat{x}|| \leq |x - \hat{x}|$, indem man hier für x die gegen $\hat{x}$ konvergente Folge x_k einsetzt.

(b) Polynome $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ von der Form $p(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$, $x \in \mathbb{C}$, sind stetig auf $\mathbb{C}$. Dies folgt aus den Regeln für den Umgang mit konvergenten Folgen: Summe, Produkt und Vielfaches von konvergenten Folgen sind wieder konvergent!

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ ist in keinem Punkt stetig. Z.B. kann man zu einem irrationalen Punkt $\hat{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Folge (x_k) rationaler Zahlen finden, die gegen $\hat{x}$ konvergiert. Dann konvergieren die Funktionswerte $f(x_k) = 0$ gegen 0 und nicht gegen $f(\hat{x}) = 1$.

(d) $f(x) := \sqrt{x}$ ist auf $D := [0, \infty)$ stetig (insbesondere auch am Randpunkt $\hat{x} = 0$ der Definitionsmenge). Um dies zu zeigen, sei (x_k) eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $x_k \rightarrow \hat{x}$.

1. Fall: $\hat{x} = 0$. Dann ist $|\sqrt{x_k} - \sqrt{\hat{x}}| = \sqrt{x_k}$ und diese Folge konvergiert gegen 0, da (x_k) gegen Null konvergiert (einfacher Beweis mit ε und $N \in \mathbb{N}$).

2. Fall: $\hat{x} > 0$. Dann ist mit der 3. binomischen Formel

$$|\sqrt{x_k} - \sqrt{\hat{x}}| = \frac{|x_k - \hat{x}|}{\sqrt{x_k} + \sqrt{\hat{x}}} \leq \frac{|x_k - \hat{x}|}{\sqrt{\hat{x}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Bemerkungen:

- Eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn Real- und Imaginärteil $\operatorname{Re} f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Dies folgt aus der Beobachtung, dass eine Folge (z_k) komplexer Zahlen genau dann gegen $\hat{z} \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn sowohl Real- als auch Imaginärteile konvergieren: $\operatorname{Re} z_k \rightarrow \operatorname{Re} \hat{z}$ und $\operatorname{Im} z_k \rightarrow \operatorname{Im} \hat{z}$, $k \rightarrow \infty$.
- Der Begriff der Stetigkeit einer Funktion hängt insbesondere von der Definitionsmenge ab. So ist eine abschnittsweise gegebene Funktion wie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ x + 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

nach Definition stetig. Definieren wir aber f auf ganz $\mathbb{R}$, indem wir noch den Wert $f(0) = 0$ hinzunehmen, so ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unstetig.

Manchmal lässt sich eine Definitionslücke bei einer Funktion sinnvoll, d.h. stetig, ergänzen, wie etwa bei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

durch $f(0) = 0$. Allgemein definiert man: Eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq D \setminus \{\hat{z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **stetig ergänzbar** oder **stetig fortsetzbar**, wenn es ein $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass die Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{für } z \in D \setminus \{\hat{z}\}, \\ c, & \text{für } z = \hat{z}. \end{cases}$$

stetig ist. Was muss man also tun, um dieses c zu bestimmen (falls es existiert)? Man muss für eine beliebige (!) Folge $z_k \rightarrow \hat{z}$ mit $z_k \neq \hat{z}$ zeigen, dass die Bildfolge $(f(z_k))_k$ konvergiert und der Grenzwert nicht von der gewählten Folge $(z_k)_k$ abhängt. Dann setzt man $c = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k)$.

Satz 3.12 (Regeln)

Sind $f, g : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $\hat{x} \in D$, so auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\bar{f}$ und f/g (letzteres nur auf Mengen mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$).

Benutzt wird dabei:

Lemma 3.13 Ist $g : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $\hat{x} \in D$ und $g(\hat{x}) \neq 0$, so gibt es $\varepsilon > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - \hat{x}| \leq \varepsilon\}$.

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis. Wäre die Aussage falsch, so würde es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ geben mit $|x - \hat{x}| \leq \varepsilon$ und $g(x) = 0$. Wähle nun speziell nacheinander $\varepsilon = 1/k$ für $k = 1, 2, \dots$, und benenne das zugehörige x mit x_k . Dann ist $x_k \in D$, $|x_k - \hat{x}| \leq 1/k$ und $g(x_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert (x_k) gegen $\hat{x}$, und aus der Stetigkeit von g in $\hat{x}$ folgt $0 = g(x_k) \rightarrow g(\hat{x})$, also $g(\hat{x}) = 0$, ein Widerspruch. $\square$

Damit sind alle rationalen Funktionen, also Funktionen der Form $f(x) = p(x)/q(x)$, wobei p und q Polynome sind, stetig in allen Punkten $\hat{x}$, an denen $q(\hat{x}) \neq 0$ ist.

Auch die Komposition von zwei stetigen Funktionen ist wieder stetig.

Satz 3.14 Sei $f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $\hat{x} \in D$ und $g : \mathbb{C} \supseteq f(D) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $f(\hat{x})$. Dann ist auch $g \circ f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $\hat{x}$.

Der **Beweis** folgt sofort aus der Definition: Wenn $x_k \rightarrow \hat{x}$, dann wegen der Stetigkeit von f auch $f(x_k) \rightarrow f(\hat{x})$ und wegen der Stetigkeit von g schließlich $g(f(x_k)) \rightarrow g(f(\hat{x}))$. $\square$

Eine Zwischenstufe auf dem Weg zur Differenzierbarkeit ist die Lipschitz-Stetigkeit, die sich bei reellen Funktionen schön veranschaulichen lässt.

Definition 3.15 (*Lipschitz-Stetigkeit*)

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **lipschitz-stetig** auf D , falls es $c > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante c heißt **Lipschitzkonstante**.

Anschaulich bedeutet die Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dass alle Sekantensteigungen (vom Betrag her) nicht größer als eine feste Zahl $c > 0$ sind. Ganz einfach ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 3.16 Jede auf D lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

Beweis: Sei $x \in D$ und (x_k) eine gegen x konvergente Folge in D . Die Konvergenz der Bilder von f folgt direkt aus der Lipschitzbedingung $|f(x_k) - f(x)| \leq c |x_k - x| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. $\square$

Wir sehen also, dass Lipschitz-Stetigkeit eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit ist.

Beispiele 3.17

- (a) Sei $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$, $x \in [a, b]$. Dann ist $|f(x) - f(y)| = |(x + y)(x - y)| \leq (|x| + |y|) |x - y| \leq 2 \max\{|a|, |b|\} |x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$. Hier ist die Lipschitzkonstante also gegeben durch $c = 2 \max\{|a|, |b|\}$.
- (b) Auf ganz $\mathbb{R}$ hingegen ist die Funktion mit $f(x) = x^2$ **nicht** lipschitz-stetig: Dazu betrachten wir den Betrag des Quotienten (die Sekantensteigung) $|f(x) - f(y)| / |x - y| = |x + y|$. Ist dieser Ausdruck beschränkt für alle $x, y \in \mathbb{R}$? Natürlich nicht, denn wir können z.B. $x = 0$ und $y_k = k$ betrachten. Dann ist $|f(x) - f(y_k)| / |x - y_k| = k \rightarrow \infty$.
- (c) Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist auf $D = K[0, 1] \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ **nicht** lipschitz-stetig.¹ Wir betrachten wieder

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{1}{|xy|} \quad \text{für } x, y \in K[0, 1] \setminus \{0\}.$$

Hier können wir z.B. $x = 1$ und $y_k = 1/k$ nehmen. Für diese Wahl ist

$$|f(x) - f(y_k)| / |x - y_k| = k \rightarrow \infty.$$

Die folgende äquivalente Formulierung der Stetigkeit kommt ohne den Begriff der konvergenten Folge aus und wird deshalb oft benutzt.

¹Hier sei $K[0, 1]$ die abgeschlossene Kreisscheibe um 0 mit Radius 1.

Satz 3.18 und **Definition** ($\varepsilon - \delta$ Charakterisierung, Funktionslimes)

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $\hat{x} \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt (abhängig von f , $\hat{x}$ und ε) mit

$$|f(x) - f(\hat{x})| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - \hat{x}| \leq \delta.$$

Wir schreiben dafür wieder $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$. Etwas allgemeiner definieren wir den **Funktionslimes** $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = r$ durch:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - r| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |\hat{x} - x| \leq \delta \text{ und } x \neq \hat{x}.$$

Der Funktionslimes $r = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x)$ existiert genau dann, wenn r der Grenzwert von $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ aller konvergenten Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \rightarrow \hat{x}$ für $k \rightarrow \infty$ und $x_k \neq \hat{x}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis: (a) f erfülle die $\varepsilon - \delta$ -Bedingung. Wir müssen die Stetigkeit von f in $\hat{x}$ zeigen. Sei (x_k) in D mit $x_k \rightarrow \hat{x}$. Zu zeigen ist $f(x_k) \rightarrow f(\hat{x})$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $|f(\hat{x}) - f(z)| \leq \varepsilon$ für $|\hat{x} - z| \leq \delta$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|\hat{x} - x_k| \leq \delta$ für alle $k \geq N$. Für diese $k \geq N$ gilt dann auch $|f(x_k) - f(\hat{x})| \leq \varepsilon$.

(b) Sei f stetig in $\hat{x}$. Zu zeigen ist die $\varepsilon - \delta$ -Bedingung. Wir führen einen indirekten Beweis: Sei diese Bedingung verletzt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|\hat{x} - x| \leq \delta$, aber $|f(\hat{x}) - f(x)| > \varepsilon$. Wir wählen nun nacheinander $\delta = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$. Dann gibt es also zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in D$ mit $|\hat{x} - x_k| \leq \frac{1}{k}$ und $|f(x_k) - f(\hat{x})| > \varepsilon$. Also konvergiert (x_k) gegen $\hat{x}$, aber $f(x_k)$ nicht gegen $f(\hat{x})$.

Den Teil über den Funktionslimes beweist man genauso. $\square$

Bemerkungen:

- (a) Eine Funktion f ist also genau dann stetig in einer Stelle $\hat{x}$, wenn $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x}) = f(\lim_{x \rightarrow \hat{x}} x)$ gilt, d.h. f und $\lim$ dürfen vertauscht werden.
- (b) Die $\varepsilon - \delta$ Charakterisierung ist wie bei der Konvergenz: Zu **jedem** $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit Wird ε kleiner, so i.a. auch δ . Die Größe δ hängt dabei i.a. von ε , dem Punkt $\hat{x} \in D$ und natürlich auch von f ab.
- (c) Lässt sich δ unabhängig von $\hat{x}$ wählen, so heißt f **gleichmäßig stetig** auf D .
- (d) Analog zur Definition des Funktionslimes definieren wir auch $r = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ wenn der Grenzwert für alle Folgen (x_k) mit $x_k \rightarrow \infty$ existiert und alle diese Grenzwerte mit r übereinstimmen, oder – in äquivalenter Form –, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ gibt mit $|f(x) - r| \leq \varepsilon$ für all $x \geq M$. Genauso definiert man $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (e) Man findet für reellwertige Funktionen auch die Notation $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, die bedeutet, dass in kleinen Umgebungen von x_0 alle Funktionswerte von f jede vorgegebene Schranke übersteigen. Trotz der Notation geht es hier aber nicht um einen Konvergenzbegriff, sondern um eine gewisse Form der Divergenz.

3.3 Eigenschaften reeller stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir *reellwertige* stetige Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf Intervallen $D = I \subseteq \mathbb{R}$. Wir haben bereits offene, abgeschlossene, beschränkte und unbeschränkte Intervalle betrachtet. Die auftretenden Begriffe (beschränkt, offen und abgeschlossen) definieren wir allgemein für Teilmengen M reeller Zahlen und halten fest, was das Maximum und das Minimum einer Menge M ist.

Definition 3.19 (a) $c > 0$ heißt **obere Schranke** (**untere Schranke**) einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn $c \geq x$ ($c \leq x$) für jedes $x \in M$ gilt.

(b) $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Zahl $c > 0$ gibt mit $|x| \leq c$ für alle Zahlen $x \in M$.

(c) Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq M$.

(d) Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **abgeschlossen**, wenn für jede Folge (x_k) , die in M liegt und gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, auch der Grenzwert x zu M gehört, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \in M$.

(e) $m \in M$ heißt **Maximum** (bzw. **Minimum**) von M , falls $x \leq m$ für alle $x \in M$ (bzw. $x \geq m$ für alle $x \in M$).

Nicht für jede beschränkte Menge existieren Maximum oder Minimum. Man betrachte z.B. das offene Intervall $M = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, das weder Maximum noch Minimum besitzt; denn die Zahlen 1 und 0 liegen nicht in M ! Hier spielen die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen, etwa die Intervalle $[a, b]$, eine entscheidende Rolle. Teilmengen reeller Zahlen, die die beiden Eigenschaften beschränkt und abgeschlossen aufweisen, nennt man „kompakt“.

Lemma 3.20 Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, beschränkte und abgeschlossene (also kompakte) Teilmenge von $\mathbb{R}$, so existieren $x_+, x_- \in M$ mit

$$x_+ = \max M \quad \text{und} \quad x_- = \min M.$$

Beweis: Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_n$ in M und $(y_n)_n$ in $\mathbb{R}$ rekursiv: Sei $x_1 \in M$ beliebig und $y_1 \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von M , d.h. insbesondere $y_1 \geq x_1$. Sei c der Punkt in der Mitte zwischen y_1 und x_1 , also $c = \frac{1}{2}[y_1 + x_1]$. Nun können zwei Fälle eintreten:

1. Fall: c ist obere Schranke von M . Setze dann $y_2 := c$ und $x_2 = x_1$. In diesem Fall gilt $y_2 - x_2 = \frac{1}{2}[y_1 - x_1]$.
2. Fall: c ist keine obere Schranke von M . Dann gibt es $x_2 \in M$ mit $x_2 > c$. Setze $y_2 = y_1$. In diesem Fall gilt $y_2 - x_2 \leq y_1 - c = \frac{1}{2}[y_1 - x_1]$.

In jedem Fall gilt also $0 \leq y_2 - x_2 \leq \frac{1}{2}[y_1 - x_1]$ und $y_2 \leq y_1, x_2 \geq x_1$. So fahren wir fort: Wir setzen $c = \frac{1}{2}[y_2 + x_2]$, machen die Fallunterscheidung, u.s.w. Damit haben wir zwei Folgen $(x_n)_n$ in M und $(y_n)_n$ in $\mathbb{R}$ konstruiert, so dass (x_n) monoton steigend und (y_n) monoton fallend ist und so, dass alle y_n obere Schranken von M sind und

$$0 \leq y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}[y_n - x_n]$$

gilt für alle $n = 1, 2, 3, \dots$. Aus dieser Gleichung folgt sofort, wenn wir sie mehrmals hintereinander anwenden:

$$0 \leq y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} [y_1 - x_1] \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \dots,$$

und daher $y_n - x_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Da beide Folgen (x_n) und (y_n) monoton und beschränkt sind, so sind sie konvergent, d.h. $x_n \rightarrow x_+$, $n \rightarrow \infty$, und $x_+ \in M$. Wegen $y_n - x_n \rightarrow 0$ folgt auch $y_n \rightarrow x_+$. Wir zeigen, dass dieses $x_+ \in M$ ein Maximum ist, d.h. dass $x_+ \geq x$ für jedes $x \in M$. Sei $x \in M$ beliebig. Da y_n eine obere Schranke ist, gilt für alle n :

$$x \leq y_n = \underbrace{y_n - x_n}_{\rightarrow 0} + x_n$$

und für $n \rightarrow \infty$ folgt, dass $x \leq x_+$ ist. Für die Existenz des Minimums argumentieren wir analog. $\square$

Satz 3.21 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen (also kompakt) und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das Bild $f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$ (also ebenfalls kompakt), und es existieren Maximum und Minimum von $f(D)$. Das heißt, es gibt $x_+, x_- \in D$ mit

$$f(x_+) = \max\{f(x) : x \in D\} \quad \text{und} \quad f(x_-) = \min\{f(x) : x \in D\},$$

d.h. $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$ für alle $x \in D$. Ohne die drei Eigenschaften „Abgeschlossenheit von D “, „Beschränktheit von D “ und „Stetigkeit von f “ stimmt die Aussage im Allgemeinen nicht mehr.

Beweis: Angenommen, $f(D)$ sei nicht beschränkt. Z.B. sei $f(D)$ nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge (x_k) in D mit $f(x_k) \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$. Da D kompakt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (Satz 2.15) eine konvergente Teilfolge $x_{k_j} \rightarrow x$, $j \rightarrow \infty$, und der Grenzwert x liegt in der abgeschlossenen Menge D . Aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_{k_j}) \rightarrow f(x)$, ein Widerspruch zu $f(x_{k_j}) \rightarrow \infty$. Also ist $f(D)$ beschränkt. Der Beweis der Abgeschlossenheit geht ganz ähnlich und verbleibt als Übung. $\square$

Als wichtige Konsequenz ergibt sich nun der Zwischenwertsatz.

Satz 3.22 (Zwischenwertsatz von Bolzano)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\min\{f(x) : a \leq x \leq b\} \leq \gamma \leq \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}.$$

Dann gibt es (mindestens) ein $\hat{x} \in [a, b]$ mit $f(\hat{x}) = \gamma$.

Beweis: Da $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, gibt es $x_+, x_- \in [a, b]$ mit $f(x_-) = \min\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, sowie $f(x_+) = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ (Satz 3.21). Wir unterscheiden nun drei Fälle, $x_- = x_+$, $x_- < x_+$, $x_- > x_+$. Im ersten Fall $x_- = x_+$ ist f konstant, daher $f(x_-) = \gamma = f(x_+)$ und $\hat{x} = x_- = x_+$ leistet das Gewünschte.

Sei nun $x_- < x_+$. Wir definieren $A := \{x \in [x_-, x_+] : f(x) \leq \gamma\} \subseteq [a, b]$. Dann ist A eine nichtleere (da $x_- \in A$) beschränkte Teilmenge von $[a, b]$. Wir zeigen nun, dass A auch abgeschlossen, also kompakt, ist. Dazu betrachte eine Folge (x_n) in A , die gegen $\tilde{x} \in [a, b]$ konvergiert. Dann ist

$f(x_n) \leq \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x_n) \rightarrow f(\tilde{x})$. Deshalb ist auch $f(\tilde{x}) \leq \gamma$, d.h. $\tilde{x} \in A$. Also ist A kompakt.

Aus Lemma 3.20 ergibt sich nun weiter, dass ein $\hat{x} \in A$ existiert mit $\hat{x} \geq x$ für alle $x \in A$. Wir wissen $f(\hat{x}) \leq \gamma$, da $\hat{x} \in A$ ist. Nun definieren wir die Folge $x_n = \hat{x} + 1/n$. Dann konvergiert (x_n) gegen $\hat{x}$. Wegen $x_+ \notin A$ ist $x_n \in [x_-, x_+]$ für große n . Wegen $x_n > \hat{x}$ und der Maximalität von $\hat{x}$ ist $x_n \notin A$. Dies bedeutet $f(x_n) > \gamma$. Die Stetigkeit von f impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x})$, also $f(\hat{x}) \geq \gamma$. Zusammen mit der ersten Ungleichung folgt $f(\hat{x}) = \gamma$.

Im dritten Fall $x_- > x_+$ setzt man $A = \{x \in [x_+, x_-] : f(x) \geq \gamma\}$ und verfährt genauso. $\square$

Der Zwischenwertsatz gibt uns die Möglichkeit, die Existenz von Nullstellen einer stetigen Funktion zu klären und deren Lage einzugrenzen.

Korollar 3.23 (Nullstellensatz) Sei $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gibt es (mindestens) eine Nullstelle von f in (a, b) .

Beispiel: Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Dies erkennen wir aus dem Nullstellensatz; denn sei p ein Polynom ungeraden Grades n mit positivem höchstem Koeffizienten $a_n > 0$. Dann ist $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, also $p(-a)p(a) < 0$ für hinreichend große $a > 0$.

Bisher haben wir die Umkehrfunktionen noch nicht bzgl. der Stetigkeit diskutiert. Mit dem Zwischenwertsatz ergibt sich ein überraschender Zusammenhang zwischen Monotonie und Stetigkeit (vgl. auch Satz 3.9):

Satz 3.24 Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall I streng monoton wachsend oder fallend. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ streng monoton wachsend bzw. fallend und stetig.

Beweis: Sei f streng monoton wachsend und $y_0 = f(x_0) \in f(I)$. Der Nachweis, dass auch f^{-1} streng monoton wachsend ist, wurde in Beweis zu Satz 3.9 geführt.

Wir zeigen die Stetigkeit von f^{-1} . Für eine Folge $(y_n) \subseteq f(I)$ mit $y_n \rightarrow y_0$, $n \rightarrow \infty$. Ist $x_0 \in I$ im Inneren des Intervalls I so wählen wir $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$ gilt. Da f streng monoton wachsend ist, folgt

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon).$$

Ist nun $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so dass $y_n \in (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ für $n \geq N$ gilt. Nach dem Zwischenwertsatz ist $y_n \in f(I)$ für jedes $n > N$ und wir definieren $x_n = f^{-1}(y_n)$. Mit der Monotonie der Umkehrfunktion ergibt sich

$$f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y_n) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon))$$

bzw. $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ für jedes $n \geq N$. Da diese Einschachtelung für jeden hinreichend klein gewählten Wert ε gilt, folgt $f^{-1}(y_n) = x_n \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$, d.h. f^{-1} ist stetig in y_0 . Im Fall, dass x_0 auf dem Rand von I liegt betrachten wir entsprechend einseitige Folgen mit $y_n \geq y_0$ und x_0 statt $x_0 - \varepsilon$ oder $y_n \leq y_0$ und x_0 statt $x_0 + \varepsilon$. $\square$

Nachtrag Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 3.7):

Die Funktion $f(x) := |p(x)|$, $x \in \mathbb{C}$, ist stetig und reellwertig. Wir zeigen zuerst die Existenz eines Minimums $x_0 \in \mathbb{C}$ von f auf $\mathbb{C}$ und danach, dass $f(x_0) = 0$ ist.

Ohne Einschränkung können wir $a_n = 1$ annehmen, d.h. $p_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Wir setzen weiterhin

$C = \max \left\{ 1, \sqrt[n]{2f(0)}, 2 \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right\}$. Für $|x| \geq C$ ist dann

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|^n \left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} \right| \geq |x|^n \left[1 - \frac{1}{|x|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right] \\ &\geq |x|^n \left[1 - \frac{1}{|x|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right] \geq |x|^n \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} |x|^n \geq f(0). \end{aligned}$$

Daher brauchen wir auf der Suche nach einem Minimum nur die Kreisscheibe $K[0, C] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq C\}$ zu betrachten. Diese ist beschränkt und abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit einer Menge definiert man für Mengen in $\mathbb{C}$ genauso wie für Mengen in $\mathbb{R}$. Der Satz 3.21 gilt analog auch für beschränkte, abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$. Also gibt es eine Minimalstelle $x_0 \in K[0, C] \subseteq \mathbb{C}$ der stetigen Funktion f auf der beschränkten, abgeschlossenen Kreisscheibe $K[0, C]$. Wir setzen $g(x) = f(x + x_0) = |p(x + x_0)|$, $x \in \mathbb{C}$. Dann ist $x = 0$ Minimalstelle von g .

Wir führen einen indirekten Beweis, um $g(0) = 0$ zu zeigen. Angenommen, $g(0) > 0$, d.h. $p(x_0) \neq 0$. Das Polynom $p(x + x_0)$ vom Grad n können wir in der Form schreiben

$$p(x + x_0) = b_0 + b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \dots + b_n x^n,$$

wobei $m \in \{1, \dots, n\}$ der kleinste Index ist mit $b_m \neq 0$. Außerdem ist $b_0 = p(x_0) \neq 0$. Die Gleichung $b_0 + b_m x^m = 0$, d.h. $x^m = -b_0/b_m$, hat eine Lösung z , wie wir in Abschnitt 1.4 gesehen haben. Insbesondere folgt $m < n$; denn wir hatten ja angenommen, dass $p(x + x_0)$ keine Nullstellen hat. Für $\varepsilon > 0$ ist dann

$$\begin{aligned} g(\varepsilon z)^2 &= |p(\varepsilon z + x_0)|^2 = \left| b_0 + \underbrace{b_m \varepsilon^m z^m}_{=-b_0 \varepsilon^m} + b_{m+1} \varepsilon^{m+1} z^{m+1} + \dots + b_n \varepsilon^n z^n \right|^2 \\ &= |b_0|^2 \left| 1 - \varepsilon^m \left[1 - \frac{b_{m+1}}{b_0} \varepsilon z^{m+1} - \dots - \frac{b_n}{b_0} \varepsilon^{n-m} z^n \right] \right|^2 \\ &= |b_0|^2 (1 + \varepsilon^{2m} |\dots|^2 - 2 \varepsilon^m \operatorname{Re} [\dots]). \end{aligned}$$

Da $m < n$ gilt, ist für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ in der letzten Abschätzung $\operatorname{Re} [\dots] \geq \frac{1}{2}$ und $|\dots| \leq 2$, also

$$g(\varepsilon z)^2 \leq |b_0|^2 (1 + 4 \varepsilon^{2m} - \varepsilon^m) = |b_0|^2 [1 - \underbrace{\varepsilon^m (1 - 4 \varepsilon^m)}_{>0}] < |b_0|^2 = g(0)^2,$$

d.h. $g(\varepsilon z) < g(0)$, und dies ist ein Widerspruch, da 0 Minimalstelle von g ist. $\square$

4 Reihen

In diesem Kapitel wollen wir erklären, was die Addition *unendlich* vieler Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$ bedeutet. Das folgende Beispiel zeigt, dass man sich ohne eine genaue Definition in Widersprüche verstricken kann.

Beispiel 4.1 Wir wollen die Zahlen $a_k = (-1)^{k+1}/k$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ addieren. Wir nennen den Wert s und addieren dann $s/2$:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} s = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{9} & -\frac{1}{10} & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{12} & +\frac{1}{13} & -\frac{1}{14} & \cdots \\ \frac{1}{2}s = & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & & +\frac{1}{10} & & -\frac{1}{12} & & +\frac{1}{14} & & \cdots \\ \hline \frac{3}{2}s = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{9} & & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{13} & & \cdots \end{array}$$

Die letzte Reihe scheint wieder s zu sein, denn alle Glieder kommen vor – allerdings in veränderter Reihenfolge! Wäre der rechte Ausdruck ebenfalls s , so würde aus $3s/2 = s$ ja $s = 0$ folgen und dies kann nicht sein, denn mit der Klammerung

$$s = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=1/2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{>0} + \cdots$$

folgt $s > 1/2 > 0$.

An diesem Beispiel sehen wir, dass es i.A. bei unendlichen Reihen – im Gegensatz zu endlichen Summen – auf die **Reihenfolge** der Summation ankommt.

4.1 Definition und Beispiele

Um die Zahlen a_1, a_2, a_3 , u.s.w. zu addieren, bilden wir ja nacheinander die (endlichen) Summen $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3$, u.s.w. Damit wird eine neue Folge definiert, die Folge der „Partialsummen“:

Definition 4.2 (Reihe)

Sei (a_n) eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge. Die endlichen Summen

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

heißen **Partialsummen** und die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen heißt (**unendliche**) **Reihe** mit den Gliedern a_k .

Wir schreiben statt $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_{n=1}^\infty$ kürzer nur $\left(\sum_{k=1}^\infty a_k\right)$.

Der **Summationsindex** k kann selbstverständlich auch anders bezeichnet werden und ab 0 oder jeder anderen ganzen Zahl beginnen.

Eine Reihe $\left(\sum_{k=1}^\infty a_k\right)$ heißt **beschränkt** (bzw. **monoton oder konvergent oder divergent**), wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$ beschränkt (bzw. monoton, konvergent, divergent) ist. Ist $\left(\sum_{k=1}^\infty a_k\right)$ konvergent, so bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Man beachte den Unterschied in der Bezeichnung: $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ bezeichnet die Reihe, also die Folge der Partialsummen, und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{C}$ ihren Grenzwert, falls sie konvergiert. Wir wiederholen die Definition der Konvergenz:

Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ konvergiert genau dann gegen ein $s \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - s \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Beispiele 4.3

(a) Die **geometrische Reihe** $\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)$ mit $q \in \mathbb{C}$ konvergiert für $|q| < 1$, und es ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$. Sie strebt gegen ∞ für $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, und divergiert für alle anderen Werte.

Beweis: Wir können die Partialsummen explizit ausrechnen: Ist $q \neq 1$, so ist

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Ist $|q| < 1$, so konvergiert (q^n) gegen Null, also $s_n \rightarrow 1/(1-q)$. Ist $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$, so strebt (q^n) gegen ∞ . Für $q = 1$ ist $s_n = n+1$, und dies strebt auch gegen ∞ . Für $q \notin \mathbb{R}$ und $|q| \geq 1$, verweisen wir auf Beispiel 4.6 unten. $\square$

(b) Die **harmonische Reihe** $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)$ strebt gegen ∞ , und allgemeiner:

(c) Die **allgemeine harmonische Reihe** $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ konvergiert für $\alpha > 1$ und strebt gegen ∞ für $\alpha \leq 1$.

Beweis mit dem **Verdichtungskriterium**: Sei zunächst $\alpha > 1$. Wir betrachten zunächst nur Partialsummen S_{2^N} für 2-er Potenzen und fassen die Summanden geeignet zusammen. Wir stellen es zunächst am Beispiel dar:

$$S_{16} = S_{2^4} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha}}_{1 \text{ Glied}} + \underbrace{\left[\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right]}_{2 \text{ Glieder}} + \underbrace{\left[\frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{8^\alpha}\right]}_{4 \text{ Glieder}} + \underbrace{\left[\frac{1}{9^\alpha} + \dots + \frac{1}{16^\alpha}\right]}_{8 \text{ Glieder}}.$$

Jede eckige Klammer wird jetzt durch ihr größtes Element abgeschätzt. Dies führen wir jetzt allgemein durch und schreiben

$$S_{2^N} = 1 + \sum_{k=2}^{2^N} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{m=1}^N \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{(2^{m-1} + j)^\alpha} \right].$$

Wir haben also $k = 2, \dots, 2^N$ in die Form $k = 2^{m-1} + j$ zerlegt mit einem $m \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, 2^{m-1}\}$. Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$. Dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 2^N$. Wegen der Positivität

der Summanden ist dann

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2N} \leq 1 + \sum_{m=1}^N \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{2^{(m-1)\alpha}} \right] = 1 + \sum_{m=1}^N 2^{(m-1)(1-\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^m \leq 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^m = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)}. \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(S_n)_n$ beschränkt. Da sie auch monoton steigend ist, so konvergiert sie nach dem Monotoniekriterium.

Für $\alpha \leq 1$ schätzen wir anders herum ab:

$$\begin{aligned} S_{2N} &= 1 + \sum_{m=1}^N \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{(2^{m-1} + j)^\alpha} \right] \geq 1 + \sum_{m=1}^N \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{(2^{m-1} + 2^{m-1})^\alpha} \right] \\ &= 1 + \sum_{m=1}^N \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{2^{m\alpha}} \right] = 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N 2^{m(1-\alpha)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N (2^{1-\alpha})^m \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt gegen ∞ , da $2^{1-\alpha} \geq 1$.

(d) Die **Exponentialreihe** $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)$ konvergiert, und der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ wird mit e (Eulersche Zahl) bezeichnet. Weiter unten werden wir sie noch verallgemeinern.

Beweis: Zunächst erkennen wir wieder die Monotonie der Reihe. Dann gilt $k! \geq 2^{k-1}$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$ (Beweis durch vollständige Induktion). Damit ist

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = 2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{2}{1 - 1/2}.$$

Daher ist die Folge (s_n) auch beschränkt und somit konvergent.

4.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Wir haben eine ganze Reihe von Konvergenzkriterien für Folgen kennengelernt. Diese wenden wir jetzt auf die Folge der Partialsummen an und erhalten direkt den folgenden Satz:

Satz 4.4 (Übertragung der Folgenkriterien auf Reihen)**(a) Linearität:**

Konvergieren $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ und $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so konvergieren auch $\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)\right)$ und $\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k)\right)$, und es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

(b) Monotoniekriterium:

Es seien a_k **reell** und $a_k \geq 0$ für alle $k \geq k_0$. Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ konvergiert, falls die Folge der Partialsummen beschränkt ist, d.h. falls es $c > 0$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq c \quad \text{für alle } n.$$

(c) Majorantenkriterium:

Sind $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ und $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$ Reihen **reeller** Zahlen mit $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle k . Dann gilt:

(i) Konvergiert $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$, so auch $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

(ii) Strebt $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ gegen ∞ , so auch $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$.

Satz 4.5 Falls $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ konvergiert, so:

(a) ist (a_k) eine Nullfolge. (Die Umkehrung gilt aber nicht, man betrachte nur die harmonische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)$!)

(b) existiert ein $c > 0$ mit $|\sum_{k=1}^n a_k| \leq c$ für alle n .

Beweis: (a) Sei $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und $s_n \rightarrow s$, $n \rightarrow \infty$. Dann konvergiert $a_n = s_n - s_{n-1}$ gegen $s - s = 0$ für $n \rightarrow \infty$. Damit ist der Beweis schon beendet. Teil (b) folgt sofort aus Satz 2.6 (jede konvergente Folge ist beschränkt). $\square$

Beispiel 4.6 Wir betrachten noch einmal die geometrische Folge von Beispiel 4.3 (a). Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ gilt $|q^k| \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also kann die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)$ nach dem letzten Satz für $|q| \geq 1$ nicht konvergieren.

Wichtig ist auch das folgende Kriterium:

Satz 4.7 (Leibniz - Kriterium)

Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle, positive und monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die **alternierende Reihe** $\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k\right)$. Für die n -te Partialsumme s_n und den Grenzwert s gilt die Fehlerabschätzung:

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Brechen wir also bei der Berechnung der Reihe bei a_n ab, so ist der Fehler höchstens so groß, wie der erste nicht berücksichtigte Summand a_{n+1} .

Beweis: Wir betrachten die Teilfolgen von (s_n) , die aus geraden Indizes n und aus ungeraden Indizes bestehen. Es ist $s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq 0$ und $s_{2m+1} - s_{2m-1} = -a_{2m} + a_{2m+1} \leq 0$, also ist (s_{2m}) monoton wachsend und (s_{2m+1}) monoton fallend. Außerdem gilt

$$s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} \geq 0. \quad (4.1)$$

Hieraus folgt die Ungleichungskette

$$s_2 \leq \dots \leq s_{2m-2} \leq s_{2m} \leq s_{2m+1} \leq s_{2m-1} \leq \dots \leq s_1.$$

Also sind (s_{2m}) und (s_{2m+1}) nicht nur monoton, sondern auch beschränkt, also konvergent. Mit $s_{2m} \rightarrow s$ und $s_{2m+1} \rightarrow s'$ folgt aus (4.1), dass $s - s' = 0$ wegen $a_{2m+1} \rightarrow 0$. Damit ist die Konvergenz der gesamten Folge (s_n) gezeigt.

Aus der Ungleichungskette folgt $s_{2m} \leq s \leq s_{2m+1}$ und daher $|s_{2m} - s| \leq s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1}$. Außerdem ist wegen $s_{2m+2} \leq s \leq s_{2m+1}$ auch $|s_{2m+1} - s| \leq s_{2m+1} - s_{2m+2} = a_{2m+2}$. Dies bedeutet aber gerade, dass $|s_n - s| \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Als Beispiel dient natürlich die alternierende harmonische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$, welche im Gegensatz zur harmonischen Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)$ konvergiert.

Am Beispiel 4.1 haben wir gesehen, dass es i.A. bei unendlichen Reihen auf die Reihenfolge der Summation ankommt. Dies ist natürlich unschön. Bei einer verstärkten Bedingung an die Konvergenz kann dieses Problem nicht auftreten. Daher ist die folgende Definition wichtig:

Definition 4.8 Eine (reelle oder komplexe) Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ heißt **absolut konvergent**, wenn die reelle Reihe mit nicht-negativen Gliedern $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)$ konvergiert.

Satz 4.9 (a) Falls eine Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinn. Absolute Konvergenz ist also stärker als normale Konvergenz.

(b) Falls die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ absolut konvergiert, kann die Reihenfolge der Summation beliebig vertauscht werden, ohne dass sich der Grenzwert ändert.

Beweis: (a) Wir zeigen dies nur für reelle Koeffizienten¹. Dazu zerlegen wir a_k in die Differenz von zwei nichtnegativen Zahlen: $a_k = a_k^+ - a_k^-$ mit $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$ und $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k^+ - \sum_{k=1}^n a_k^-.$$

Die beiden Summen auf der rechten Seite haben jeweils nichtnegative Summanden, sind also monoton wachsend. Außerdem gilt für alle n :

$$\sum_{k=1}^n a_k^{\pm} \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

da die letzten Partialsummen wegen der absoluten Konvergenz der Reihe durch den Grenzwert beschränkt sind. Daher konvergieren die Reihen

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+\right) \quad \text{und} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-\right)$$

und daher auch die Differenz $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$.

(b) Eine Umordnung von $\mathbb{N}$ wird durch eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ beschrieben. Dies bedeutet, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ genau ein $\varphi(k) \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varphi(k) \neq \varphi(j)$, falls $k \neq j$ (d.h. die Abbildung ist injektiv), und umgekehrt, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varphi(k) = n$ (d.h. die Abbildung ist surjektiv).

Zunächst nehmen wir an, dass $a_k \geq 0$ für alle k . Dann sind die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{und} \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$$

der ursprüngliche Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ und der umgeordneten Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}\right)$ beide monoton steigend. Außerdem konvergiert (s_n) gegen $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Halte jetzt $n \in \mathbb{N}$ fest. Dazu gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \subseteq \{1, \dots, m\}$. Daher ist

$$\tilde{s}_n \leq s_m \leq s.$$

Daher ist die Folge $(\tilde{s}_n)$ auch beschränkt, also konvergent: $\tilde{s}_n \rightarrow \tilde{s}$, und es gilt $\tilde{s} \leq s$. Umgekehrt gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \dots, n\} \subseteq \{\varphi(1), \dots, \varphi(m)\}$. Also ist auch $s_n \leq \tilde{s}_m \leq \tilde{s}$ und

¹für komplexe Koeffizienten müssen Real- und Imaginärteil separat betrachtet werden.

daher folgt für $n \rightarrow \infty$ die Ungleichung $s \leq \tilde{s}$. Dies beweist den Umordnungssatz für Reihen mit nichtnegativen Gliedern.

Sei jetzt a_k beliebig (und reell). Dann schreiben wir wie in Teil (a) die Glieder in der Form $a_k = a_k^+ - a_k^-$ mit der gleichen Bedeutung von $a_k^\pm$. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ konvergieren wieder die Reihen $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pm\right)$, die aus nicht-negativen Summanden bestehen. Nach dem soeben Bewiesenen konvergieren $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}^\pm\right)$ gegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pm$ und daher auch die Differenz beider Reihen gegen die Differenz des Grenzwertes. $\square$

Als Beispiel nennen wir die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)$, die für alle $|q| < 1$ absolut konvergiert.

Absolute Konvergenz wird eigentlich immer mit dem Monotoniekriterium von Satz 4.4 bewiesen: Dazu muss die Existenz einer Zahl $c > 0$ gezeigt werden mit

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Dies wird in den beiden folgenden wichtigen Kriterien benutzt:

Satz 4.10 (*Quotientenkriterium, 1. Fassung*)

Gegeben sei die (reelle oder komplexe) Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$. Es gebe $q < 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Dann konvergiert die Reihe absolut.

Gilt dagegen $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$ für alle $k \geq k_0$, so divergiert die Reihe.

Beweis: Sei zunächst $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q < 1$ für alle $k \geq k_0$. Wir zeigen Konvergenz der reellen Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)$ mit dem Monotoniekriterium. Aus der Ungleichung $|a_{k+1}| \leq q |a_k|$ für alle $k \geq k_0$ folgt durch vollständige Induktion die Ungleichung: $|a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$ für alle $k \geq k_0$. Daher ist für $n \geq k_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k| &= \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{k=k_0}^n q^{k-k_0} \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \frac{|a_{k_0}|}{1-q}. \end{aligned}$$

Also ist die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)$ monoton wachsend und beschränkt, daher konvergent.

Ist dagegen $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$ für alle $k \geq k_0$, so gilt (wiederum durch Induktion), dass $|a_k| \geq |a_{k_0}|$ für alle $k \geq k_0$. Daher kann die Folge (a_k) nicht gegen 0 konvergieren, was ja eine *notwendige* Bedingung für die Konvergenz der Reihe ist. Also kann die Reihe nicht konvergieren. $\square$

Oft ist folgende Variante des Kriteriums nützlicher.

Satz 4.11 (*Quotientenkriterium, 2. Fassung*)

Gegeben sei die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ und $a_k \neq 0$ für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$. Es gebe ferner $q \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = q.$$

Ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut. Ist $q > 1$, so divergiert die Reihe.

Beweis: Sei etwa $q < 1$. Zu $\varepsilon = (1 - q)/2$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} - q\right| \leq \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Daher ist

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left|\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} - q + q\right| \leq \left|\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} - q\right| + q \leq \varepsilon + q = \frac{1 + q}{2}$$

für alle $k \geq k_0$. Daher ist das Q-Kriterium erfüllt mit $\tilde{q} = (1 + q)/2 < 1$. Genauso lässt sich der zweite Teil zeigen. $\square$

Bemerkungen: (a) Für $q = 1$ lässt sich nicht entscheiden, ob die Reihe konvergiert oder divergiert. (b) Für die Konvergenz reicht es **nicht** zu zeigen, dass der Quotient $|a_{k+1}|/|a_k|$ kleiner als 1 ist, es muss der Grenzwert kleiner als 1 sein! Als Beispiel kann man die divergente (!) Reihe $(\sum_{k=1}^{\infty} 1/k)$ nehmen. Auch hier ist jeder Quotient kleiner als 1 (der Grenzwert aber gleich 1).

Für Folgen, die Wurzeln oder andere Potenzen enthalten, ist das Quotientenkriterium oft nicht so günstig. Besser geeignet ist dann manchmal das folgende Kriterium.

Satz 4.12 (*Wurzelkriterium, 1. Fassung*)

Gegeben sei die (reelle oder komplexe) Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$. Es gebe $q < 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für alle $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe absolut.

Gilt dagegen $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für alle $k \geq k_0$, so divergiert die Reihe.

Beweis: Dieser verläuft ganz ähnlich wie der letzte, sogar etwas einfacher. Sei zunächst $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für alle $k \geq k_0$. Dann ist $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$ und daher

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^n q^k \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \frac{1}{1 - q}.$$

Dies impliziert wieder absolute Konvergenz der Reihe.

Ist $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für alle $k \geq k_0$, so folgt durch Potenzieren sofort $|a_k| \geq 1$, was wiederum impliziert, dass die Folge (a_k) nicht gegen Null konvergiert. Also kann die Reihe nicht konvergieren. $\square$

Satz 4.13 (Wurzelkriterium, 2. Fassung)

Gegeben sei die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$. Es gebe $q \in \mathbb{R}$ und mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$. Ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut. Ist $q > 1$, so divergiert die Reihe.

Wiederum sagt diese Folgerung nichts aus im Fall $q = 1$.

Beispiele 4.14 (a) Die harmonische Reihe divergiert, aber das Wurzel- und das Quotientenkriterium liefern jeweils $q = 1$. D.h. in diesem Fall versagen diese Kriterien.

(b) Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$ konvergiert, aber das Wurzel- und das Quotientenkriterium liefern wieder $q = 1$. Auch hier liefern Wurzel- und Quotientenkriterium keine Aussage.

(c) Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} k q^k\right)$ konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| > 1$ nach dem Wurzel- und Quotientenkriterium. Für $|q| = 1$ divergiert die Reihe, da kq^k keine Nullfolge ist.

(d) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ nach dem Q-Kriterium. (Hier haben wir $z^0 := 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ gesetzt.) Es ist nämlich

$$\frac{|z^{k+1}|}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z^k|} = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Das letzte Beispiel ist ein wichtiges Beispiel für eine **Potenzreihe**, auf die wir im nächsten Abschnitt ausführlich eingehen werden. Aus der Schule ist diese Funktion gut bekannt, allerdings nicht über diese Definition.

Definition 4.15 Die **Exponentialfunktion** ist für alle $z \in \mathbb{C}$ durch folgende Reihe definiert:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

In der rechten Form wird klar, dass $\exp(0) = 1$ ist, d.h. wie bei Polynomfunktionen gilt die Konvention bei Potenzreihen den im allgemeinen nicht definierten Ausdruck 0^0 gleich 1 zu setzen.

Um wesentliche Eigenschaften der Exponentialfunktion aus der Definition zu sehen, benötigen wir noch eine Aussage zum Produkt von absolut konvergenten Reihen.

Satz 4.16 (Cauchy Produkt)

Es seien $\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)$ und $\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ absolut konvergente Reihen. Sei ferner

$$c_m := \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m\right)$ absolut, und es ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}.$$

Wichtig ist hier, dass die Indizes ab 0 laufen. Durch eine geeignete Indexverschiebung können wir das immer erreichen.

Beweis: Wir betrachten die Partialsummen

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^n a_j \cdot \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j b_k \quad \text{und} \\ S'_n &= \sum_{m=0}^n c_m = \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=0}^m a_\ell b_{m-\ell} \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung konvergiert S_n gegen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Wir definieren die Mengen von Gitterpunkten

$$R_n := \{(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : j, k \in \{0, \dots, n\}\} \quad \text{und} \quad \Delta_n = \{(j, k) \in R_n : j + k \leq n\}.$$

(Skizzieren Sie die Mengen R_n und Δ_n für $n = 8$!). Dann können wir S_n und S'_n auch schreiben als

$$S_n = \sum_{(j,k) \in R_n} a_j b_k \quad \text{und} \quad S'_n = \sum_{(j,k) \in \Delta_n} a_j b_k.$$

Wir betrachten insbesondere den Fall gerader n , d.h. $n = 2m$ für $m \in \mathbb{N}$. (Ergänzen Sie in der Skizze die Menge R_m für $m = 4$!). Wir erkennen (wirklich?), dass $R_m \subseteq \Delta_{2m} \subseteq R_{2m}$. Also ist

$$\begin{aligned} |S_{2m} - S'_{2m}| &= \left| \sum_{(j,k) \in R_{2m} \setminus \Delta_{2m}} a_j b_k \right| \leq \sum_{(j,k) \in R_{2m} \setminus \Delta_{2m}} |a_j| |b_k| \\ &\leq \sum_{(j,k) \in R_{2m} \setminus R_m} |a_j| |b_k| = \sum_{(j,k) \in R_{2m}} |a_j| |b_k| - \sum_{(j,k) \in R_m} |a_j| |b_k| \\ &= \sum_{j=0}^{2m} |a_j| \cdot \sum_{k=0}^{2m} |b_k| - \sum_{j=0}^m |a_j| \cdot \sum_{k=0}^m |b_k|. \end{aligned}$$

Für $m \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen Null. Da S_{2m} gegen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, so also auch S'_{2m} . Dies beendet den Beweis. $\square$

Satz 4.17 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

Es gilt

$$\boxed{\exp(x) \exp(y) = \exp(x+y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}.}$$

Beweis: Wir haben schon gezeigt, dass die Reihen für $\exp(x)$ und $\exp(y)$ absolut konvergent sind. Daher können wir den letzten Satz anwenden und haben:

$$\exp(x) \exp(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

mit

$$c_m = \sum_{\ell=0}^m \frac{x^\ell y^{m-\ell}}{\ell! (m-\ell)!} = \frac{1}{m!} \sum_{\ell=0}^m \underbrace{\frac{m!}{\ell! (m-\ell)!}}_{= \binom{m}{\ell}} x^\ell y^{m-\ell} = \frac{1}{m!} (x+y)^m$$

nach der binomischen Formel. Also ist

$$\exp(x) \exp(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (x+y)^m = \exp(x+y).$$

□

Hieraus erhalten wir viele Eigenschaften der Exponentialfunktion: Induktiv ergibt sich sofort

$\boxed{\exp(nx) = (\exp(x))^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{C}$. Setzen wir $\boxed{e := \exp(1)}$, so folgt $\exp(n) = e^n$ für

alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Definition ergibt sich $\boxed{\exp(0) = 1}$. Weiter ist $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) =$

$\exp(x) \exp(-x)$, also $\boxed{\exp(-x) = 1/\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Daraus bekommen wir $\boxed{\exp(n) = e^n}$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Formel $\boxed{\exp(r) = e^r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ folgt schließlich so: Ist $r = n/m$ mit $n \in \mathbb{Z}$

und $m \in \mathbb{N}$, so ist $(\exp(r))^m = \exp(mr) = \exp(n) = e^n$, also $\exp(r) = e^{n/m} = e^r$. Damit ist gezeigt, dass die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Erweiterung der Funktion $r \mapsto e^r$ von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{C}$ ist und die übliche Notation $\exp(x) = e^x$ für die Exponentialfunktion ist angebracht.

Die folgende Beziehung zeigt die Äquivalenz zwischen zwei möglichen Definitionen der Exponentialfunktion:

Satz 4.18 Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Beweis: Sei zunächst $x > 0$. Die Existenz des rechten Limes ist für $x = 1$ schon gezeigt worden (Beispiel 2.20). Für $x > 0$ geht er ganz genauso. Dann ist mit der binomischen Formel

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{x^j}{n^j} = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)! n^j} \frac{x^j}{j!}.$$

Jetzt ist

$$\frac{n!}{(n-j)! n^j} = \frac{(n-j+1) \cdots n}{\underbrace{n \cdots n}_{j \text{ Faktoren}}} \leq 1, \quad \text{also} \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} =: s_n.$$

Wir wählen jetzt $m \in \mathbb{N}$ beliebig und halten es fest. Für $n > m$ ist dann

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \sum_{j=0}^m \frac{(n-j+1) \cdots n}{n \cdots n} \frac{x^j}{j!} =: \tilde{s}_n, \quad \text{also}$$

$$\tilde{s}_n \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq s_n.$$

Wir halten m immer noch fest und lassen n gegen ∞ laufen. Dann konvergiert $\tilde{s}_n$ gegen s_m und auch die beiden anderen Folgen konvergieren. Daher haben wir gezeigt:

$$s_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x).$$

Dies gilt für jedes m . Lassen wir jetzt m noch gegen ∞ laufen, so konvergiert auch die untere Schranke gegen $\exp(x)$. Damit ist die Gleichheit gezeigt.

Jetzt betrachten wir noch den Fall $x < 0$. Wegen $\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \frac{x^2}{n^2}$ ist

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{(-x)}{n}\right)^n}.$$

Der Nenner auf der rechten Seite konvergiert gegen $\exp(-x)$, da $-x > 0$. Den Zähler schließen wir mit der Bernoullischen Ungleichung ein:

$$1 \geq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \frac{x^2}{n^2} = 1 - \frac{x^2}{n},$$

und die untere Schranke strebt gegen 1 für $n \rightarrow \infty$. Also konvergiert der Zähler gegen 1, also

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{\exp(-x)}.$$

Im Beispiel 4.17 haben wir $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ gezeigt, und dies liefert die Behauptung. $\square$

4.3 Potenzreihen

Potenzreihen sind Reihen der Form

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei $z \in \mathbb{C}$ die Rolle einer Variablen einnimmt. Der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ der Reihe wird also als Funktion der komplexen Variable z betrachtet. $a_k \in \mathbb{C}$ heißen die **Koeffizienten** und $z_0 \in \mathbb{C}$ der **Entwicklungspunkt** der Reihe. Die Partialsummen haben die Form $S_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k (z - z_0)^k$, sind also Polynome m -ten Grades in der Variablen z .

Der wichtigste Spezialfall ist $z_0 = 0$, d.h. Potenzreihen der Form:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right).$$

Die Frage der Konvergenz klärt der folgende fundamentale Satz:

Satz 4.19 (von Cauchy und Hadamard)

Zu jeder Potenzreihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k\right)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, der **Konvergenzradius** der Potenzreihe (auch $r = 0$ oder $r = \infty$ sind zugelassen) und den zugehörigen **Konvergenzkreis** $K = K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq \mathbb{C}$ bzw. $K = \{z_0\}$ im Fall $r = 0$ und $K = \mathbb{C}$ im Fall $r = \infty$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Die Potenzreihe konvergiert **absolut** in K , d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < r$.
- (b) Die Potenzreihe **divergiert** für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > r$.
- (c) Die Funktion $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ ist stetig in K und sogar Lipschitz-stetig in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $K[z_0, \hat{r}] = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \hat{r}\}$ für jedes $\hat{r} < r$.

Beweis: (a), (b) Wir zeigen zunächst: Wenn die Reihe für z^* gewöhnlich konvergiert, so konvergiert die Reihe absolut für z mit $|z - z_0| < |z^* - z_0|$, d.h. für alle z , die näher bei z_0 liegen als z^* . Die Aussage folgt aus dem Majorantenkriterium, denn aus der Konvergenz der Reihe für z^* folgt, dass die Folge $(a_k(z^* - z_0)^k)$ gegen Null konvergiert, also insbesondere gibt es $c > 0$ mit $|a_k||z^* - z_0|^k \leq c$ für alle k . Damit ist

$$\sum_{k=0}^m |a_k| |z - z_0|^k = \sum_{k=0}^m |a_k| |z^* - z_0|^k \left| \frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right|^k \leq c \sum_{k=0}^m \left| \frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right|^k$$

für alle z mit $|z - z_0| < |z^* - z_0|$ und alle $m \in \mathbb{N}$. Die rechte Summe konvergiert für $m \rightarrow \infty$ als geometrische Reihe.

Wir definieren die Teilmenge I von $\mathbb{R}$ durch

$$I := \{0\} \cup \left\{ \rho > 0 : \begin{array}{l} \text{die Reihe konvergiert absolut} \\ \text{für jedes } z \text{ mit } |z - z_0| < \rho \end{array} \right\}.$$

Die Menge $I \subseteq [0, \infty)$ ist ein Intervall mit 0 als linkem Randpunkt, denn mit $\rho_1 \in I$ ist auch $\rho \in I$ für alle $0 \leq \rho \leq \rho_1$. Zwei Fälle können eintreten:

- (i) $I = [0, \infty)$. Wir setzen $r := \infty$, und die Aussage von (a) ist gezeigt. (b) tritt dann nicht auf.
- (ii) $I \neq [0, \infty)$. Dann ist I ein beschränktes Intervall. Wir zeigen, dass I auch abgeschlossen ist: Sei dazu (ρ_k) eine Folge in I mit $\rho_k \rightarrow \rho$. Wir haben zu zeigen, dass auch $\rho \in I$. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$. Wegen der Konvergenz $\rho_k \rightarrow \rho$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $|z - z_0| < \rho_k < \rho$. Wegen $\rho_k \in I$ konvergiert also die Potenzreihe für dieses z nach der Definition von I . Also ist I ein **kompaktes** Intervall. Wir setzen $r := \max I$. Damit haben wir Konvergenz für alle $|z - z_0| < r$. Für $|z - z_0| > r$ kann keine Konvergenz eintreten. Würde nämlich die Reihe für ein $|z_1 - z_0| > r$ konvergieren, so könnten wir ein ρ wählen, das dazwischen liegt, also $r < \rho < |z_1 - z_0|$. Nach der am Anfang des Beweises gezeigten Aussage würde die Reihe dann für alle z mit $|z - z_0| \leq \rho$ absolut konvergieren. Dies hieße $\rho \in I$ und wäre ein Widerspruch zur Definition von r . Damit sind (a) und (b) gezeigt.
- (c) Als Vorbemerkung notieren wir die Formel (3. binomische Formel):

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

die man ganz einfach beweist,² und ferner

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (k q^k) = 0 \quad \text{für alle } |q| < 1.$$

Dies kann man z.B. dadurch beweisen, dass man die Konvergenz der Reihe $(\sum_{k=1}^{\infty} k q^k)$ mit dem Quotientenkriterium beweist. (Dann müssen die Summanden gegen Null konvergieren nach Satz 4.5).

Jetzt beginnen wir mit dem Beweis. Seien $z_1, z_2 \in K[z_0, \hat{r}]$ und $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ die n -te Partialsumme. Dann ist

$$\begin{aligned} |S_n(z_1) - S_n(z_2)| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k [(z_1 - z_0)^k - (z_2 - z_0)^k] \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |(z_1 - z_0)^k - (z_2 - z_0)^k| \\ &= |z_1 - z_2| \sum_{k=0}^n |a_k| \left| \sum_{j=1}^k (z_1 - z_0)^j (z_2 - z_0)^{k-j} \right| \\ &\leq |z_1 - z_2| \sum_{k=0}^n |a_k| \sum_{j=1}^k |z_1 - z_0|^j |z_2 - z_0|^{k-j} \\ &\leq |z_1 - z_2| \sum_{k=0}^n |a_k| \sum_{j=1}^k \hat{r}^j \hat{r}^{k-j} = |z_1 - z_2| \sum_{k=0}^n |a_k| k \hat{r}^k \\ &= |z_1 - z_2| \sum_{k=0}^n |a_k| (k q^k) \left(\frac{\hat{r}}{q} \right)^k \end{aligned}$$

mit irgendeinem q zwischen $\frac{\hat{r}}{r}$ und 1, d.h. $\frac{\hat{r}}{r} < q < 1$. Z.B. könnte man $q = \frac{1}{2}(\frac{\hat{r}}{r} + 1)$ nehmen. Da nach der Vorbemerkung $(k q^k)$ gegen Null konvergiert, so ist die Folge beschränkt. Daher gibt es $c_1 > 0$ mit $k q^k \leq c_1$ für alle k . Daher ist

$$|S_n(z_1) - S_n(z_2)| \leq c_1 |z_1 - z_2| \sum_{k=0}^n |a_k| \left(\frac{\hat{r}}{q} \right)^k.$$

Nun ist $\frac{\hat{r}}{q} < r$, also konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(\frac{\hat{r}}{q} \right)^k \right)$. Daher ist

$$|S_n(z_1) - S_n(z_2)| \leq c_1 |z_1 - z_2| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(\frac{\hat{r}}{q} \right)^k \quad \text{für alle } n.$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. Die Lipschitzkonstante ist gegeben durch

$$c = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(\frac{\hat{r}}{q} \right)^k.$$

□

Bemerkung: Auf dem Rand des Konvergenzkreises, also für $|z - z_0| = r$, sind allgemein keine Aussagen möglich. Es kann absolute Konvergenz, nur Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

²Die rechte Seite multipliziert man aus und benutzt eine Indexverschiebung.

Beispiele 4.20 (a) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} k z^k\right)$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Auf dem Rand, d.h. für $|z| = 1$, liegt Divergenz vor, da die Summanden noch nicht einmal gegen Null konvergieren.

(b) Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k\right)$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $r = 1$. Für $z = 1$ liegt Divergenz (harmonische Reihe), für $z = -1$ Konvergenz (alternierende harmonische Reihe) vor. Es liegt übrigens Konvergenz für alle $|z| = 1$ mit $z \neq 1$ vor. Dies ist nicht so leicht zu beweisen.

(c) Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k\right)$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $r = 1$. Für $|z| = 1$ liegt Konvergenz vor, d.h. die Reihe konvergiert für alle $|z| \leq 1$ absolut.

(d) Wir kennen schon die Reihe für die **Exponentialfunktion**

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k.$$

Diese hat den Konvergenzradius ∞ , wie man mit dem Quotientenkriterium sieht.

(e) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert man die **Besselfunktion** der Ordnung n durch

$$J_n(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell! (n+\ell)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\ell+n} = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell! (n+\ell)! 4^\ell} z^{2\ell}.$$

Bei dieser Potenzreihe ist also $a_k = 0$ für ungerade k und für gerade k von der Form $k = 2\ell$ ist

$$a_{2\ell} = \frac{(-1)^\ell}{\ell! (n+\ell)! 4^\ell}.$$

Wir wenden das Quotientenkriterium an auf die Reihe $(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell)$ mit den Koeffizienten

$$b_\ell = \frac{(-1)^\ell}{\ell! (n+\ell)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\ell+n},$$

also

$$\frac{|b_{\ell+1}|}{|b_\ell|} = \frac{\ell! (n+\ell)! \left(\frac{|z|}{2}\right)^{2\ell+2+n}}{(\ell+1)! (n+\ell+1)! \left(\frac{|z|}{2}\right)^{2\ell+n}} = \frac{|z|^2}{(\ell+1)(n+\ell+1)4} \rightarrow 0, \ell \rightarrow \infty.$$

Daher ist $r = \infty$, d.h. die Potenzreihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Diese Besselfunktionen spielen eine wichtige Rolle z.B. bei Schwingungsproblemen für kreisförmige Membranen.

Wir haben Addition, skalare Multiplikation (Streckung) und die Multiplikation von Zahlenreihen kennengelernt. Bei Potenzreihen interessiert man sich für den Konvergenzradius des Ergebnisses:

Satz 4.21 (Addition und Multiplikation von Potenzreihen)

Seien $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\right)$ und $\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k\right)$ Potenzreihen um denselben Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann gilt im kleineren der beiden Konvergenzkreise für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \pm \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k \pm \mu b_k) (z - z_0)^k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}. \end{aligned}$$

Hier taucht also wieder das Cauchy-Produkt auf!

Satz 4.22 (Identitätssatz)

Seien wieder $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\right)$ und $\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k\right)$ Potenzreihen um denselben Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

für alle z aus dem kleineren der beiden Konvergenzkreise (die beide positiven Konvergenzradius haben müssen), so ist $a_k = b_k$ für alle $k = 0, 1, \dots$. Diese Aussage heißt Identitätssatz und ist Grundlage für den **Koeffizientenvergleich**: Stimmen die Werte zweier Potenzreihen auf einer ganzen Kreisscheibe überein, so sind alle Koeffizienten gleich.

Als Anwendung des Cauchyprodukts können wir rationale Funktionen und auch Quotienten von Potenzreihen wieder als Potenzreihen darstellen.

Beispiele 4.23

(a) Wir wollen die Potenzreihe für die rationale Funktion f mit

$$f(z) = \frac{z^3 + 4z}{z^2 - 4}$$

im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ aufstellen und machen den Ansatz $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Hochmultiplizieren ergibt

$$z^3 + 4z = (z^2 - 4) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} z^k - 4 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $0 = -4a_0$, $4 = -4a_1$, $0 = a_0 - 4a_2$, $1 = a_1 - 4a_3$ und weiter $0 = a_{k-2} - 4a_k$ für $k \geq 4$. Hieraus folgt $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1/2$. Da $a_2 = 0$ ist, ist auch $a_k = 0$ für alle geraden k und induktiv folgt

$$a_{2\ell+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1} a_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

Daher ist

$$\frac{z^3 + 4z}{z^2 - 4} = -z - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1} z^{2\ell+1}.$$

Den Konvergenzradius berechnen wir mit dem Wurzelkriterium:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sqrt[2\ell+1]{\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1} |z|} = \frac{1}{2} |z|, \quad \text{also } r = 2.$$

(b) Wir wollen die Potenzreihe zum Ausdruck $z/(\exp z - 1)$ aufstellen. Dazu machen wir den Ansatz $z/(\exp z - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Wir wissen:

$$\exp z - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k.$$

Also ist

$$\frac{z}{\exp z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \iff z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $a_0 = 0$ und $a_j = 1/j!$ für $j \geq 1$. Koeffizientenvergleich liefert $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ und $c_k = 0$ für $k \geq 2$. Hieraus erhalten wir iterativ die b_k , also etwa $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, u.s.w.

4.4 Elementare Funktionen für komplexe Argumente

Neben der Exponentialfunktion sind natürlich die trigonometrischen Funktionen besonders wichtig. Sie sind aus dem Geometrieunterricht und später aus dem Analysisunterricht in der Schule bekannt. Wir geben hier eine rein analytische Definition von Sinus und Kosinus und versuchen später zu zeigen, was diese mit der geometrischen Definition („Sinus ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck“) aus der Schule zu tun hat.

Die **Sinus- und Kosinusfunktionen** sowie die **hyperbolischen Funktionen** definieren wir durch die Reihenwerte der Potenzreihen:

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, & \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \\ \sinh z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, & \cosh z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Die Reihen konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut, d.h. auch sie besitzen den Konvergenzradius ∞ . Für reelle Argumente sind die Funktionen reellwertig.

Zunächst sehen wir, dass Sinus und Kosinus für positive reelle Werte alternierende Reihen sind. Für $z > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \frac{1}{2} \sqrt{z^2 + 1/4} - \frac{5}{4}$ sind $z^{2k+1}/(2k+1)!$ und $z^{2k}/(2k)!$ monoton fallende Nullfolgen (weshalb?). Daher können wir nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 4.7) Fehlerabschätzungen angeben. Für $z > 0$ und $n \geq \frac{1}{2} \sqrt{z^2 + 1/4} - \frac{5}{4}$ ist

$$\left| \sin z - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad \left| \cos z - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Dies liefert eine sehr gute Möglichkeit zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen!

Wichtig sind die Beziehung zwischen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen (Eulersche Formeln).

Satz 4.24 (a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(-z) &= -\sin z, & \text{d.h. die Sinusfunktion ist eine } \mathbf{ungerade} \text{ Funktion,} \\ \cos(-z) &= \cos z, & \text{d.h. die Kosinusfunktion ist eine } \mathbf{gerade} \text{ Funktion.}\end{aligned}$$

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), & \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sinh z &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), & \cosh z &= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}).\end{aligned}$$

(c) Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt die **Eulersche Formel**:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

also speziell $e^{it} = \cos t + i \sin t$, $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ und $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ und $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

(e) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ und $\operatorname{Arg} e^z = \operatorname{Im} z$ für $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$.

(f) Es gelten die **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}\sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v, & \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v, \\ \sinh(u \pm v) &= \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v, & \cosh(u \pm v) &= \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v.\end{aligned}$$

Beweis: (a) Dies ist klar aus der Definition.

(b) Wir weisen nur die erste Formel nach:

$$e^{iz} - e^{-iz} = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (-1)^k] i^k \frac{z^k}{k!}.$$

Nun ist $1 - (-1)^k = 0$ für gerade k . Daher bleiben in der Reihe nur die Summanden mit ungeradem k übrig. Schreiben wir $k = 2m + 1$, so erhalten wir $1 - (-1)^k = 2$ und $i^k = i(-1)^m$, also

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} = 2i \sin z.$$

(c) Aus Teil (b) erhält man $\cos z + i \sin z = e^{iz}$ und daher mit der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

(d) Dies folgt sofort aus (b) mit der binomischen Formel, also etwa

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4} (e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4} (e^{iz} - e^{-iz})^2 = e^{iz} e^{-iz} = e^0 = 1.$$

Die andere Formel geht genauso!

(e) Folgt direkt aus der Eulerschen Formel und der Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen.

(f) Diese Additionstheoreme rechnet man direkt mit den Darstellungen von Teil (b) unter Benutzung der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion aus. $\square$

Wichtige Folgerung: Erinnern wir uns an die Polarkoordinaten der komplexen Zahlen, so können wir nun jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ darstellen durch

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Die komplexe Schreibweise der trigonometrischen Funktionen ist häufig sehr praktisch. Z.B. können allgemeine Wellenbewegungen $u(x)$ in zweifacher Weise geschrieben werden, nämlich (1) als $u(x) = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ (Überlagerung zweier Wellen gleicher Frequenz φ und verschiedener Amplitude) oder (2) als $u(x) = r \cos(\varphi - \theta)$ (Phasenverschiebung). Offenbar lässt sich die zweite Form mit dem Additionstheorem in die erste überführen. Dass sich die erste Form in die zweite überführen lässt, sieht man so: Wir definieren die komplexe Zahl $z = a + ib$ und schreiben sie in Polarkoordinaten in der Form $z = a + ib = r e^{i\theta}$, d.h. $a = r \cos \theta$ und $b = r \sin \theta$. Dann ist $a \cos \varphi + b \sin \varphi = r [\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi] = r \cos(\varphi - \theta)$.

Funktionen, die sich in einer Kreisscheibe $K(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}$ als Potenzreihe darstellen lassen heißen **analytisch** in $K(z_0, r)$. Die Funktionen von Satz 4.24 sind also analytische Funktionen, ebenso die Besselfunktion von Beispiel 4.20.

Wir wollen noch ein wenig bei den trigonometrischen Funktionen bleiben. Die Zahl π ist ja eng mit Sinus und Kosinus verknüpft. In unserem Zugang lässt sich π so definieren:

Satz 4.25 und Definition der Zahl π

Der Kosinus hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle $\hat{x}$. Man setzt $\pi := 2\hat{x}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} e^{i\pi/2} &= i, & e^{n\pi i} &= (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \cos(n\pi + \pi/2) &= 0, & \sin(n\pi + \pi/2) &= (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sin(n\pi) &= 0, & \cos(n\pi) &= (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sinus und Kosinus sind 2π -periodisch, d.h.

$$\sin(z + 2\pi n) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi n) = \cos z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Die Zahlen $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ und $\{n\pi + \pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$ sind auch die einzigen Nullstellen des Sinus bzw. Kosinus.

Beweis: Da für reelle $|x| \leq 2$ die Reihe

$$1 - \cos x = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} x^{2k}$$

alterniert und die Folge $x^{2k}/(2k+2)!$ monoton gegen 0 konvergiert (nachweisen!), so können wir das Leibniz-Kriterium (Satz 4.7) anwenden und erhalten die Fehlerabschätzung

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} \leq \left| 1 - \cos x - \frac{x^2}{2!} \right| \leq \frac{x^4}{4!} \leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \quad \text{für reelle } |x| \leq 2,$$

also $\cos 2 \leq 1 - 2^2/2! + 2/3 = -1/3 < 0$. Andererseits erkennen wir aus der Definition, dass $\cos 0 = 1 > 0$. Da die Kosinusfunktion stetig ist, existieren nach dem Nullstellensatz 3.23 Nullstellen in $[0, 2]$. Ebenso gilt nach dem Leibniz-Kriterium für die Reihe

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$$

die Fehlerabschätzung

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq \frac{x^2}{6} \leq \frac{2}{3} \quad \text{für reelle } |x| \leq 2,$$

und hieraus $\sin x > 0$ für $x \in (0, 2]$. Aus dem Additionstheorem folgt $\cos(x-h) - \cos(x+h) = 2 \sin x \sin h > 0$ für alle $x, h \in (0, 2)$. Also ist die Kosinusfunktion streng monoton fallend auf $(0, 2)$. Daher existiert genau eine Nullstelle in $[0, 2]$, die wir $\pi/2$ nennen.

Es ist also $\cos(\pi/2) = 0$ und mit Satz 4.24 (d) $\sin(\pi/2) = \pm 1$. Wegen $\sin x > 0$ auf $(0, 2)$ ist $\sin(\pi/2) = 1$ und $\exp(i\pi/2) = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$. Die anderen Eigenschaften folgen alle aus $\exp(in\pi/2) = \exp(i\pi/2)^n = i^n$ und der Euler Formel. $\square$

Damit haben wir allein aus der Definition der trigonometrischen Funktionen als Potenzreihen ihre wichtigsten Eigenschaften hergeleitet. Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt auch, dass der Punkt $(\cos x, \sin x)$ auf dem Einheitskreis liegt. Es fehlt eigentlich nur noch, dass das Argument x der *Winkel im Bogenmaß* in dem entsprechenden rechtwinkligen Dreieck ist. Das kann an dieser Stelle noch nicht nachgewiesen werden, da wir das Bogenmaß noch nicht eingeführt haben.

Weitere häufig verwendete trigonometrische und hyperbolische Funktionen sind der **Tangens**, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ für $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ und $n \in \mathbb{Z}$, und der **Kotangens**, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ für $x \neq n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$, sowie der **Tangenshyperbolicus**, $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ für $x \in \mathbb{C}$ mit $x \neq i(n\pi + \frac{\pi}{2})$ und $n \in \mathbb{Z}$, und der **Kotangenshyperbolicus** $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ für $x \neq in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Wir wollen nun die Logarithmusfunktion für komplexe Argumente definieren. Zunächst führen wir den aus der Schule bekannten (natürlichen) Logarithmus im Reellen ein als die Umkehrfunktion zu $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Aus der Potenzreihe folgt $\exp(h) > 1$ für alle $h > 0$ und somit impliziert die Funktionalgleichung, dass die Exponentialfunktion streng monoton steigt, d.h. $\exp(x+h) = \exp(h)\exp(x) > \exp(x)$ für $h > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Weiter lässt sich mit dem Zwischenwertsatz 3.22 zeigen, dass $\mathbb{R}_{>0}$ das gesamte Bild ist. Also können wir jedem $y \in \mathbb{R}_{>0}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ zuordnen mit $y = \exp(x)$, d.h. die Umkehrfunktion existiert. Wir definieren $x = \ln(y)$ (beachte, dass auch "log" für den natürlichen Logarithmus verwendet wird).

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir für $x, y > 0$

$$xy = e^{\ln(x)} e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}.$$

Wenden wir auf diese Identität die Logarithmusfunktion an, so folgt

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{für alle } x, y > 0.}$$

Entsprechend gilt für $x, y > 0$

$$\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).}$$

Mit dem reellen Logarithmus können wir nun den komplexen Logarithmus definieren.

Definition 4.26 (komplexer natürlicher Logarithmus)

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ seien $r = |z|$ und $\varphi = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ die Polarkoordinaten von z . Dann ist der (natürliche) komplexe Logarithmus durch

$$\ln z := \ln r + i\varphi, \quad \text{also} \quad \operatorname{Re}(\ln z) := \ln |z|, \quad \operatorname{Im}(\ln z) := \operatorname{Arg} z$$

definiert. Beachte, dass $\operatorname{Arg} z$ den Hauptwert von z bezeichnet. Also ist $\operatorname{Im}(\ln z) \in (-\pi, \pi]$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Deshalb wird $\ln z$ auch der **Hauptwert** oder **Hauptzweig** des Logarithmus genannt. Die **allgemeine Lösung** $u \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\boxed{z = e^u}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Menge $\{u = \ln z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$. Naheliegenderweise heißen die Zahlen $\ln z + 2k\pi i$ die **Nebenzweige** des Logarithmus für $k \in \mathbb{Z}$.

Die Definition ist „verträglich“ mit der reellen Definition, d.h. für reelle $z > 0$ stimmt die neue Definition mit der alten überein, da dann $\operatorname{Arg} z = 0$. Der so definierte Logarithmus ist auch die Umkehrfunktion im Komplexen, denn es gilt:

Satz 4.27 (a) $\exp(\ln z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $\ln(\exp z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$.

(c) (**Funktionalgleichung** des Logarithmus) Für alle $u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es $n \in \{-1, 0, +1\}$ mit

$$\ln u + \ln v = \ln(uv) + 2\pi n i.$$

Ist $\operatorname{Arg} u + \operatorname{Arg} v \in (-\pi, \pi]$, so ist in dieser Formel $n = 0$.

Bemerkung: Die Einschränkung in (b) ist nötig, da für alle $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\operatorname{Im}(\ln u) = \operatorname{Arg} u \in (-\pi, \pi].$$

Beweis: (a) Es ist

$$\exp(\ln z) = \exp(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z) = e^{\ln |z|} e^{i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = z.$$

(b) Wegen Satz 4.24 (e) gilt

$$\ln(\exp z) = \ln(e^{\operatorname{Re} z}) + i \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = z.$$

(c) Es ist

$$e^{\ln u + \ln v - \ln(uv)} = \frac{\exp(\ln u) \exp(\ln v)}{\exp(\ln(uv))} = \frac{uv}{uv} = 1,$$

also $\ln u + \ln v = \ln(uv) + 2\pi n i$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Der Imaginärteil der linken Seite liegt aber in $(-2\pi, 2\pi]$, der von $\ln(uv)$ in $(-\pi, \pi]$. Daher muß $n \in \{-1, 0, +1\}$ liegen. $\square$

Jetzt kommen wir zur allgemeinen Potenz a^z für komplexe Zahlen a und z .

Definition 4.28 Für $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ setzen wir

$$a^z := e^{z \ln a} = \exp(z \ln a),$$

den **Hauptwert** der allgemeinen Potenz.

Für $z = n \in \mathbb{N}$ ist die Definition verträglich mit dem n -fachen Produkt, für $z = -1$ ist sie verträglich mit der Inversenbildung! Wenden wir den natürlichen Logarithmus auf die Definitionsgleichung an, so erhalten wir für die Umkehrfunktion **den Logarithmus zur Basis a** , d.h.: $\log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a}$ für $y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Etwas aufpassen müssen wir bei den Potenzgesetzen:

Satz 4.29

(a) Für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $u, v \in \mathbb{C}$ gilt: $a^u a^v = a^{u+v}$.

(b) Für $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b \in (-\pi, \pi]$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt: $a^z b^z = (ab)^z$.

Bemerkung: Die Einschränkung bei (b) ist nötig, denn sonst würden wir sofort einen Widerspruch erhalten: Wir betrachten $a = b = -1$ und $u = v = z = 1/2$. Dann ist $a^u = e^{\ln(-1)/2} = e^{i\pi/2} = i$ und $a^{u+v} = a = -1$. Teil (a) ist anwendbar und liefert das richtige Ergebnis wegen $i^2 = -1$. Die Formel von Teil (b) ist falsch, denn $(ab)^{1/2} = 1^{1/2} = 1$. Die Voraussetzung ist auch nicht erfüllt, da $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$.

Beweis: (a) Mit der Definition ist $a^u a^v = e^{u \ln a} e^{v \ln a} = e^{(u+v) \ln a} = a^{u+v}$.

(b) Ebenso gilt wegen $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ die Identität

$$a^z b^z = e^{z \ln a} e^{z \ln b} = e^{z(\ln a + \ln b)} = e^{z \ln(ab)} = (ab)^z. \quad \square$$

Definition 4.30 Für $z = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, ergibt sich speziell

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) = \sqrt[n]{|a|} \exp\left(\frac{i}{n} \operatorname{Arg} a\right).$$

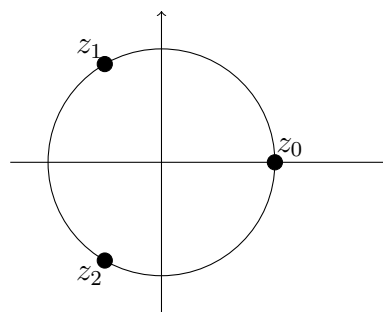
Dies ist der **Hauptwert** der n -ten Wurzel aus a .

Die Nebenwerte berechnen sich mit den n -ten Wurzeln aus 1. Wir definieren die **n -ten Einheitswurzeln** z_m , $m = 0, \dots, n-1$ durch

$$z_m := \exp\left(i\frac{m}{n}2\pi\right), \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Dann ist $z_0 = 1$, und $(z_m)^n = 1$ für jedes $m = 0, \dots, n-1$. Alle n -ten Wurzeln aus a , d.h. alle Lösungen der Gleichung $\boxed{u^n = a}$ sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned} u_m &= z_m \sqrt[n]{|a|} \exp\left(\frac{i}{n} \operatorname{Arg} a\right) \\ &= \sqrt[n]{|a|} e^{i\left(\frac{1}{n} \operatorname{Arg} a + \frac{m}{n} 2\pi\right)}, \end{aligned}$$



$$m = 0, \dots, n-1.$$

Schließlich betrachten wir noch die allgemeine quadratische Gleichung $z^2 + az + b = 0$ für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$: Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$z_{\pm} = -\frac{a}{2} \pm \underbrace{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}_{=d}^{1/2}, \quad \text{mit } d^{1/2} = \sqrt{|d|} \exp\left(\frac{i}{2} \operatorname{Arg} d\right)$$

dem Hauptwert der Quadratwurzel. Damit erhalten wir im Komplexen immer zwei Lösungen der quadratischen Gleichung, wenn $a^2 \neq 4b$ ist. Für $a^2 = 4b$ gibt es genau eine Lösung.

Zu unterscheiden sind im Spezialfall $a, b \in \mathbb{R}$ die beiden Fälle:

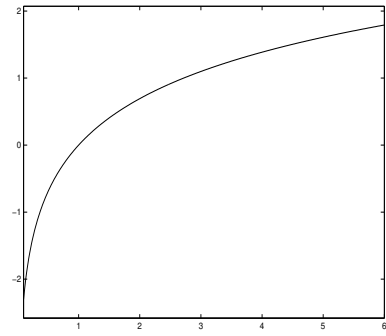
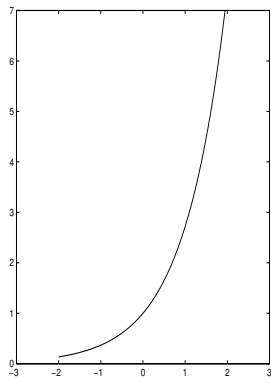
1.Fall: $a^2 \geq 4b$. Dann erhalten wir reelle Lösungen $z_{\pm} = a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}$.

2.Fall: $a^2 < 4b$. Dann erhalten wir zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen $z_{\pm} = -a/2 \pm i\sqrt{b - a^2/4}$.

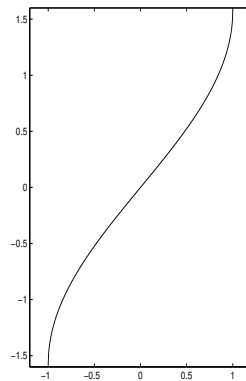
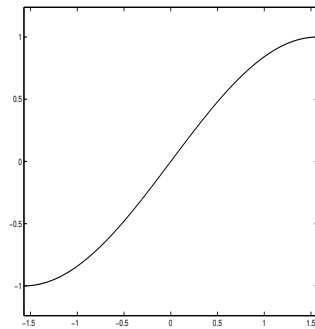
Wir haben in diesem Kapitel nur einige Aspekte der elementaren Funktionen $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sinh$, $\cosh$, usw. und deren Umkehrfunktionen darstellen können. Für reelle Argumente fassen wir nochmal einige wichtige Funktionen zusammen.

Satz 4.31 Die folgenden Funktionen sind auf den angegebenen Definitionsmengen streng monoton, also umkehrbar:

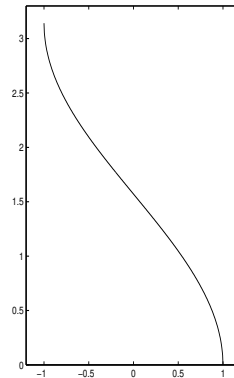
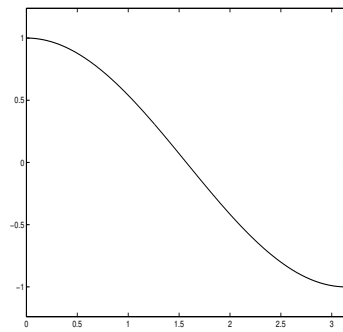
Funktion		Umkehrfunktion
$\exp : \mathbb{R}$	$\longleftrightarrow$	$(0, \infty) : \ln$
$\sin : [-\pi/2, \pi/2]$	$\longleftrightarrow$	$[-1, 1] : \arcsin$
$\cos : [0, \pi]$	$\longleftrightarrow$	$[1, -1] : \arccos$
$\tan : (-\pi/2, \pi/2)$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R} : \arctan$
$\cot : (0, \pi)$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R} : \operatorname{arccot}$
$\sinh : \mathbb{R}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R} : \operatorname{Arsinh}$
$\cosh : [1, \infty)$	$\longleftrightarrow$	$[1, \infty) : \operatorname{Arcosh}$



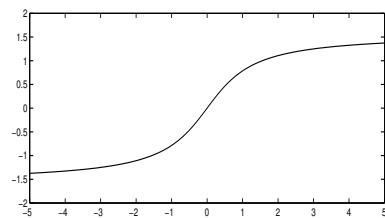
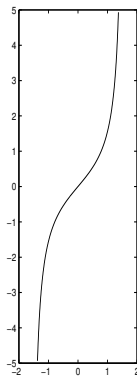
Exponentialfunktion und Logarithmus



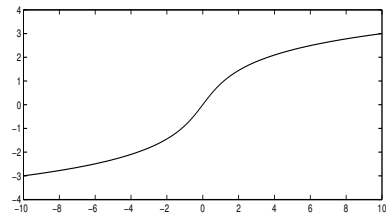
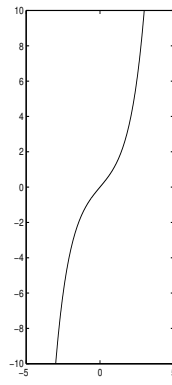
Sinus und Arcussinus



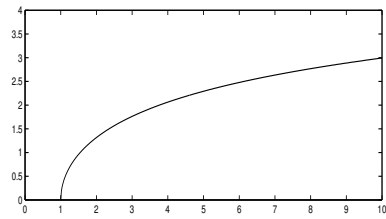
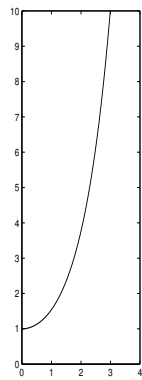
Kosinus und Arcuskosinus



Tangens und Arcustangens



Sinushyperbolicus und Areasinushyperbolicus



Kosinushyperbolicus und Areakosinushyperbolicus

5 Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen. Vieles im ersten Abschnitt ist aus der Schule bekannt.

5.1 Ableitung einer Funktion einer Veränderlichen

Definition 5.1 (Ableitung)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad - \text{oder, was dasselbe ist,} \quad - \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert heißt **Ableitung** von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

In dieser Definition benutzen wir den Grenzwert (siehe Satz/Definition 3.18). Ausführlich bedeutet die Definition also: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta, \quad x \neq x_0.$$

Wir können den Grenzwert natürlich auch über Folgen definieren (wie in Satz/Definition 3.18).

Schreibweise: Wir schreiben auch $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\frac{df(x_0)}{dx}$ statt $f'(x_0)$ und nennen dies den **Differentialquotienten** von f .

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x beschreibt die **lokale Änderungsrate** der Funktion an der Stelle x . Interpretiert man z.B. $f(x)$ als die Menge flüssigen Stahls zur Zeit x in einem Hochofen, so ist

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

die Änderungsrate, d.h. $f'(x) \Delta x \approx [f(x + \Delta x) - f(x)]$ die Mengenänderung während der Zeit Δx .

Diese Vorstellung ist grundlegend für die Bedeutung der Ableitung bei der Modellbildung in Natur- und Ingenieurwissenschaften. Zum Beispiel beobachtet man bei Wachstumsprozessen (Zellkulturen unter idealen Bedingungen), dass die Änderungsrate proportional zur Größe der Population ist. Wenn wir die Anzahl von Bakterien in einer Zellkultur zu einem Zeitpunkt $x > 0$ durch eine Funktion $p(x)$ beschreiben, so gilt

$$p'(x) = r p(x)$$

mit einer Konstanten $r \in \mathbb{R}$ (der Reproduktionsrate). Gleichungen, die Ableitungen einer Funktion und/oder die Funktion selbst in Beziehung zueinander stellen, heißen **Differentialgleichungen**. Wir werden uns noch intensiv mit solchen Gleichungen beschäftigen. In diesem einfachen Beispiel ist $p(x) = p_0 e^{rx}$ die Lösung, wie aus der Schule bekannt sein sollte. Es handelt sich also um ein **exponentielles Wachstum**, wobei von einer Anfangspopulation p_0 zur Zeit $x = 0$ ausgegangen wird.

Ist $f(x)$ eine zurückgelegte Wegstrecke zur Zeit x , so ist $f'(x)$ die Geschwindigkeit zur Zeit x . Erst in zweiter Linie sollte man sich $f'(x)$ als die Steigung der Funktion f im Punkt x vorstellen!

Beispiele 5.2

(a) Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) = 2ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir rechnen direkt aus für $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] &= \frac{1}{h}[a(x+h)^2 - ax^2 + b(x+h) - bx] \\ &= 2ax + b + ah \longrightarrow 2ax + b, \quad (h \rightarrow 0).\end{aligned}$$

(b) Sei $f(x) = \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir benutzen das Additionstheorem für den Sinus:

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = \sin x [\cos h - 1] + \cos x \sin h.$$

Wegen

$$\left| \frac{\sin h}{h} - 1 \right| \leq \frac{h^2}{6} \quad \text{und} \quad |\cos h - 1| \leq \frac{h^2}{2}$$

für $|h| \leq 2$ (siehe Beweis zu Satz 4.25) folgt

$$\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \longrightarrow \cos x. \quad \square$$

(c) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\frac{1}{h}[f(h) - f(0)] = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1, & h > 0, \\ -1, & h < 0, \end{cases}$$

und dies konvergiert nicht für $h \rightarrow 0$. $\square$

Das letzte Beispiel zeigt eine stetige Funktion, die nicht differenzierbar ist. Allgemein ist Differenzierbarkeit eine stärkere Bedingung als Stetigkeit.

Satz 5.3 Sei I ein offenes Intervall und $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis: Dies folgt einfach aus

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \longrightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0,$$

da der erste Term auf der rechten Seite gegen 0 und der Bruch gegen $f'(x_0)$ konvergiert. $\square$

Definition 5.4 (mehrmalige Differenzierbarkeit)

Sei I ein Intervall und $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar (d.h. in jedem Punkt von I). Dann heißt f' die **erste Ableitung** von f . Ist die Funktion f' ebenfalls differenzierbar auf I , so heißt $f'' := (f')'$ die **zweite Ableitung** von f . Analog werden induktiv die höheren Ableitungen $f^{(r)}$ von f definiert.

Die Funktion f heißt auf I **r-mal stetig differenzierbar**, wenn f auf I r-mal differenzierbar ist und die r-te Ableitung (und damit alle Ableitungen bis zur Ordnung r) eine stetige Funktion ist. Die Menge aller auf I r-mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $C^r(I)$.

Beispiele 5.5

(a) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

ist genau einmal stetig differenzierbar in 0, also $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Beweis: Die Differenzierbarkeit für $x \neq 0$ folgt aus Beispiel 5.2, und es ist

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad \text{Sei jetzt also } x = 0. \text{ Dann ist}$$

$$\frac{1}{h}[f(h) - f(0)] = \begin{cases} \frac{h^2}{h} = h, & h > 0, \\ 0, & h < 0, \end{cases}$$

und daher $\frac{1}{h}[f(h) - f(0)] \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Also ist f auch in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Die Abbildung f' ist stetig auf $\mathbb{R}$, da der links- und der rechtsseitige Grenzwert von $f'(x)$ übereinstimmen und auch mit $f'(0) = 0$ übereinstimmen. Für die zweite Ableitung von f bei $x = 0$ müssen wir den Differenzenquotienten betrachten

$$\frac{1}{h}[f'(h) - f'(0)] = \begin{cases} \frac{2h}{h} = 2, & h > 0, \\ 0, & h < 0, \end{cases}$$

und dieser Ausdruck konvergiert nicht für $h \rightarrow 0$. Daher ist f genau einmal stetig differenzierbar. $\square$

(b) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

ist genau einmal differenzierbar in 0, aber nicht stetig differenzierbar.

Beweis: Weiter unten werden wir mit der Kettenregel sehen, dass für $x > 0$ die Funktion f differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, $x > 0$. Für $x < 0$ ist offenbar $f'(x) = 0$. Sei jetzt $x = 0$. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x \sin(1/x), \quad x \neq 0,$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen 0 für $x \rightarrow 0$. Also ist f in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$. Wir haben damit erhalten:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

und diese Funktion ist **nicht** stetig in 0 (weshalb?). $\square$

Bei zusammengesetzten Funktionen wie in dem Beispiel 5.5 (a) gibt es ein nützliches hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit an der „Nahtstelle“:

Satz 5.6 Es sei I ein offenes Intervall, $x_0 \in I$, und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und für alle $x \in I$, $x \neq x_0$, differenzierbar. Die Ableitung $f' : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig ergänzbar in x_0 . Dann ist f auch stetig differenzierbar in x_0 .

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem Mittelwertsatz, der später behandelt wird.

Haben wir **komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen**, also $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer offenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, so ist die Differenzierbarkeit erklärt durch die Differenzierbarkeit von Real- und Imaginärteil, und wir setzen natürlich

$$f'(x) := (\operatorname{Re} f)'(x) + i (\operatorname{Im} f)'(x).$$

Die obigen Sätze gelten dann alle auch für solche komplexwertigen Funktionen.

5.2 Differentiationsregeln

Satz 5.7 (Differentiationsregeln für algebraische Verknüpfungen)

Seien I ein offenes Intervall, $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen, und f, g in $x \in I$ differenzierbar. Dann sind auch $f \pm g$, λf für $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \cdot g$ und f/g (falls $g(x) \neq 0$) in x differenzierbar, und es gilt:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \quad \textbf{(Produktregel)},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2} \quad \textbf{(Quotientenregel)}.$$

Wir verzichten auf die Beweise und verweisen auf die Literatur.

Beispiele 5.8

(a) Alle Polynome sind beliebig oft differenzierbar. Für

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{ist} \quad p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j,$$

und dies ist ein Polynom vom Grad $n-1$.

Wir zeigen induktiv nach k , dass $(x^k)' = k x^{k-1}$ für $k = 1, 2, \dots$. Für $k = 1$ ist die Behauptung offenbar richtig nach Beispiel 5.2. Sei sie für k schon bewiesen. Dann ist mit der Produktregel und der Induktionsvoraussetzung:

$$(x^{k+1})' = (x x^k)' = x^k + x k x^{k-1} = (k+1) x^k.$$

(b) Für $f(x) = x/(1+x^2)$ ist mit der Quotientenregel $f'(x) = (1-x^2)/[(1+x^2)^2]$.

Satz 5.9 (Kettenregel)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle. Die Funktion $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in A$ und die Funktion $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei in $y_0 := f(x_0) \in B$ differenzierbar. Dann ist die Komposition $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ in x_0 differenzierbar und es gilt die **Kettenregel**

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y)|_{y=f(x_0)} f'(x_0).$$

Der erste Ausdruck rechts bedeutet, dass $g(y)$ erst nach y abgeleitet werden soll und danach $y = f(x_0)$ eingesetzt werden soll. Daher schreiben wir auch kürzer: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

Beweis: Sei $y_0 := f(x_0)$. Wir definieren die Funktion

$$\Phi(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & \text{falls } y \neq y_0, \\ g'(y_0), & \text{falls } y = y_0. \end{cases}$$

Die Differenzierbarkeit von g in y_0 impliziert genau die Stetigkeit von Φ in y_0 . Jetzt schreiben wir

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \Phi(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(Man prüfe dies getrennt für $f(x) = f(x_0)$ und $f(x) \neq f(x_0)$ nach!) Für $x \rightarrow x_0$ konvergiert $f(x)$ gegen $f(x_0)$ und daher

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \longrightarrow \Phi(f(x_0)) f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0).$$

Dies ist die Behauptung. □

Beispiel 5.10

Es sei $F(x) = (x^3 + 1)^7$ für $x > 0$. Hier ist offenbar $F = g \circ f$ mit $f(x) = x^3 + 1$ und $g(y) = y^7$. Mit der Kettenregel folgt $F'(x) = 7(x^3 + 1)^6 (3x^2) = 21x^2(x^3 + 1)^6$.

Satz 5.11 (Differentiation der Umkehrabbildung)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es ist:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Auch dies bedeutet wieder, dass erst f abgeleitet werden muss und dann $x_0 = f^{-1}(y_0)$ eingesetzt wird.

Beweis: Sei $y \neq y_0$. Wir setzen $x = f^{-1}(y)$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Wegen der Monotonie ist dann auch $x \neq x_0$. Wegen der Stetigkeit der Umkehrfunktion nach Satz 3.24 folgt aus der Konvergenz $y \rightarrow y_0$, dass $x \rightarrow x_0$. Dann ist aber für $y \rightarrow y_0$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square$$

Beispiele 5.12

(a) Sei $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ für $x > 0$. Die Funktion f ist die Umkehrfunktion von $g(y) = y^n$ für $y > 0$, und daher ist

$$f'(x) = \frac{1}{n y^{n-1}} \Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{für } x > 0.$$

(b) Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = x^r$ für $x > 0$. Dann ist $f'(x) = r x^{r-1}$.

Beweis: Wir haben $r = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(x) = (x^p)^{1/q}$ und es ist mit der Kettenregel ($y = x^p$):

$$f'(x) = \frac{1}{q} (x^p)^{1/q-1} p x^{p-1} = \frac{p}{q} x^{p/q-p+p-1} = r x^{r-1},$$

da für positive und auch für negative $p \in \mathbb{Z}$ gilt: $\frac{d}{dx} x^p = p x^{p-1}$ (letzteres nach der Quotientenregel). □

Die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir elegant durch die Ableitung der **impliziten Gleichung**

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{oder auch} \quad f(f^{-1}(y)) = y,$$

nämlich

$$(f^{-1})'(f(x)) f'(x) = 1 \quad \text{bzw.} \quad f'(f^{-1}(y)) (f^{-1})'(y) = 1.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die beiden Funktionen $y = y(x)$, die durch

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(x)}{b}\right)^2 = 1$$

gegeben sind. Es ist die Gleichung einer **Ellipse** mit den Halbachsen a und b . Abgeleitet ergibt sich

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)}{b^2} y'(x) = 0,$$

was es z.B. erlaubt, den Wert y' nur aus den x - und y -Werten zu berechnen.

Als nächstes wollen wir die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen betrachten. Diese werden durch Potenzreihen beschrieben. Da wir nur reelle Argumente betrachten, schränken wir die Potenzreihen auf $(-r, r) \subseteq \mathbb{R}$ ein (für Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und Konvergenzradius r).

Satz 5.13 (*Differenzierbarkeit von Potenzreihen*)

Sei $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k\right)$ eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $r > 0$. Die Funktion mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ist im Intervall $K(z_0, r) \cap \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und die Ableitungen erhalten wir durch gliedweise Differentiation. Es ist also z.B.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k.$$

Die Ableitung ist wieder eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius r .

Beweis: Da der allgemeine Fall völlig analog beweisbar ist, wählen wir $x_0 = 0$. Zunächst zeigen wir, dass die Potenzreihen für

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

denselben Konvergenzradius haben. Es seien r und r' die Konvergenzradien von f und g . Zunächst schätzen wir ab:

$$\sum_{k=1}^m |a_k| |x|^k \leq |x| \sum_{k=1}^m k |a_k| |x|^{k-1}.$$

Für $|x| < r'$ konvergiert die rechte Reihe, also auch die linke nach dem Majorantenkriterium. Daher ist $r' \leq r$. Sei nun $|x| < r$ beliebig, ohne Beschränkung $x \neq 0$. Wähle $\lambda > 1$ mit $\lambda |x| < r$ (also etwa $\lambda := \frac{1}{2}(1 + r/|x|)$). Dann konvergiert die Potenzreihe für $f(\lambda x)$ absolut. Ferner konvergiert

die Folge $\alpha_k := \frac{k}{\lambda^k}$ gegen 0, da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ nach dem Quotientenkriterium konvergiert. Also existiert $c > 0$ mit $\alpha_k \leq c$ für alle k , d.h. $k \leq c\lambda^k$ für alle k und daher:

$$\sum_{k=1}^m k |a_k| |x|^{k-1} \leq \frac{c}{|x|} \sum_{k=1}^m \lambda^k |a_k| |x|^k = \frac{c}{|x|} \sum_{k=1}^m |a_k| |\lambda x|^k.$$

Also konvergiert auch die linke Seite, daher $r \leq r'$, und die Konvergenzradien sind gleich.

Sei wieder $S_m(x) := \sum_{k=0}^m a_k x^k$ die m -te Partialsumme. Wir halten $|x| < r$ fest und wählen $\varepsilon > 0$ mit $\rho := |x| + \varepsilon < r$. Dann ist mit der binomischen Formel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [(x+h)^k - x^k] &= \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} h^{j-1} x^{k-j} \\ &= \underbrace{\binom{k}{1}}_{=k} x^{k-1} + h \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} h^{j-2} x^{k-j}. \end{aligned}$$

Also ist für $|h| \leq \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} [(x+h)^k - x^k] - k x^{k-1} \right| &\leq |h| \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} \varepsilon^{j-2} |x|^{k-j} \\ &= \frac{|h|}{\varepsilon^2} \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} \varepsilon^j |x|^{k-j} \\ &\leq \frac{|h|}{\varepsilon^2} (\varepsilon + |x|)^k = \frac{|h|}{\varepsilon^2} \rho^k. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\left| \frac{1}{h} [S_m(x+h) - S_m(x)] - \frac{d}{dx} S_m(x) \right| \leq \frac{|h|}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^m |a_k| \rho^k \leq \gamma |h|$$

mit $\gamma := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \rho^k \right) / \varepsilon^2$. Diese Abschätzung gilt für alle $m \in \mathbb{N}$. Für $m \rightarrow \infty$ konvergieren $S_m(x)$, $S_m(x+h)$ und $\frac{dS_m(x)}{dx}$ gegen $f(x)$, $f(x+h)$ und $g(x)$, also gilt für alle $|h| \leq \varepsilon$:

$$\left| \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] - g(x) \right| \leq \gamma |h|.$$

Für $h \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. □

Diesen Satz können wir nun auf alle möglichen Potenzreihen anwenden.

Sei wieder $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Satz 5.14 (Ableitung von exp und ln)

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ sind auf ihren Definitionsmengen differenzierbar, und es ist

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Satz 5.14 (Ableitung von $\exp$ und $\ln$, Fortsetzung)

Die Ableitung der allgemeinen Potenz ist

$$\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x \quad x \in \mathbb{R},$$

für beliebiges $a > 0$.

Beweis: Für die Ableitung der Exponentialfunktion haben wir:

$$\frac{d}{dx} \exp x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp x.$$

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion von $\exp$, also nach Satz 5.11

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \exp y} \bigg|_{y=\ln x} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

Für die allgemeine Potenz schreiben wir $a^x = \exp(x \ln a)$ und wenden die Kettenregel an. Dies liefert die Behauptung. $\square$

Satz 5.15 (Ableitung von $\sin$, $\cos$, $\sinh$ und $\cosh$)

Die trigonometrischen Funktionen $\sin$ und $\cos$ und die Hyperbelfunktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind beliebig oft differenzierbar, und es ist

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh.$$

Die einfachen Beweise verbleiben als Übung. Wir listen einige Ableitungen auf:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp x$	$\exp x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

5.3 Tangente und Differential

Geraden, die nicht senkrecht zur x -Achse sind, werden bekanntlich geschrieben in der Form

$$y = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Schreibweise suggeriert die Anschauung des **Graphen** der Gerade in der (x, y) -Ebene als Menge von Punkten, die die Gleichung $y = ax + b$ erfüllen. Die zugrunde liegende Funktion ist

$$g(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bekanntlich ist a die Steigung der Geraden und b der Wert an der Stelle $x = 0$, also der Schnittpunkt mit der vertikalen Achse (der „ y -Achse“). Die Steigung $a = g'(x)$ ist der Multiplikator, der Änderungen von x in Änderung von $g(x)$ überführt.

Sei jetzt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ festgehalten. Dann beschreibt die lineare Funktion

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

die **Tangente** an f an der Stelle x_0 , denn

- (i) $g(x_0) = f(x_0)$, d.h. die Gerade g geht durch den Punkt $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$, und
- (ii) $g'(x_0) = f'(x_0)$, d.h. die Gerade g und die Funktion f haben bei x_0 dieselbe Steigung.

Lemma 5.16 Sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$. Dann existiert eine im Punkt x_0 stetige Funktion $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x_0) = 0$ und

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Tangente in } x_0} + (x - x_0)h(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis: Wir haben nur zu zeigen, dass die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases}$$

in x_0 stetig ist. Dies besagt aber gerade die Differenzierbarkeit von f in x_0 . □

Dieses Lemma sagt aus, wie die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ die Funktion approximiert: Für kleine $|x - x_0|$ ist der Fehler zwischen Funktion und Tangente von der Größenordnung $(x - x_0)h(x)$, also kleiner als nur $|x - x_0|$ (da $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$). Der Begriff der Tangente ist ein geometrischer Begriff. Genauso wichtig ist die Vorstellung der **Linearisierung**: In einer Umgebung von x_0 wird die nichtlineare Funktion f durch die lineare Funktion g approximiert. Diese Verwendung der Geraden g ist in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften gebräuchlich, da normalerweise die Untersuchung der komplizierten Funktion zu schwierig oder unmöglich ist.

Die lineare Funktion

$$g_0(x) = f'(x_0)x, \quad x \in \mathbb{R},$$

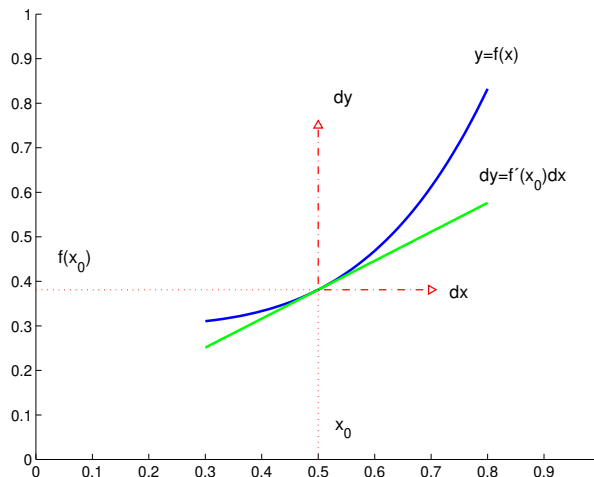
beschreibt die Gerade parallel zu g durch den Ursprung. Statt $y = f'(x_0)x$ für diese Gerade schreiben wir

$$dy = f'(x_0) dx$$

und nennen dx, dy **Differentiale**.

Die „Gleichung“ $dy = f'(x_0)dx$ beschreibt also die Tangente von f in $(x_0, f(x_0))$, aufgefaßt in dem (dx, dy) -Koordinatensystem, das den Ursprung im Punkt $(x_0, f(x_0))$ hat. Ändert sich der Punkt x_0 , so „wandert“ der Ursprung des (dx, dy) -Koordinatensystems mit.

Gebräuchlich sind bekanntlich zwei Möglichkeiten, Funktionen zu beschreiben. Die erste Form $y = f(x)$ haben wir gerade benutzt. Das dieser Form angepaßte Differential hat die Form $dy = f'(x_0)dx$.



Beschreiben wir die Funktion f durch $f : x \mapsto f(x)$, so sollten wir für das Differential $df : dx \mapsto f'(x_0)dx$ schreiben. Beachte dabei, dass das Differential von dem „Arbeitspunkt“ x_0 abhängt. Manchmal wird auch deutlicher $df|_{x_0} : dx \mapsto f'(x_0)dx$ geschrieben.

Statt x_0 können wir natürlich wieder x schreiben.

Definition 5.17 Sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $x \in I$. Die lineare Abbildung $df : dx \mapsto f'(x)dx$ heißt das **Differential** zu f an der Stelle x .

Betrachten wir $f'(x)$ als lokale Änderungsrate im Punkt x , so können wir das Differential $dy = f'(x)dx$ als die linearisierte Änderung der Funktionswerte bei Änderung des Arguments um dx ansehen.

Wir betonen, dass in der linearen Beziehung $dy = f'(x_0)dx$ die Größen dx und dy nicht klein zu sein brauchen. Setzt man allerdings $dx = x - x_0$, so ist die linearisierte Änderung $dy = f'(x_0)dx$ nur dann eine Näherung an $\Delta y := f(x) - f(x_0)$, wenn x nahe bei x_0 ist, d.h. wenn dx klein ist.

Beispiel 5.18

Die Funktion f sei gegeben durch $y = f(x) = x^2 \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Dann lautet das Differential $dy = (2x \cos x - x^2 \sin x)dx$. Noch einmal: Für festes $x \in \mathbb{R}$ ist dies die Geradengleichung in dem (dx, dy) -Koordinatensystem, das seinen Ursprung in $(x, f(x))$ hat.

5.4 Extremwertaufgaben und Mittelwertsatz

Wir haben uns schon in Abschnitt 3.3 mit Extremwertaufgaben beschäftigt. In Satz 3.21 haben wir gezeigt, dass jede stetige Funktion auf kompakten Mengen Minima und Maxima besitzt. Hier wollen wir zeigen, wie man diese bei konkreten Aufgaben berechnet. Zunächst unterscheidet man noch zwischen lokalen und globalen Maxima bzw. Minima:

Definition 5.19 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. $x_0 \in [a, b]$ heißt **lokale Maximalstelle** von f auf $[a, b]$, falls es $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \text{ mit } |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

Analog werden **lokale Minimalstellen** definiert.

$x_0 \in [a, b]$ heißt **globale Maximalstelle** von f auf $[a, b]$, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [a, b]$. Analog werden **globale Minimalstellen** definiert.

x_0 heißt (lokale oder globale) **Extremalstelle**, wenn x_0 Minimal- oder Maximalstelle ist.

Der folgende Satz ist aus der Schule wohlbekannt.

Satz 5.20 Es habe $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum oder Minimum. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.

Wichtig: Liegt x_0 am Rand von $[a, b]$, so braucht die Ableitung nicht Null zu sein (Skizze).

Beweis: Liegt z.B. in x_0 ein lokales Maximum und ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ für alle $|h| \leq \varepsilon$. Dann ist für $0 < h \leq \varepsilon$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Läßt man nun h gegen 0 gehen, also $h \searrow 0$, so konvergiert der Differenzenquotient gegen $f'(x_0)$. Daher ist $f'(x_0) \leq 0$. Für $-\varepsilon \leq h < 0$ ist andererseits:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

und für $h \nearrow 0$ folgt $f'(x_0) \geq 0$. Zusammen haben wir $f'(x_0) = 0$ erhalten. Ist x_0 eine Minimalstelle, so zeigt man die Aussage genauso. $\square$

Beispiel 5.21

Bestimme alle *globalen* Extremalstellen der Funktion

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \quad \text{auf dem Intervall } [-5, 2]!$$

Wir gehen in mehreren Schritten vor:

- (i) Es gibt globale Minima und Maxima, da f stetig und $[-5, 2]$ kompakt ist (Satz 3.21).
- (ii) Zunächst suchen wir Extremalstellen im Inneren $(-5, 2)$ des Intervalls. Sei in $x_0 \in (-5, 2)$ ein Extremum. Dann ist nach Satz 5.20

$$0 = f'(x_0) = 5x_0^4 - 15x_0^2 = 5x_0^2(x_0^2 - 3).$$

Die im Inneren $(-5, 2)$ des Intervalls in Frage kommenden Extremalstellen sind also $0, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Ob wirklich Extrema vorliegen, müssen wir noch entscheiden.

- (iii) Für die lokalen und globalen Extremalstellen in $[-5, 2]$ kommen also nur die Punkte $x_1 = -5, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = +\sqrt{3}$ und $x_5 = -\sqrt{3}$ in Frage.

(iv) Die Funktionswerte dieser Punkte sind $f(x_1) = -2500$, $f(x_2) = -8$, $f(x_3) = 0$, $f(x_4) = -6\sqrt{3}$ und $f(x_5) = +6\sqrt{3}$. Der Vergleich der Funktionswerte liefert: In $x_1 = -5$ ist ein globales Minimum und in $x_5 = -\sqrt{3}$ ein globales Maximum.

An dieser Stelle können wir noch nicht entscheiden, ob die anderen Stellen lokale Extrema sind – es sei denn, man skizziert die Funktion (was Sie tun sollten).

Stellen $x \in (a, b)$, in denen $f'(x) = 0$ gilt, heißen **kritische Punkte** der Funktion f . Die Eigenschaft $f'(x) = 0$ ist ein notwendiges Optimalitätskriterium, d.h. wenn $x \in (a, b)$ Maximal- bzw. Minimalstelle ist, so ist x kritischer Punkt. Aber nicht jede kritische Stelle einer Funktion muss ein Extremum sein. Auch die folgende Aussage ist anschaulich völlig klar.

Satz 5.22 (von Rolle)

Sei $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert $\hat{x} \in (a, b)$ mit $f'(\hat{x}) = 0$.

Man beachte, dass in diesem Satz keine Aussage darüber gemacht wird, wo der kritische Punkt $\hat{x}$ im Intervall (a, b) liegt. Trotzdem ist dieser Satz sehr wichtig.

Beweis: Ist f auf $[a, b]$ konstant, so ist die Aussage richtig, und man kann für $\hat{x}$ jeden Punkt in (a, b) nehmen. Sei jetzt f nicht konstant. Sei $x_1 \in [a, b]$ eine (globale) Maximalstelle und $x_2 \in [a, b]$ eine Minimalstelle. Beide existieren, da f stetig und $[a, b]$ kompakt ist. Außerdem ist $f(x_2) < f(x_1)$, und daher muss wenigstens eine der beiden Stellen x_1 oder x_2 im Innern (a, b) liegen. Aus dem letzten Satz folgt die Behauptung für $\hat{x} = x_1$ bzw. $\hat{x} = x_2$. $\square$

Satz 5.23 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\hat{x} \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\hat{x}).$$

Wiederum macht dieser Satz keine Aussage darüber, wo der Punkt $\hat{x}$ liegt.

Beweis: Definiere die Hilfsfunktion

$$\Phi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a), \quad a \leq x \leq b.$$

Dann ist $\Phi(a) = f(a)$ und $\Phi(b) = f(a)$. Daher ist der Satz von Rolle auf Φ anwendbar und liefert die Existenz eines $\hat{x} \in (a, b)$ mit

$$0 = \Phi'(\hat{x}) = f'(\hat{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dies ist die Behauptung! $\square$

Satz 5.24 (verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Seien $f, g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es $\hat{x} \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\hat{x})}{g'(\hat{x})}.$$

Beweis: Definiere jetzt

$$\Phi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)], \quad a \leq x \leq b,$$

und führe den Beweis genauso wie beim letzten Satz. $\square$

Als erste Anwendung des Mittelwertsatzes beweisen wir Satz 5.6 von oben:

Beweis von Satz 5.6: Wir betrachten den Differenzenquotienten und wenden den Mittelwertsatz an:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(z)$$

für ein z zwischen x und x_0 . Für $x \rightarrow x_0$ konvergiert auch z gegen x_0 . Da f' stetig fortsetzbar im Punkt x_0 ist, so existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Damit ist die Differenzierbarkeit von f in x_0 gezeigt. Die Stetigkeit von f' folgt ja aus der Voraussetzung. $\square$

Als zweite Anwendung des Mittelwertsatzes können wir leicht zeigen:

Lemma 5.25 (a) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f in $[a, b]$ streng monoton steigend.
(b) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.

Beweis: (a) Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Anwendung des Mittelwertsatzes auf das Intervall $[x_1, x_2]$ liefert die Existenz von $z \in (x_1, x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(z) > 0,$$

also $f(x_2) > f(x_1)$.

(b) Dieses zeigt man genauso: Ist $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, so liefert die Anwendung des Mittelwertsatzes die Existenz von $z \in (x_1, x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(z) = 0,$$

also $f(x_1) = f(x_2)$. $\square$

Schließlich zeigen wir noch die L'Hospital'schen Regeln. Diese bieten in vielen Fällen eine einfache Möglichkeit, Definitionslücken für gebrochen rationale Funktionen zu schließen.

Satz 5.26 (1. L'Hospitalsche Regel)

Es sei

- (i) I ein beschränktes Intervall und $x_0 \in I$, oder
- (ii) $I = (a, \infty)$ und $x_0 = \infty$ oder
- (iii) $I = (-\infty, b)$ und $x_0 = -\infty$.

Es seien ferner $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ sowie $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis für den ersten Fall: In diesem Fall ist $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Wir wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz an: Zu jedem x gibt es ein z zwischen x und x_0 mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Für $x \rightarrow x_0$ konvergiert auch z gegen x_0 , also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Im zweiten Fall ist $x_0 = \infty$. Wir setzen $x = 1/t^2$ und definieren $\tilde{f}(t) = f(1/t^2)$ und $\tilde{g}(t) = g(1/t^2)$. Dann hat man $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)}$ zu berechnen. Benutzt man jetzt den Fall (i), so hat man

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t^2) \cdot (-2/t^3)}{g'(1/t^2) \cdot (-2/t^3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t^2)}{g'(1/t^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wobei wir die Kettenregel benutzt haben. Fall (iii) geht genauso. □

Satz 5.27 (2. L'Hospitalsche Regel)

Es gelte eine der Voraussetzungen (i), (ii) oder (iii) des letzten Satzes. Es seien ferner $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \pm\infty$, sowie $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Wir verzichten auf den Beweis und verweisen auf die Literatur.

Beispiele 5.28

(a) Wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

(b) In diesem Beispiel müssen wir die 1. L'Hospitalsche Regel zweimal anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) In diesem Beispiel müssen wir den Ausdruck erst umformen, bevor wir die erste L'Hospitalsche Regel anwenden können. Sei $x \in \mathbb{R}$ festgehalten.:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[t \ln \left(1 + \frac{x}{t} \right) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{t} \right)}{1/t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \varepsilon x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x/(1 + \varepsilon x)}{1} = x.$$

Hieraus (und mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion) folgt:

$$\exp(x) = \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t \ln \left(1 + \frac{x}{t} \right) \right] \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ \left[t \ln \left(1 + \frac{x}{t} \right) \right] \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{t} \right)^t,$$

und diese Formel kennen wir ja schon – allerdings mit einem komplizierteren Beweis.

5.5 Die Taylorformel und die Taylorreihe

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, wie man Funktionen f „lokal“, d.h. in der Umgebung eines fest vorgegebenen Punktes x_0 , durch Polynome p_n approximieren kann. Wir werden ein Polynom n -ten Grades mit der Eigenschaft

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} p_n(x_0) \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots, n \quad (5.1)$$

suchen. Die Frage, die es zu beantworten gilt, ist, inwieweit dies tatsächlich eine gute lokale Approximation liefert.

Für $n = 0$ erhalten wir offenbar das konstante Polynom $p_0(x) = f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $n = 1$ ist das gesuchte Polynom die Tangente

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für größere n definieren wir analog:

Definition 5.29 Es sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ n mal stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

das **Taylorpolynom** vom Grad n von f mit Entwicklungspunkt x_0 .

Unmittelbar einsichtig ist folgende Aussage.

Satz 5.30 Das Taylorpolynom p_n approximiert die Funktion f im Sinn von (5.1), d.h. $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für alle $k = 0, \dots, n$.

Dies bedeutet, dass das Taylorpolynom mit allen seinen Ableitungen bis zur Ordnung n mit der Funktion f im Punkt x_0 übereinstimmt. Daher erwartet man in der Umgebung des Punktes x_0 eine gute Approximation von f durch p_n .

Wie gut ist nun die Approximation für Punkte $x \neq x_0$?

Satz 5.31 Es sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sogar $n+1$ mal stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ einen Punkt z zwischen x und x_0 , der von x , x_0 und n abhängt, mit

$$R_n(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(z).$$

Diese Form heißt die **Restglieddarstellung von Lagrange**, und wir bezeichnen

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

als die **Taylorformel**. Natürlich hängt das Restglied nicht nur von n und x ab, sondern auch von x_0 .

Beweis: Wir fassen $R_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ als Funktion in x auf. Nach Satz 5.30 gilt $R_n(x_0) = 0$ und $R_n^{(j)}(x_0) = 0$ für $j = 1, \dots, n$. Weiter ist $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ für alle $x \in I$. Sei nun $x > x_0$. (Für $x < x_0$ schließt man analog.) Wir wenden nun $n+1$ mal den verallgemeinerten Mittelwertsatz 5.24 an:

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(z_1)}{(n+1)(z_1 - x_0)^n} \\ &= \frac{R'_n(z_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)((z_1 - x_0)^n - 0^n)} = \dots \\ &= \frac{R_n^{(n)}(z_n)}{(n+1)!(z_n - x_0)} = \frac{R_n^{(n)}(z_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!((z_n - x_0) - 0)} \\ &= \frac{R_n^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit $z_{j+1} \in (x_0, z_j) \subseteq (x_0, x)$ für alle $j = 1, \dots, n$. Mit $z = z_{n+1}$ ist dies gerade die Behauptung. $\square$

Beispiele 5.32

(a) Betrachte als einfachstes Beispiel $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$. Wir rechnen aus: $f^{(k)}(x) = e^x$, also $f^{(k)}(0) = 1$, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{mit} \quad R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^z.$$

für ein z zwischen 0 und x . Die Taylorformel liefert also eine Darstellung des Fehlers, wenn wir die Reihe für $\exp x$ nach $n+1$ Termen abbrechen. Bislang konnten wir den Fehler nur für *alternierende* Reihen mit dem Leibnizkriterium abschätzen.

Als konkretes Beispiel kann man die Frage stellen: Wie groß muss n mindestens sein, damit der Fehler $R_n(x)$ zwischen der Funktion $f(x) = e^x$ und dem Taylorpolynom p_n für $|x| \leq 1$ höchstens 10^{-2} ist?

Wir schätzen mit der Lagrange-Form des Restgliedes ab:

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} e^z \leq \frac{1}{(n+1)!} e^1,$$

und dies ist sicher kleiner als 10^{-2} für $n \geq 5$. Wollen wir also e^x für $|x| \leq 1$ bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-2} genau berechnen, so können wir das Taylorpolynom $p_5(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!} x^k$ nehmen.

(b) Sei jetzt $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, und $x_0 = 0$. Wir rechnen wieder aus: $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ und weiter

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \quad x > -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit lautet die Taylorformel:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{mit}$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha \cdots (\alpha-n)}{(n+1)!} (1+z)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ führt man nun die **Binomialkoeffizienten** $\binom{\alpha}{k}$ ein durch

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Man beachte, dass für $\alpha \in \mathbb{N}$ diese mit unseren alten Binomialkoeffizienten übereinstimmen. Dann schreibt sich die Taylorformel einprägsam als

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x).$$

Spezialfall: Ist $\alpha = n$, so ist $\alpha \cdots (\alpha-n) = 0$, also $R_n(x) = 0$, und man erhält die bekannte **binomische Formel** zurück. Auf eine Abschätzung des Restgliedes verzichten wir hier und kommen in Kapitel 6 wieder darauf zurück.

Eine weitere Folgerung ist das evtl. aus der Schule bekannte hinreichende Kriterium für Maximal- bzw. Minimalstellen.

Satz 5.33 Sei f auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$). Dann ist x_0 eine lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) von f .

Beweis: Wir betrachten den Fall $f''(x_0) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ um x_0 mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in U$. Nach Satz 5.31 gibt es zu $x \in U$ ein $z \in U$ mit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(z)}{2}(x-x_0)^2.$$

Also ist

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(z)}{2}(x - x_0)^2 > 0$$

Da dies für jedes $x \in U$ gilt, ist x_0 Minimalstelle. □

Was passiert aber nun generell mit den Taylorpolynomen für $n \rightarrow \infty$? Die Frage ist natürlich nur sinnvoll, wenn die Funktion f beliebig oft differenzierbar ist.

Definition 5.34 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right)$$

Taylorreihe zu f um x_0 .

Bemerkung:

(a) Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe.

(b) Ist eine Funktion f durch eine Potenzreihe gegeben, d.h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ für $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, so ist dies auch die Taylorreihe von f um x_0 .

(c) Wenn für die Restglieder zu den Taylorpolynomen gilt $|R_N(x)| \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$, so ist f in eine Potenzreihe entwickelbar und es gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

(d) Nicht für alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen ist f durch diese Potenzreihe darstellbar. Genauer: In ihrem Konvergenzkreis konvergiert die Taylorreihe als Potenzreihe – jedoch **im allgemeinen nicht** gegen den Funktionswert $f(x)$. Im Folgenden konstruieren wir ein Gegenbeispiel.

Beispiel 5.35 Betrachte die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Wie sehen die Ableitungen aus? Durch vollständige Induktion zeigt man, dass für $x \neq 0$ jede Ableitung von der Form ist:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{q_k(x)}{x^{2k}} \exp(-1/x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

mit einem Polynom q_k vom Grad $\leq k$. Jetzt benötigen wir die Aussage:

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

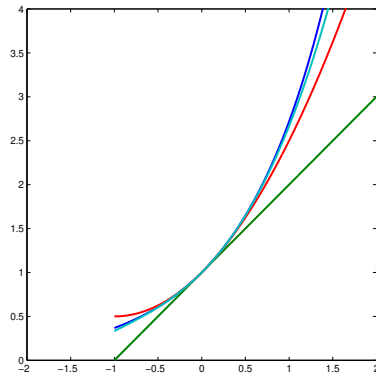
$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x^m} e^{-1/x} = 0.$$

Dies folgt aus der L'Hospitalischen Regel, wenn wir $t = 1/x$ für $x > 0$ setzen,

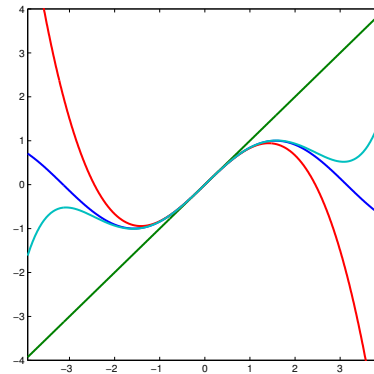
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^m} e^{-1/x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^m}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m t^{m-1}}{e^t} = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m!}{e^t} = 0.$$

Daher ist in unserem Beispiel $f^{(k)}$ stetig ergänzbar mit $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$. Jedes Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist also das Nullpolynom. Daher konvergiert $(p_n(x))_n$ für kein $x > 0$ gegen $f(x)$.

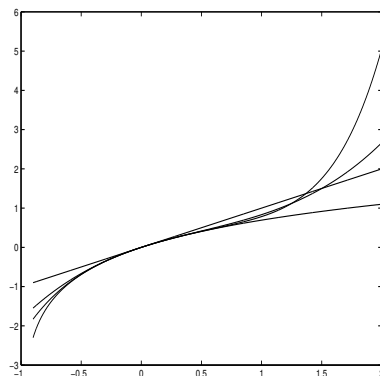
In den folgenden Plots haben wir für die Funktionen $\exp$, $\sin$, $x \mapsto \ln(1+x)$ und $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ die Funktion und jeweils 3 Taylorpolynome skizziert.



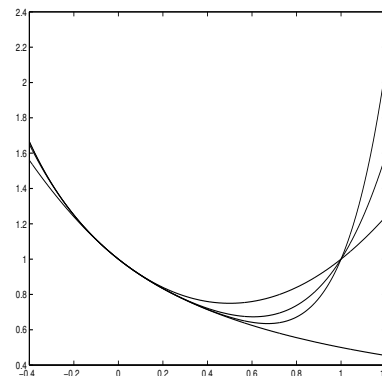
$f(x) = \exp(x)$ und p_1, p_2, p_3



$f(x) = \sin(x)$ und p_1, p_3, p_5



$f(x) = \ln(1+x)$ und p_1, p_3, p_5



$f(x) = \frac{1}{1+x}$ und p_2, p_4, p_6

Wir betonen noch einmal: Oft approximieren Taylorpolynome Funktionen, aber nur in der Nähe des Entwicklungspunktes. Man schreibt dafür auch:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{für } x \approx x_0$$

oder

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1}) \quad \text{für } x \approx x_0$$

Bemerkung: Die Notation $a(x) = \mathcal{O}(|x - x_0|^k)$ für einen Ausdruck im Zusammenhang mit dem Grenzwert $x \rightarrow x_0$ bedeutet, dass es eine kleine Umgebung $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ um x_0 gibt und eine Konstante $c > 0$ mit

$$|a(x)| \leq c |x - x_0|^k \quad \text{für alle } x \in U.$$

Analog wird die Notation $a(x) = o(|x - x_0|^k)$ genutzt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x)}{|x - x_0|^k} = 0$$

gilt. Diese Notationen werden **Landau-Symbole** genannt.

6 Integralrechnung

6.1 Das Lebesgue Integral

In diesem Abschnitt stellen wir ein Konzept zur Definition des Integralbegriffs vor. Detaillierte Beweise zu den Aussagen in diesem Abschnitt finden Sie im Bonusmaterial zum Kapitel 10 des Lehrbuchs Mathematik, Arens, Hettlich, u.a.

Zunächst definieren wir das Integral im Sinne des Flächeninhalts unter dem Graphen einer stückweise konstanten Funktion.

- Definition 6.1** (a) Sei I ein beschränktes Intervall mit Randpunkten $a < b$. Eine Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls es Zahlen $c_j \in \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ gibt mit $\varphi(x) = c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, n$.
- (b) Ist I unbeschränkt, so heißt $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktion, wenn es ein beschränktes Intervall $\tilde{I} \subseteq I$ gibt, so dass $\varphi|_{\tilde{I}}$ eine Treppenfunktion ist und $\varphi = 0$ auf $I \setminus \tilde{I}$ gilt.
- (c) Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktion auf einem Intervall mit Randpunkten $a < b$ und $\varphi(x) = c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$, so setzen wir

$$\int_I \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}),$$

wobei im unbeschränkten Fall auch $a = -\infty$ bzw. $b = \infty$ genutzt wird.

Um den Integralbegriff auf eine möglichst große Klasse von Funktionen zu verallgemeinern, benötigen wir den Begriff der *Nullmenge*. Wir verwenden die Notation $|I| = |b - a|$ für die Länge (das Maß oder den Inhalt) eines beschränkten Intervalls $I = (a, b)$.

Definition 6.2 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele beschränkte Intervalle $J_k \subseteq \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, gibt mit

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \varepsilon.$$

Wir sagen: Eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ gilt für **fast alle** x (oder **fast überall**, abgekürzt f.ü.), wenn die Menge $\{x : \mathcal{A}(x) \text{ gilt nicht}\}$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung: Beachten Sie, dass mit abzählbar vielen Intervallen in der Definition auch endlich viele Intervalle zugelassen sind.

Beispiel: Jede Menge endlich oder abzählbar vieler Zahlen $M = \{x_k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\}$ ist eine Nullmenge; denn setzen wir $J_k := [x_k - \varepsilon 2^{-k-1}, x_k + \varepsilon 2^{-k-1}]$ für $k = 1, 2, \dots$, so ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Lemma 6.3 (Eigenschaften von Nullmengen)

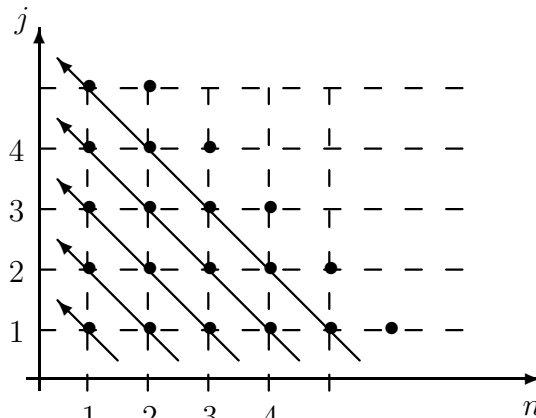
- (a) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist wieder Nullmenge.
 (b) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, ist eine Nullmenge.

Beweis: Teil (a) ist offensichtlich, da eine Überdeckung einer Menge durch Intervalle stets auch eine Überdeckung zu jeder beliebigen Teilmenge ist.

Zu (b): Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu jeder Nullmenge M_n wählen wir eine Überdeckung durch Intervalle J_j^n mit $\sum_{j=1}^{\infty} |J_j^n| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wir wollen diese Intervalle zählen. Mit Hilfe des *Cantorschen Diagonalverfahrens* (s. Abbildung) lassen sich die Intervalle durch $\tilde{J}_k = J_j^n$, $k = 1, 2, \dots$, nummerieren mit

$$k = \frac{1}{2}(n+j-2)(n+j-1) + j,$$

was sich durch Induktion zeigen lässt. Insgesamt erhalten wir eine Überdeckung $(\tilde{J}_k)$ für $k = 1, 2, \dots$, von M mit



Cantorsches Diagonalverfahren

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{J}_k| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |J_j^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

□

Insbesondere folgt aus dem Satz, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist, da wir die rationalen Zahlen mit dem Diagonalverfahren abzählen können.

Wir wollen jetzt den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Funktionen dadurch ausdehnen, dass wir Funktionen durch Treppenfunktionen approximieren. D.h., wir betrachten Funktionen f , zu denen es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die gegen f konvergiert. Diesen Konvergenzbegriff müssen wir erklären.

Definition 6.4 Sei I ein Intervall und $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass die Folge (f_n) **punktweise fast überall** (pktw. f. ü.) gegen f konvergiert, wenn die Menge $M := \{x \in I : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ der Punkte x , für die $f_n(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert, eine Nullmenge ist. Die Folge heißt **monoton fallend punktweise f.ü. konvergent** gegen f , wenn außerdem $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ für alle n und fast alle $x \in I$ gilt.

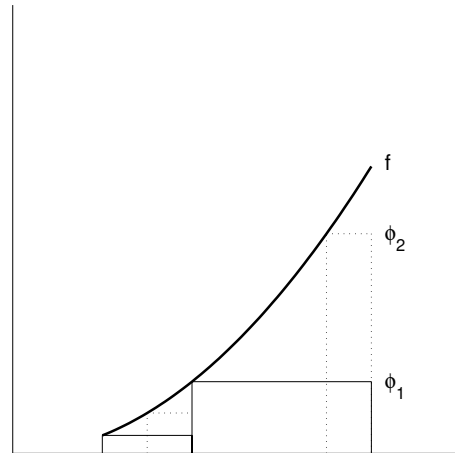
Zunächst ist mit einigem Aufwand eine grundlegende Eigenschaft zu zeigen. (Beweis: siehe Literatur)

Lemma 6.5 Sei $(\varphi_n)_n$ eine Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen auf $[a, b]$, die punktweise f.ü. monoton fallend gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die Integralfolge $\left(\int_a^b \varphi_n(x) dx\right)$ als Zahlenfolge gegen Null.

Wir legen nun die passende Art der Konvergenz einer Folge von Treppenfunktionen fest.

Definition 6.6 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall. Die Menge $L^+(I)$ sei definiert als die Menge aller Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Es gibt eine **monoton wachsende Folge** (φ_n) von Treppenfunktionen (d.h. für $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ für fast alle $x \in I$), die gegen f **fast überall punktweise konvergiert** (d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ f.ü.).
- (b) Die Folge der Integrale $\int_a^b \varphi_n(x) dx$ ist konvergent.



Die Abbildung rechts zeigt, wie wir uns die Approximation vorstellen können. Dies führt uns zunächst auf folgende Definition einer Menge von Funktionen, für die wir die Integration erklären können.

Satz und Definition 6.7 Seien $f, g \in L^+(I)$ mit monoton approximierenden Folgen von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_n$ bzw. $(\psi_n)_n$, und es gelte die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ fast überall auf I . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

So können wir das (Lebesguesche) **Integral** von f über I definieren durch

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx.$$

Beweis: i) Zunächst zeigen wir die Abschätzung. Wir halten $m \in \mathbb{N}$ fest und untersuchen die Folge von Treppenfunktionen $\varphi_m - \psi_n$. Die Differenz ist monoton fallend und konvergiert f.ü. mit $\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_m(x) - \psi_n(x)] = \varphi_m(x) - g(x) \leq f(x) - g(x) \leq 0$ für fast alle $x \in I$. Definiere nun

$$\xi_n(x) = \begin{cases} \varphi_m(x) - \psi_n(x) & \text{für } \varphi_m(x) - \psi_n(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist (ξ_n) eine Folge von nichtnegativen, monoton fallenden Treppenfunktionen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ f.ü., und wir erhalten die Abschätzung

$$\int_a^b \varphi_m dx - \int_a^b \psi_n dx \leq \int_a^b \xi_n dx.$$

Mit dem Lemma 6.5 erhalten wir im Grenzfall $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b \varphi_m(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

Da dies für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, muss die Abschätzung auch für $m \rightarrow \infty$ gelten, und der erste Teil des Satzes ist bewiesen.

ii) Damit die Definition sinnvoll ist, müssen wir noch zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx$ unabhängig von der Wahl der Treppenfunktionsfolge ist. Dies folgt aber direkt aus dem ersten Teil; denn für zwei Folgen (φ_n) , (ψ_n) mit derselben Grenzfunktion gilt die Ungleichung aus i) in beide Richtungen, also Gleichheit. $\square$

Offensichtlich gilt: $f, g \in L^+(I)$, $\lambda \geq 0 \Rightarrow f + g, \lambda f \in L^+(I)$ und

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx, \quad \int_a^b (\lambda f) dx = \lambda \int_a^b f dx.$$

Es ist aber nicht unbedingt $-f \in L^+(I)$. Also ist $L^+(I)$ kein Vektorraum (s.u.). Einen Vektorraum von Funktionen erhalten wir, wenn wir den von $L^+(I)$ aufgespannten Raum betrachten.

Definition 6.8 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b . Die Menge

$$L(I) := L^+(I) - L^+(I) = \{f = f_1 - f_2 : f_1, f_2 \in L^+(I)\}$$

heißt Menge der **Lebesgue integrierbaren Funktionen** über I . Für $f \in L(I)$ setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

Für $L(I)$ schreiben wir auch $L(a, b)$ anstelle von $L([a, b])$ oder $L((a, b))$ oder ähnliches für die halboffenen Intervalle.

Die Definition ist von der Wahl von f_1 und f_2 unabhängig, also wohldefiniert; denn mit $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ folgt $f_1 + g_2 = g_1 + f_2 \in L^+(I)$ und wir können Satz 6.7 anwenden. Also ist $\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b g_2(x) dx = \int_a^b g_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$ bzw.

$$\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b g_1(x) dx - \int_a^b g_2(x) dx.$$

Satz 6.9 (Eigenschaften)

(a) Für $f, g \in L(I)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \lambda f dx = \lambda \int_a^b f dx.$$

(b) Sei $c \in I = (a, b)$. Eine Funktion f ist auf I integrierbar genau dann, wenn f auf (a, c) und (c, b) integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(c) $f, g \in L(I)$ mit $f(x) \leq g(x)$ f.ü. auf I impliziert $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Also gilt insbesondere: Sind $f, g \in L(I)$ und $f(x) = g(x)$ f.ü. auf I , so ist $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

(d) Definiere für beliebige Funktionen f und g die Funktionen $|f|(x) := |f(x)|$, $\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$ und $\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x))$.

Mit $f, g \in L(I)$ sind auch $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und $|f|$ integrierbar und es gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

(e) Ist $f \in L(I)$, $f(x) \geq 0$ f.ü. auf I und $\int_a^b f(x) dx = 0$, so folgt $f(x) = 0$ f.ü. auf I .

Beweis: (a) und (b) ergeben sich direkt aus der Definition.

(c) Sei $f = f_1 - f_2$ und $g = g_1 - g_2$ mit $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^+(I)$ und $f \leq g$ f.ü. Dann folgt $f_1 + g_2 \leq g_1 + f_2$ f.ü. Der Satz 6.7 und die Linearität des Integrals liefern die Behauptung.

(d) Seien $f, g \in L^+(I)$ und φ_n, ψ_n zugehörige Folgen von Treppenfunktionen. Dann ist $\max(\varphi_n, \psi_n)$ eine Treppenfunktion, die monoton und punktweise f.ü. gegen $\max(f, g)$ konvergiert. Wir definieren $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \varphi_1$ und $\tilde{\psi}_n = \psi_n - \psi_1$, so dass $\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n \geq 0$ sind. Aus

$$\int_a^b \max(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n) dx \leq \int_a^b (\tilde{\varphi}_n + \tilde{\psi}_n) dx \leq \int_a^b (f - \varphi_1) dx + \int_a^b (g - \psi_1) dx$$

sehen wir, dass die Folge $\int_a^b \max(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n) dx$ beschränkt ist. Mit Teil (c) ist die Folge der Integrale monoton wachsend. Also ist $\int_a^b \max(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n) dx$ konvergent, und es folgt $\max(f, g) \in L^+(I)$. Analog zeigen wir dies für $\min(f, g)$. Daraus folgt $|f| \in L(I)$; denn es gibt eine Darstellung $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+(I)$, und es gilt $|f| = \max(f_1, f_2) - \min(f_1, f_2)$. Die Dreiecksungleichung ergibt sich aus $f \leq |f|$, $-f \leq |f|$ und Teil (c).

Mit $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ folgt nun auch die Aussage für allgemeine $f, g \in L(I)$.

(e): Mit der Zerlegung $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+(I)$ ist zu zeigen, dass aus $f_1 \leq f_2$ und $\int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f_2(x) dx$ die Identität $f_1(x) = f_2(x)$ für fast alle $x \in I$ folgt.

Seien (φ_n) bzw. (ψ_n) monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. Wir definieren $M_{m,k} = \{x \in I : f_1(x) < \psi_m(x) - \frac{1}{k}\}$. Dann gilt $M = \{x \in I : f_1(x) < f_2(x)\} = \bigcup_{m,k=1}^{\infty} M_{m,k}$.

Wir führen die Annahme zum Widerspruch, dass M keine Nullmenge ist. Sei also M keine Nullmenge, dann existieren nach Lemma 6.3 Indizes $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$, so dass M_{m_0, k_0} keine Nullmenge ist. Also existiert ein $\varepsilon \geq 0$, so dass für jede Überdeckung von M_{m_0, k_0} durch Intervalle I_n gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq \varepsilon$. Sei nun $I_n = \{x \in I : \varphi_n(x) < \psi_{m_0}(x) - \frac{1}{k_0}\}$. Dann ist I_n eine Vereinigung von Intervallen und $M_{m_0, k_0} \subseteq I_n$. Also gilt insbesondere $|I_n| \geq \varepsilon$. Aus den Eigenschaften (a),(b),(c) des Integrals erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_n(x) dx &= \int_{I_n} \varphi_n(x) dx + \int_{I \setminus I_n} \varphi_n(x) dx \\ &\leq \int_{I_n} \psi_{m_0}(x) dx - \frac{1}{k_0} |I_n| + \int_{I \setminus I_n} f_1(x) dx \\ &\leq \int_{I_n} f_2(x) dx - \frac{1}{k_0} |I_n| + \int_{I \setminus I_n} f_2(x) dx \\ &= \int_a^b f_2(x) dx - \frac{\varepsilon}{k_0} = \int_a^b f_1(x) dx - \frac{\varepsilon}{k_0} \end{aligned}$$

Da aber die linke Seite dieser Ungleichung für $n \rightarrow \infty$ gegen $\int_a^b f_1(x) dx$ strebt, ergibt sich ein Widerspruch. $\square$

Nach 6.9 (c) spielen Funktionswerte von f an diskreten Stellen bei der Integration keine Rolle. Wir definieren

$$\int_a^a f dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

wenn nach wie vor f auf $[a, b]$ gegeben ist. Somit bleibt die Identität in (b) richtig, auch wenn $c \notin (a, b)$ ist, solange alle auftretenden Integrale existieren.

Für unsere Beispiele ist der folgende Satz wichtig.

Satz 6.10 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

Beweis: Wir konstruieren durch **Intervallhalbierung** eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die gegen f konvergiert: Setze $z_j^{(n)} = a + \frac{j}{2^n}(b-a)$, $j = 0, \dots, 2^n$, so gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein $j \in \{1, \dots, 2^n\}$ bzw. ein Intervall mit $x \in J_x^{(n)} = [z_{j-1}^{(n)}, z_j^{(n)})$ und wir definieren zu $n \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion

$$\varphi_n(x) = \min \left\{ f(z) : z \in \overline{J_x^{(n)}} \right\}.$$

Für $x = b$ definieren wir noch $\varphi_n(b) = f(b)$. Beachte, dass das Minimum existiert, da f stetig ist. Bezeichnen wir mit $\hat{z}_x^n \in J_x^{(n)}$ die Minimalstelle, so gilt

$$\varphi(n)(x) = f(\hat{z}_x^n) \rightarrow f(x) \quad n \rightarrow \infty$$

wegen der Stetigkeit von f . Also konvergiert die Folge der Treppenfunktionen punktweise gegen f . Aus der Monotonie und der Beschränktheit $\int_a^b \varphi_n(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) (b-a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Konvergenz der Integrale $\int_a^b \varphi_n(x) dx$. Also ist f integrierbar. Es gilt sogar $f \in L^+(I)$. $\square$

Beachte, dass mit der Eigenschaft (b) aus Satz 6.9 auch alle **stückweise stetigen** Funktionen auf jedem kompakten Intervall integrierbar sind.

Es werden in der Literatur weitere Integrationsbegriffe diskutiert. In der Schule wird üblicherweise das **Riemann Integral** eingeführt. Die Definitionen und einige mathematische Konsequenzen sind unterschiedlich (z.B. gilt die Eigenschaft (d) von Satz 6.9 i.a. nicht bei Riemann Integralen). Das hier eingeführte **Lebesguesche Integral** ist aber in den Anwendungen (Fourierreihen, Differential- und Integralgleichungen) der wichtigere Begriff. In dem nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Techniken, die aus der Schule evtl. schon bekannt sind, gültig sind.

Beispiel 6.11 Betrachte $f(x) = x$ auf dem Intervall $(0, b)$. Dann ist durch

$$\varphi_n(x) = \frac{j}{2^n} b \quad \text{für } x \in \left(\frac{j-1}{2^n} b, \frac{j}{2^n} b \right), \quad j = 1, \dots, 2^n,$$

eine Folge von monoton wachsende Treppenfunktionen auf I gegeben, die wegen $|\varphi_n(x) - x| \leq b/2^n$ gegen f konvergiert. Wir erhalten das Integral

$$\int_0^b x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \varphi_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b^2}{2^{2n}} \frac{(2^n-1)2^n}{2} \right) = \frac{1}{2} b^2.$$

6.2 Die Stammfunktion

Wir beginnen mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz 6.12 (*Mittelwertsatz der Integralrechnung*)

Es sei f stetig auf $[a, b]$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $g(x) \geq 0$ für fast alle x . Es sei auch fg integrierbar. Dann gibt es ein $z \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(z) \int_a^b g(x) \, dx.$$

Beweis: Da f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig ist, existieren die Minimalstelle $\underline{x}$ und Maximalstelle $\overline{x}$ von f . Setze $m := f(\underline{x}) = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ und $M := f(\overline{x}) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. Wegen $g(x) \geq 0$ f.ü. gilt

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x) \quad \text{für fast alle } x \in [a, b].$$

Aus Teil (c) von Satz 6.9 folgt

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx.$$

1. Fall: $\int_a^b g(x) \, dx = 0$. Dann folgt aus dieser Ungleichung, dass auch $\int_a^b f(x) g(x) \, dx = 0$ ist. Die Behauptung gilt in diesem Fall für jedes $z \in [a, b]$.

2. Fall: $\int_a^b g(x) \, dx > 0$. Dann können wir dividieren und erhalten

$$f(\underline{x}) = m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} \leq M = f(\overline{x}).$$

Da f stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz die Existenz von $z \in [a, b]$ mit

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}. \quad \square$$

Spezialfall: Mit $g(x) = 1$ erhalten wir zu jeder stetigen Funktion f die Existenz eines $z \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(z) \int_a^b 1 dx = f(z) (b - a).$$

Dieser Spezialfall führt uns nun auf den *ersten Hauptsatz* über den Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung.

Satz 6.13 (*Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b], \quad (6.1)$$

in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis: Sei $x \in (a, b)$ mit $x \neq x_0$. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Spezialfall $g = 1$) erhalten wir

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left[\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(z),$$

wobei z zwischen x_0 und x liegt, also $|z - x_0| \leq |x - x_0|$. Daher konvergiert für $x \rightarrow x_0$ auch z gegen x_0 . Wegen der Stetigkeit von f konvergiert $f(z)$ gegen $f(x_0)$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0). \quad \square$$

Wir betonen, dass durch (6.1) eine **Funktion** $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist. Die obere Grenze des Integrals über f ist x , und dies ist das Argument der Funktion F . Da der Buchstabe x also für die obere Grenze benutzt wird, müssen wir für die Integrationsvariable einen anderen Buchstaben nehmen, z.B. t . Vielleicht erkennen Sie die Analogie zu Folgen und Reihen, bzw. Partialsummen: Ist (a_k) eine Folge, so ist $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ die n -te Partialsumme. Hier ist der Index n der Folge (s_n) also die obere Summationsgrenze der Summe über die a_k . Auch hier muss man für den Summationsindex einen anderen Buchstaben als n nehmen.

Definition 6.14 (*Stammfunktion*)

Sei f eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Jede in I differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ in I heißt **Stammfunktion** von f .

Die Funktion F in Satz 6.13 ist also eine Stammfunktion von f und wir können schreiben

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt = f(x), \quad x \in I.$$

Der Hauptsatz besagt, dass die Existenz von Stammfunktionen wenigstens für stetige Funktionen f gesichert ist. Stammfunktionen F von f sind bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

Lemma 6.15 *Es seien F_1 und F_2 Stammfunktionen von f . Dann ist $F_1 - F_2$ konstant.*

Beweis: Sei $F := F_1 - F_2$. Aus der Definition der Stammfunktion folgt $F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (genauer: Lemma 5.25) folgt, dass F konstant ist. $\square$

Ist also F eine Stammfunktion von f auf I , so sind alle Stammfunktionen von der Form $\tilde{F}(x) = F(x) + c$, $x \in I$, mit einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: Die Stammfunktion von f bezeichnen wir mit

$$\int f(x) dx, \quad \text{also ist} \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f.$$

Eigentlich steht das Symbol $\int f(x) dx$ für die ganze Klasse der Stammfunktionen, die sich wegen des letzten Lemmas aber nur um Konstanten unterscheiden. Das Symbol $\int f(x) dx$ bezeichnet also die inverse Operation zur Ableitung. Man nennt es **unbestimmtes Integral** im Gegensatz zu dem **bestimmten Integral** $\int_a^b f(x) dx$. Der englische Begriff „anti-derivative“ für die Stammfunktion suggeriert deutlicher, dass es sich um die Umkehrung der Ableitung („derivative“) handelt.

Das wichtigste Mittel zur konkreten Berechnung von Integralen elementarer Funktionen ist der folgende zweite **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** – ein Höhepunkt der eindimensionalen Analysis.

Satz 6.16 *(Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)*

Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) stetig differenzierbar und F' integrierbar, d.h. $F' \in L(a, b)$. Dann gilt

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b.$$

Beweis: Sei $\alpha \in (a, b)$. Nach dem ersten Hauptsatz ist die Abbildung $x \mapsto \int_\alpha^x F'(t) dt$ für $x \in (a, b)$ eine Stammfunktion zu F' . Außerdem ist natürlich F selbst eine Stammfunktion von F' . Also existiert nach Lemma 6.15 eine Darstellung $F(x) = c + \int_\alpha^x F'(t) dt$. Durch Einsetzen von $x = \alpha$ erhalten wir $F(\alpha) = c$ und insgesamt

$$\int_\alpha^x F'(t) dt = F(x) - F(\alpha)$$

für alle $a < x < b$.

Nun zeigen wir noch den Grenzfall $\alpha \rightarrow a$. (Der Grenzübergang $x \rightarrow b$ ergibt sich analog.) Da die rechte Seite der Gleichung stetig auf $[a, b]$ ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_\alpha^x F'(t) dt = \int_a^x F'(t) dt$$

gilt. Da F' integrierbar ist, gilt $F' = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+(a, b)$. Wir müssen die Konvergenz also nur für Elemente in $L^+(a, b)$ beweisen. Sei $f \in L^+(a, b)$. Weiter können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f \geq 0$ gilt (ansonsten betrachte $f - \varphi_1$). Sei (α_m) eine monoton fallende Folge in (a, b) mit $\alpha_m \rightarrow a$ für $m \rightarrow \infty$. Dann folgt die Monotonie

$$\int_{\alpha_m}^x f \, dt \leq \int_{\alpha_m}^x f \, dt + \underbrace{\int_{\alpha_{m+1}}^{\alpha_m} f \, dt}_{\geq 0} = \int_{\alpha_{m+1}}^x f \, dt.$$

Da $\int_{\alpha_m}^x f \, dt$ durch $\int_a^x f \, dt$ beschränkt ist für alle $m \in \mathbb{N}$, ergibt sich die Konvergenz

$$\int_{\alpha_m}^x f \, dt \longrightarrow c \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad c \leq \int_a^x f \, dt.$$

Sei nun (φ_n) eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die gegen f f.ü. konvergiert. Bei festem $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := \max(\varphi_n)$ auf dem Intervall (a, α_m) folgt

$$\int_a^x \varphi_n \, dt = \int_{\alpha_m}^x \varphi_n \, dt + \int_a^{\alpha_m} \varphi_n \, dt \leq \int_{\alpha_m}^x \varphi_n \, dt + c_n(\alpha_m - a).$$

Für eine Folge $m(n)$, die monoton wächst, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^x f \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \varphi_n \, dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\alpha_{m(n)}}^x \varphi_n \, dt + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha_{m(n)}}^x \varphi_n \, dt \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha_{m(n)}}^x f \, dt = c \leq \int_a^x f \, dt, \end{aligned}$$

wobei $m(n)$ so zu wählen ist, dass $(\alpha_{m(n)} - a)c_n \leq 1/n$. Also gilt Gleichheit und insgesamt haben wir die Behauptung gezeigt. $\square$

Bemerkung: Zu beachten ist, dass die Aussage nicht für jede differenzierbare Funktion F gilt. Die Existenz des Integrals muss vorausgesetzt werden.

Beispiele 6.17 (a) Es sei $f(x) = e^{-x}$. Dann ist $f = F'$ mit $F(x) = -e^{-x}$ und daher

$$\int_a^b e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big|_a^b = e^{-a} - e^{-b}.$$

(b) Zur Berechnung des Flächeninhalts des halben Vollkreises mit Radius $a > 0$ setzen wir $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$. Es sei F gegeben (vom Himmel gefallen!) durch

$$F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad x \in [-a, a].$$

Mit Produkt- und Kettenregel zeigen wir $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (-a, a)$. Außerdem ist F auf $[-a, a]$ stetig. Daher folgt nach dem 2. Hauptsatz

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = F(x) \Big|_{-a}^a = 2 \left[\frac{a}{2} \sqrt{a^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a}{a} \right] = \frac{\pi}{2} a^2.$$

Aus den Hauptsätzen ergeben sich nun mit den bekannten Ableitungen viele Stammfunktionen. Insbesondere liefern Ketten- und Produktregel auch Integrationstechniken.

Satz 6.18 (*Partielle Integration*)

Es seien f und g auf $[a, b]$ stetig und im Innern (a, b) stetig differenzierbar. Außerdem seien $f'g$ und $g'f$ integrierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Beweis: Die Produktregel der Differentiation lautet

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Also folgt die Behauptung aus dem zweiten Hauptsatz, da die Voraussetzung die Integrierbarkeit von $(fg)'$ impliziert. $\square$

Die Produktregel besagt, dass fg eine Stammfunktion der rechten Seite der Gleichung im Beweis ist, also die Summe der einzelnen Stammfunktionen plus einer beliebigen Konstanten C . Für das unbestimmte Integral gilt somit

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx + C,$$

wenn f und g differenzierbar sind und sowohl $f'g$ als auch $g'f$ Stammfunktionen besitzen.

Beispiele 6.19 (a) Es ist das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$$

mit Hilfe partieller Integration zu berechnen. Hier sollten wir setzen (weshalb?)

$$f'(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = x.$$

Dann ist $g'(x) = 1$ und wir können $f(x) = -\cos x$ nehmen. Also ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} x \sin x dx &= -[x \cos x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \cos x dx \\ &= -\left[\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - 0 \cos 0\right] + \sin x \Big|_0^{\pi/4} \\ &= -\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Genauso erhält man unter Fortlassung der Integrationskonstanten

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

(b) Die Stammfunktion zu $\ln x$ ergibt sich aus

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_{=f'} \underbrace{\ln x}_{=g} dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x.$$

Eine weitere Anwendung des zweiten Hauptsatzes liefert uns eine andere Darstellung des Restgliedes beim Taylorpolynom.

Beispiel 6.20 Sei f eine Funktion, die in einer Umgebung eines Punktes x_0 $n + 1$ -mal differenzierbar ist. Mit dem zweiten Hauptsatz und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x \underbrace{1}_{u'(t)} \underbrace{f'(t)}_{v(t)} dt = (t - x) f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x (t - x) f''(t) dt \\ &= (x - x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x - t) f''(t) dt. \end{aligned}$$

Nochmalige partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \underbrace{(x - t)}_{u'(t)} \underbrace{f''(t)}_{v(t)} dt &= -\frac{1}{2} (x - t)^2 f''(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x - t)^2 f'''(t) dt \\ &= \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x - t)^2 f'''(t) dt, \end{aligned}$$

also ist

$$f(x) = \left[f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(x_0) \right] + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x - t)^2 f'''(t) dt.$$

Durch vollständige Induktion können wir nun weiter die folgende Darstellung des Restgliedes beweisen:

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Satz 6.21 (*Substitutionsregeln*)

Auf dem Intervall I mit Grenzen $a < b$ sei eine Funktion f gegeben, die eine Stammfunktion besitze. Ferner sei $x : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ eine differenzierbare Funktion (d.h. eine **Substitution**). Dann gilt

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(u)) x'(u) du.$$

Inbesondere existiert das Integral auf der rechten Seite.

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f . Die Kettenregel liefert in I :

$$\frac{d}{du} F(x(u)) = F'(x(u)) x'(u) = f(x(u)) x'(u),$$

und nach zweimaliger Anwendung des zweiten Hauptsatzes folgt hieraus

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x(u)) x'(u) du &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{du} F(x(u)) du = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) \\ &= \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} F'(x) dx = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Mit Substitution ist hier nichts anderes gemeint, als eine Abbildung, die wir in Übereinstimmung mit allen Anwendern ebenfalls mit x bezeichnen. (Dadurch wird die unabhängige Variable x zu einer von u abhängigen Variablen.) Mit der Benutzung des **Differentialquotienten** hat die Substitutionsregel die folgende einprägsame Form:

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(u)) \frac{dx(u)}{du} du = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{dx}{du} du.$$

Notieren wir noch die Substitution für **unbestimmte** Integrale: f habe auf dem beschränkten Intervall I eine Stammfunktion, und $x : J \rightarrow I$ sei eine auf dem beschränkten Intervall J differenzierbare und **streng monotone** Substitution mit Bild I . Ist dann $u : I \rightarrow J$ ihre Umkehrfunktion, so gilt die Substitutionsregel

$$\int f(x) dx = \int f(x(u)) x'(u) du \Big|_{u=u(x)} + C, \quad x \in I.$$

Der Ausdruck rechts ist die Stammfunktion der Funktion $u \mapsto f(x(u)) x'(u)$, in die dann wieder die Umkehrfunktion $u = u(x)$ eingesetzt wird.

Beispiele 6.22 (a) Wir greifen das Beispiel von oben auf:

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

und substituieren $x(u) = a \cos u$. Wegen $x(0) = a$ und $x(\pi) = -a$ und $x'(u) = -a \sin u$ ist $x : [0, \pi] \rightarrow [-a, a]$ und

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_{x(\pi)}^{x(0)} \sqrt{a^2 - x^2} dx = -a \int_{\pi}^0 \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 u} \sin u du \\ &= a^2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 u} \sin u du = a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 u du \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos(2u)] du = \frac{a^2}{2} \left[u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{a^2 \pi}{2}, \end{aligned}$$

und dies stimmt mit dem früheren Ergebnis überein.

(b) Wir wollen genauso das unbestimmte Integral, also die Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ermitteln. Die Substitution $x(u) = a \cos u$, $u \in [0, \pi]$, ist streng monoton fallend mit Umkehrfunktion $u(x) = \arccos(x/a)$, $x \in [-a, a]$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= -a \int \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 u} \sin u du \\ &= -a^2 \int \sin^2 u du = -\frac{a^2}{2} \int [1 - \cos(2u)] du \\ &= -\frac{a^2}{2} \left[u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right] = \frac{a^2}{2} (\sin u \cos u - u) \end{aligned}$$

für $u = \arccos(x/a)$. Schreiben wir $\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - x^2/a^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{x}{a} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - \arccos(x/a) \right] \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2} \arccos(x/a).\end{aligned}$$

Dies stimmt nicht mit der Stammfunktion von Beispiel 6.17, (b) überein, sondern unterscheidet sich um den Term $\frac{a^2}{2} [\arccos(x/a) + \arcsin(x/a)]$. Wie wird dieser scheinbare Widerspruch aufgeklärt? Ganz einfach, denn die Differenz ist konstant: Sei $\varphi \in [0, \pi]$. Dann ist $\varphi - \pi/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $\sin(\varphi - \pi/2) = -\cos \varphi$ nach dem Additionstheorem. Der Sinus und der Arkussinus als Umkehrfunktion sind definiert auf $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \leftrightarrow [-1, +1] : \arcsin$ und analog $\cos : [0, \pi] \leftrightarrow [-1, +1] : \arccos$. Also ist $\varphi - \pi/2 = \arcsin(-\cos \varphi) = -\arcsin(\cos \varphi)$ und $\varphi = \arccos(\cos \varphi)$. Setzt man $t = \cos \varphi$, so erhält man hieraus $\arccos t = \pi/2 - \arcsin t$ für $t \in [-1, +1]$. Also ist $\arccos t + \arcsin t = \pi/2$, also konstant.

Benutzt man in diesem Beispiel die Substitution $x(u) = a \sin u$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, so erhält man genau die Stammfunktion von Beispiel 6.17.

Zum Abschluss des Abschnittes listen wir noch einige grundlegende Stammfunktionen auf, verweisen aber auf die Literatur für ihre Herleitung. Sie finden die Liste am Ende des Skripts auf Seite 112.

6.3 Einfache Differentialgleichungen

Im folgenden sei $I \subseteq \mathbb{R}$ stets ein Intervall und $x_0 \in I$ sowie $u_0 \in \mathbb{R}$. Wir können das Integrieren auch als Lösen einer Gleichung

$$\boxed{u'(x) = f(x), \quad x \in I,}$$

auffassen. Die allgemeine Lösung ist dann $u(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + c$. Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist zunächst beliebig und wird durch eine **Anfangsbedingung** etwa $u(x_0) = u_0$ zu gegebenen Werten x_0 und u_0 eindeutig festgelegt. Dies ist der einfachste Fall einer **Differentialgleichung**, d.h. einer Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen. Wir haben schon als ein weiteres Beispiel das exponentielle Wachstum, beschrieben durch die Differentialgleichung $u' = ru$, kennengelernt (s. Kapitel 5). Da das Lösen einer Differentialgleichung auf das Integrieren hinausläuft, sagt man auch (insbesondere in der älteren Literatur), dass man eine Differentialgleichung „integriert“ statt löst.

Beispiele 6.23

(a) Pendelschwingung:

Sei ℓ die Länge des Pendels, m die Masse, $\varphi(t)$ der Winkel der Auslenkung gegenüber der Vertikalen zur Zeit t , und sei g die Erdbeschleunigung. Das Newtonsche Bewegungsgesetz besagt: $m \ell \ddot{\varphi}(t) = -R = \text{Rückstellkraft}$, diese ist: $R = mg \sin \varphi(t)$. Also erhält man:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \sin \varphi(t) = 0.$$

Dies ist eine **nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung** für φ . Für kleine Winkel ist $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$, dann erhält man die linearisierte Pendelgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \varphi(t) = 0.$$

Man erstelle selbst eine Skizze zu dieser Situation. Wir werden später noch sehen, dass alle Lösungen dieser Differentialgleichung durch

$$\varphi(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

gegeben sind mit **Frequenz** $\omega = \sqrt{g/\ell}$ und beliebigen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Beachte, dass wir mit der komplexen Exponentialfunktion auch

$$\varphi(t) = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$$

schreiben können, wenn $\lambda = \frac{a-ib}{2}$ und $\mu = \frac{a+ib}{2}$ gesetzt werden (diese sind jetzt komplex).

(b) Elektrischer Schwingkreis:

Der Widerstand sei R , der Kondensator habe die Kapazität C und die Spule die Induktivität L . Eine äußere Spannung $U_a(t)$ werde angelegt. Wie sieht die Stromstärke $I(t)$ aus?

Am Widerstand besagt das Ohmsche Gesetz:

$$U_R(t) = R I(t)$$

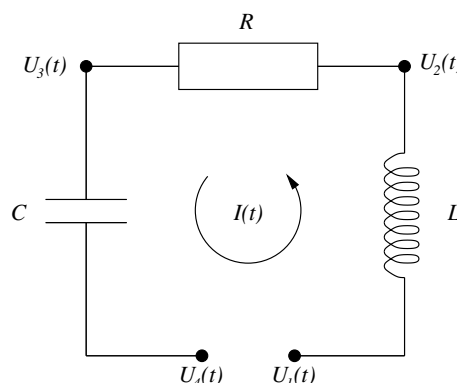
Am Kondensator gilt: $I(t) = C \dot{U}_C(t)$,

An der Spule gilt: $U_L(t) = L \dot{I}(t)$,

Spannungsbilanz: $U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) = U_a(t)$,

Hieraus erhält man:

$$L \ddot{I}(t) + R \dot{I}(t) + \frac{1}{C} I(t) = \dot{U}_a(t).$$



Dies ist eine **lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung** für I mit **konstanten Koeffizienten**, aber zeitabhängiger Inhomogenität U_a . Wenn die äußere Spannung ausgeschaltet wird, also $U_a(t) = 0$ ist, können wir wieder versuchen mit einem Ansatz $I(t) = e^{\lambda t}$, wobei wir $\lambda \in \mathbb{C}$ zulassen, eine Lösung zu finden. Es ergibt sich

$$\underbrace{\left(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} \right)}_{=: p(\lambda)} e^{\lambda t} = 0.$$

Wir erhalten Lösungen der Differentialgleichung aus den Nullstellen des Polynoms $p(\lambda)$.

In diesem Abschnitt betrachten wir nur **Differentialgleichungen erster Ordnung** (d.h. nur die Funktion und ihre erste Ableitung tauchen in der Gleichung auf), die wir in der folgenden Form schreiben:

$$\boxed{u'(x) = f(x, u(x)), \quad x \in I,}$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt oder unbeschränkt) sei. Gegeben sei die Funktion $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von zwei Variablen und gesucht ist eine Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, die die Differentialgleichung löst. Oft ist noch zusätzlich zur Differentialgleichung eine **Anfangsbedingung** $u(x_0) = u_0$ gegeben. Gegeben sei also ein Punkt $x_0 \in I$ und eine Zahl $u_0 \in \mathbb{R}$, und gesucht ist eine Lösung u der Differentialgleichung, die zusätzlich $u(x_0) = u_0$ erfüllt. Wir werden sehen, unter welchen Bedingungen dies vernünftig ist. In diesem Abschnitt wollen wir Methoden besprechen, um einige Typen von Differentialgleichungen lösen zu können.

(A) **Separable Differentialgleichung** haben die Gestalt

$$\boxed{u'(x) = g(x) h(u(x)), \quad x \in I.}$$

mit Funktionen g, h . Hier ist also $f(x, u) = g(x)h(u)$. Die Funktion h habe auf dem Wertebereich von u keine Nullstellen. (Diesen Wertebereich kennen wir natürlich noch nicht, deshalb ist das folgende nur „formal“ zu verstehen, d.h. ohne mathematische Rechtfertigung.) Die Differentialgleichung ist äquivalent zu: $\frac{u'(x)}{h(u(x))} = g(x)$. Für die Stammfunktion $H(z) := \int \frac{1}{h(z)} dz$ von $1/h$ (auf dem Wertebereich von u) folgt

$$\frac{d}{dx} H(u(x)) = H'(u(x)) u'(x) = g(x), \quad \text{also} \quad H(u(x)) = \int_{x_0}^x g(t) dt + c.$$

Wir erhalten u , indem wir die (existierende!) Umkehrfunktion von H benutzen.

Beispiel 6.24

$u'(x) = x u(x)^2$. Hier ist $g(x) = x$ und $h(u) = u^2$. Die Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = x, \quad \text{also zu} \quad -\frac{d}{dx} \frac{1}{u(x)} = x, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{2} x^2 + c.$$

Also ist $u(x) = [c - x^2/2]^{-1}$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir erkennen, dass die Lösung Singularitäten hat, falls $c \geq 0$ ist. Sei zusätzlich eine Anfangsbedingung gegeben, etwa $u(0) = u_0 \neq 0$. Dann ist $c = 1/u_0$. Ist $u_0 < 0$, so hat die Lösung

$$u(x) = \frac{2 u_0}{2 - u_0 x^2}$$

keine Singularitäten. Ist dagegen $u_0 > 0$, so tritt bei $x = \pm \sqrt{2/u_0}$ eine Singularität auf.

Bei diesem Beispiel haben wir gesehen, dass eine Lösung oft nur „lokal um x_0 “ existiert, obwohl alle Daten des Problems glatt sind. Wir werden im nächsten Semester Bedingungen an f angeben, die uns die Existenz in einem vorher bekannten Intervall sichern.

Als Spezialfall von diesem Typ der Differentialgleichung mit getrennten Variablen erhalten wir die **autonome Differentialgleichung**

$$\boxed{u'(x) = h(u(x)).}$$

Ist u_0 Nullstelle von h , so ist die konstante Funktion $u(x) = u_0$ Lösung der Differentialgleichung und heißt **stationäre Lösung**.

Beispiele 6.25 (a) $u'(x) = 1 + u(x)^2$, also $u'(x)/(1 + u(x)^2) = 1$, also $\frac{d}{dx} \arctan u(x) = 1$, d.h. $\arctan u(x) = x + c$, also $u(x) = \tan(x + c)$. Auch hier hat die Lösung Singularitäten.

(b) (Pendelschwingung, s.o.)

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \sin \varphi(t) = 0.$$

Als Anfangsbedingung haben wir $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \varphi_1$. Die Differentialgleichung ist autonom, allerdings von zweiter Ordnung. Wir benutzen folgenden Trick, um sie auf eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung zu reduzieren: Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $\dot{\varphi}(t)$

(unter der Voraussetzung, dass $\dot{\varphi}(t)$ nicht konstant 0 ist, also φ nicht konstant ist). Dann erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{\varphi}(t)^2] - \frac{g}{\ell} \frac{d}{dt} [\cos \varphi(t)] = 0,$$

also $\dot{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{2g}{\ell} \cos \varphi(t) + c}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Aus den Anfangsbedingungen folgt $c = \varphi_1^2 - \frac{2g}{\ell} \cos \varphi_0$. Damit ergibt sich eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{2g}{\ell} [\cos \varphi(t) - \cos \varphi_0] + \varphi_1^2}$$

mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = \varphi_0$. Schreibt man diese Differentialgleichung um in

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{\cos \varphi(t) - \cos \varphi_0 + a^2}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$$

mit $a = \varphi_1 \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$, so ist die Stammfunktion von $\varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0 + a^2}}$ zu finden. Diese Stammfunktionen kann man nicht geschlossen angeben (sie hängen mit den sogenannten „elliptischen“ Integralen zusammen). Daher läßt sich die Differentialgleichung für die Pendelschwingung nicht geschlossen lösen.

Ein weiterer Spezialfall ist die **lineare homogene Differentialgleichung**

$$u'(x) = a(x) u(x), \quad x \in I.$$

Als erstes bemerken wir, dass Summe und Vielfaches einer Lösung dieser Differentialgleichung wieder Lösungen dieser Differentialgleichung sind (Superpositionsprinzip). In anderen Worten: Die Lösungsmenge bildet einen Vektorraum. Schreiben wir die Differentialgleichung um in $\frac{d}{dx} \ln u(x) = a(x)$, so erhalten wir als Lösung

$$u(x) = c e^{A(x)}, \quad x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist und A eine Stammfunktion von a (also $A' = a$).

Satz 6.26

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind alle Lösungen von $u'(x) = a(x)u(x)$, $x \in I$, gegeben durch

$$u(x) = c \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right), \quad x \in I.$$

Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist durch die Anfangsbedingung $u(x_0) = c$ festgelegt.

Beweis: Es ist klar, dass die angegebene Funktion Lösung der Differentialgleichung ist. Sei nun umgekehrt u Lösung der Differentialgleichung. Setze $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$, $x \in I$, und multipliziere die Differentialgleichung mit $\exp(-A(x))$. Dies ergibt:

$$0 = u'(x) e^{-A(x)} - a(x) u(x) e^{-A(x)} = \frac{d}{dx} (u(x) e^{-A(x)})$$

Also ist $u(x) \exp(-A(x))$ konstant, und dies ist die Behauptung. □

(B) Die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\boxed{u'(x) = a(x)u(x) + b(x), \quad x \in I.}$$

Wie wir soeben gesehen haben, wird die homogene Differentialgleichung, also der Fall $b \equiv 0$, durch $u(x) = c \exp(A(x))$ mit beliebiger Konstante c gelöst. Wir suchen eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit der Methode der **Variation der Konstanten**. Diese besteht darin, als Ansatz $\hat{u}(x) = c(x) \exp A(x)$ mit einer Funktion $c = c(x)$ statt einer Konstanten c zu wählen. Mit der Produktformel ausdifferenziert und in die Differentialgleichung eingesetzt ergibt sich: $c(x) = \int_{x_0}^x b(t) \exp(-A(t)) dt$. Damit haben wir eine Lösung

$$\hat{u}(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^x b(t) e^{-A(t)} dt, \quad x \in I,$$

gefunden. Hier ist wieder $x_0 \in I$ beliebig und A eine Stammfunktion von a . Durch Einsetzen in die Differentialgleichung prüft man wieder nach, dass dies eine Lösung ist. Die **allgemeine Lösung** der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich additiv zusammen aus irgendeiner Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung, also allgemein

$$u(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^x b(t) e^{-A(t)} dt + c e^{A(x)}, \quad x \in I,$$

mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Hat man die Anfangsbedingung $u(x_0) = u_0$ gegeben, so ist $c = \exp(-A(x_0)) u_0$.

(C) Als letztes betrachten wir die **Bernoullische Differentialgleichung**

$$\boxed{u'(x) = p(x)u(x) + q(x)u(x)^\alpha, \quad x \in I,}$$

wobei $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen seien und $u_0 > 0$ sei. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$ (weshalb?). Der Ansatz $u(x) = v(x)^\lambda$ mit einer Funktion v und einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ führt auf

$$\lambda v'(x) = p(x)v(x) + q(x)v(x)^{\lambda\alpha - \lambda + 1}.$$

Bestimme jetzt λ so, dass $\lambda\alpha - \lambda + 1 = 0$, also $\lambda = 1/(1 - \alpha)$. Dies liefert den Ansatz $u(x) = v(x)^{1/(1-\alpha)}$ und führt auf die lineare Differentialgleichung

$$v'(x) = (1 - \alpha)p(x)v(x) + (1 - \alpha)q(x), \quad x \in I,$$

mit der Anfangsbedingung $v(x_0) = u_0^{1-\alpha}$. Man beachte, dass die Lösung v dieser linearen Differentialgleichung nur dann eine Lösung $u = v^{1/(1-\alpha)}$ liefert, falls $v(x) > 0$ ist!

Beispiel 6.27

Gesucht ist die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x} + \frac{x}{u(x)}, \quad x > 0$$

mit Anfangsbedingung $u(1) = 1$. Hier ist $\alpha = -1$, also machen wir den Ansatz $u = \sqrt{v}$. Dies führt auf die lineare, inhomogene Differentialgleichung $v'(x) = 2v(x)/x + 2x$, $x > 0$, mit der Anfangsbedingung $v(1) = 1$. Die zugehörige homogene Gleichung ist $v'(x) = 2v(x)/x$ und wird gelöst durch $v(x) = cx^2$. (Wie kommt man darauf?) Die inhomogene Differentialgleichung löst man durch die Methode der Variation der Konstanten, macht also den Ansatz $v(x) = c(x)x^2$. Dies führt schließlich auf die Lösung der Differentialgleichung für v mit der Anfangsbedingung $v(1) = 1$ in der Form $v(x) = x^2(2 \ln x + 1)$ (Kontrolle!). Wegen der Bedingung $v > 0$ muß x eingeschränkt werden auf $2 \ln x + 1 > 0$, also $x > e^{-1/2}$. Daher ist die Lösung u der Bernoullischen Gleichung mit der Anfangsbedingung $u(1) = 1$ gegeben durch $u(x) = x\sqrt{2 \ln x + 1}$, $x > e^{-1/2}$.

6.4 Partialbruchzerlegung

In diesem Abschnitt wollen wir systematisch die Stammfunktionen von rationalen Funktionen konstruieren. Zu integrieren sind also Funktionen der Form: $f(x) = p(x)/q(x)$, wobei p und q Polynome sind.

Beispiel 6.28 Wir betrachten das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + x - 1}.$$

Zunächst führen wir eine **Polynomdivision** durch, sodass der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist. Im Beispiel ist dies:

$$\begin{array}{r} (x^4 + + 2x^2 + 1) : (x^2 + x - 1) = x^2 - x + 4 + \text{Rest} \\ \underline{x^4 + - x^2} \\ -x^3 + 3x^2 + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2 + x} \\ 4x^2 - x + 1 \\ \underline{4x^2 + 4x - 4} \\ -5x + 5 \end{array}$$

Also haben wir die Darstellung

$$f(x) = (x^2 - x + 4) - 5 \frac{x - 1}{x^2 + x - 1} = r(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}.$$

Die Stammfunktion des Polynoms $r(x) = x^2 - x + 4$ kennen wir, $\int r(x) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$. Wir müssen also nur noch den Rest $\tilde{p}(x)/q(x)$ betrachten.

Die Nullstellen des Nennerpolynoms, $q(x) = x^2 + x - 1$ sind $x_{1,2} := -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ also ist $x^2 + x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$.

Jetzt versuchen wir eine **Partialbruchzerlegung**, d.h. den Ansatz

$$\frac{x - 1}{x^2 + x - 1} = \frac{x - 1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{(A + B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Ein Koeffizientenvergleich im Zähler liefert $A + B = 1$ und $Ax_2 + Bx_1 = 1$. Aus diesem linearen Gleichungssystem lassen sich A und B bestimmen.

Wegen $x_1 \neq x_2$ geht dies auch einfacher: Multiplikation der Gleichung mit $x - x_1$ erlaubt es, die Stelle $x = x_1$ einzusetzen, und wir erhalten

$$A = \frac{x_1 - 1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Analog folgt nach Multiplikation mit $x - x_2$ und Einsetzen von $x = x_2$,

$$B = \frac{x_2 - 1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Nun können wir die auftretenden Summanden integrieren.

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + x - 1} dx = A \int \frac{1}{x - x_1} dx + B \int \frac{1}{x - x_2} dx = A \ln |x - x_1| + B \ln |x - x_2|$$

für $x \notin \{x_1, x_2\}$. □

Dieses Beispiel lässt sich allgemein auf die Integration von rationalen Funktionen der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ übertragen, wobei wir voraussetzen, dass p und q Polynome mit reellen Koeffizienten sind.

Partialbruchzerlegung:

1. Schritt: Gegebenenfalls mit einer Polynomdivision erreichen wir stets eine Darstellung

$$f(x) = g(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)},$$

mit Polynomen g und $\tilde{p}$, wobei der Grad von $\tilde{p}$ kleiner ist als der Grad von q . Da g sich problemlos integrieren lässt, betrachten wir im Folgenden den Quotienten $\tilde{p}/q$.

2. Schritt: Es ist das Nennerpolynom zu faktorisieren. Also müssen die Nullstellen von q bestimmt werden. Eine vollständige Faktorisierung in lineare Terme ist aber nur in $\mathbb{C}$ möglich, d.h. $q(x) = c \prod_{j=1}^M (x - x_j)^{k_j}$ mit $c \neq 0$ und $x_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, M$ mit $\sum_{j=1}^M k_j = n$, wenn n den Grad von q bezeichnet.

Da q reelle Koeffizienten besitzt, gilt aber für eine Nullstelle z_0

$$q(\overline{z_0}) = \sum_{j=0}^n q_j \overline{z_0}^j = \overline{\sum_{j=0}^n q_j z_0^j} = \overline{q(z_0)} = 0.$$

Also ist $\overline{z_0}$ auch Nullstelle von q und die beiden entsprechenden Faktoren lassen sich durch $(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)x + |z_0|^2$ zu einem quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten zusammenfassen. Wenn wir alle komplexen Nullstellen so behandeln, erhalten wir eine Darstellung

$$q(x) = c \prod_{j=1}^K (x - x_j)^{k_j} \prod_{j=1}^L (x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{l_j}$$

mit $c, x_j, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$ und $\sum_{j=1}^K k_j + 2 \sum_{j=1}^L l_j = n$.

3. Schritt: Nun werden im folgenden Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} &= \sum_{j=1}^K \left(\frac{A_{j1}}{x - x_j} + \frac{A_{j2}}{(x - x_j)^2} + \dots + \frac{A_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^L \left(\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + \alpha_j x + \beta_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^2} + \dots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{l_j}} \right) \end{aligned}$$

durch Koeffizientenvergleich in den Zählern die Unbekannten A_{ji}, B_{ji}, C_{ji} bestimmt, nachdem der rechte Ausdruck auf den gemeinsamen Nenner gebracht ist. Im obigen Beispiel haben wir eine einfachere Methode kennengelernt, die bei $k_j = 1$ für alle j zum Erfolg führt.

Bemerkung: Durch Induktion nach n lässt sich zeigen, dass eine solche Zerlegung stets möglich ist.

4. Schritt: Schließlich müssen die einzelnen Summanden integriert werden. Dazu bestimmen wir

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^j} dx = \begin{cases} \ln |x - x_0|, & \text{für } j = 1 \\ \frac{1}{1-j} \frac{1}{(x - x_0)^{j-1}}, & \text{für } j \geq 2, \end{cases}$$

und mit den Substitutionen $u = x^2 + \alpha x + \beta$ und $v = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} dx + \left(C - \frac{B}{2}\alpha\right) \int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta} dx \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{1}{u} du + \frac{2C-B\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \int \frac{1}{1+v^2} dv \\ &= \frac{B}{2} \ln(x^2+\alpha x+\beta) + \frac{2C-B\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \arctan\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right).\end{aligned}$$

Für $l \geq 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^l} dx &= \frac{-B}{2(l-1)(x^2+\alpha x+\beta)^{l-1}} \\ &+ \frac{2C-B\alpha}{2(l-1)(4\beta-\alpha^2)} \left[\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^{l-1}} + 2(2l-3) \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{l-1}} dx \right]\end{aligned}$$

mit denselben Substitutionen und partieller Integration des Integrals $\int 1 \cdot \frac{1}{(1+v^2)^{l-1}} dv$.

Beispiel 6.29 Gesucht ist eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 2x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}.$$

Im ersten Schritt ist bei diesem Beispiel nichts zu tun, da der Grad des Zählers schon kleiner als der Grad des Nenners ist. Weiter gilt $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1)$. Für die Partialbruchzerlegung machen wir also den Ansatz

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B-A-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (B-A+D)}{(x-1)^2(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt die linearen Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrrr} A & & + & C & & = & 2, \\ -A & + & B & - & 2C & + & D = -2, \\ A & & + & C & - & 2D & = 2, \\ -A & + & B & & + & D & = 0.\end{array}$$

Durch den Gauß-Algorithmus bringen wir das System auf die Form

$$\begin{array}{rrrrrr} A & & + & C & & = & 2, \\ & + & B & - & C & + & D = 0, \\ & & & & 2C & & = 2, \\ & & & & & -2D & = 0,\end{array}$$

aus der sich die Lösung $A = B = C = 1$, $D = 0$ ablesen lässt. Es folgt

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

Nun können wir integrieren und erhalten die Stammfunktion

$$\int f(x) dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

□

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung lässt sich die Stammfunktion nach entsprechender Substitution auch zu anderen rationalen Ausdrücken bestimmen.

Beispiele 6.30 (a) Um Stammfunktionen zu Quotienten von trigonometrischen Funktionen zu bestimmen, ist die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ nützlich. Es gilt u.a.

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right).$$

So ergibt sich mit $t = \tan(x/2)$ etwa

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = 2 \int \frac{1}{1 + 2t - t^2} dt$$

Die beiden Nullstellen des Nenners sind $1 \pm \sqrt{2}$ und die Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{1 + 2t - t^2} = \frac{A}{t - (1 + \sqrt{2})} + \frac{B}{t - (1 - \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t - (1 - \sqrt{2})} - \frac{1}{t - (1 + \sqrt{2})} \right).$$

Wir erhalten die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{|\tan(x/2) - (1 - \sqrt{2})|}{|\tan(x/2) - (1 + \sqrt{2})|} \right).$$

(b) Analog lassen sich mit der Partialbruchzerlegung und der Substitution $t = e^x$ Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in e^x bestimmen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(e^x - 1)^2} dx &= \int \frac{1}{t(t-1)^2} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right) dt \\ &= x - \ln |e^x - 1| - \frac{1}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

□

6.5 Integration über unbeschränkte Intervalle und/oder Funktionen

Wichtige Integraltransformationen wie die Fourier- oder Laplacetransformation haben unbeschränkte Integrationsgebiete, etwa $(-\infty, \infty)$ bzw. $(0, \infty)$. Wir wollen daher den Integralbegriff genauer betrachten. Dazu benötigen wir Folgen von Funktionen. Folgen von Treppenfunktionen und deren Konvergenz haben wir schon kennengelernt. Allgemein halten wir folgende Definitionen fest.

Definition 6.31 Gegeben seien Funktionen $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, auf einem (beschränkten oder unbeschränkten) Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

(a) Die Folge (f_j) heißt **monoton wachsend (fallend)**, wenn

$$f_{j+1}(x) \geq f_j(x) \quad (f_{j+1}(x) \leq f_j(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

(b) Die Folge (f_j) heißt **punktweise konvergent**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) =: f(x)$$

für jedes $x \in I$ existiert.

(c) Analog sprechen wir von **fast überall konvergent** (bzw. **monoton**), wenn die Bedingungen in (a) bzw. (b) für fast alle $x \in I$ gelten, d.h. außerhalb einer Nullmenge.

Bemerkung: Weitere Konvergenzbegriffe zu Funktionenfolgen sind wichtig und müssen unterschieden werden. So ist etwa Konvergenz für Folgen stetiger Funktionen auf einem Intervall I bezüglich der *Maximumsnorm*,

$$\|f\|_{\infty} := \max\{|f(x)| : x \in I\}$$

ein strengerer Begriff als die punktweise Konvergenz fast überall. Es gibt also Folgen, die zwar punktweise fast überall konvergieren, aber nicht in der Maximumsnorm. Zum Beispiel konvergiert $f_j(x) = x^j$ auf $[0, 1]$ punktweise fast überall gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$, aber $\|f_j - f\|_{\infty} = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Konvergenz in der Maximumsnorm wird auch **gleichmäßige Konvergenz** genannt.

Wie aus der Definition zu erwarten, ist *punktweise Konvergenz fast überall* eine nützliche Eigenschaft in der Klasse der integrierbaren Funktionen. Der folgende grundlegende Satz der Lebesgue-Theorie zeigt dies deutlich.

Satz 6.32 (*Beppo-Levi*)

Sei (f_j) eine fast überall monotone Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen in $L(I)$, und die Folge der Integrale $\left(\int_I f_j dx\right)$ sei in $\mathbb{R}$ beschränkt. Dann konvergiert (f_j) fast überall gegen eine Funktion $f \in L(I)$ und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_I f_j dx = \int_I f dx.$$

Für den Beweis des Satzes verweisen wir wiederum auf die Literatur. Die Aussage liefert uns ein Kriterium, um Integrierbarkeit zu zeigen und den Wert eines Integrals zu bestimmen.

Satz 6.33 Gegeben seien eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und Intervalle $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}$ mit $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Wenn $f \in L(I_j)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt und die Folge $\left(\int_{I_j} |f| dx\right)$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $f \in L(I)$ und es gilt

$$(*) \quad \int_I f dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{I_j} f dx.$$

Umgekehrt gilt auch: Ist $f \in L(I)$ so auch $f \in L(I_j)$ für jedes j , und $(*)$ gilt.

Beweis: Zunächst sei $f \geq 0$ auf I und wir definieren

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(f_j) konvergiert punktweise und monoton gegen f . Da die Folge

$$\left(\int_I f_j dx\right) = \left(\int_{I_j} f dx\right)$$

beschränkt ist, folgt nach dem Satz von Beppo-Levi, dass $f \in L(I)$ Lebesgue integrierbar ist und

$$\int_I f \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{I_j} f \, dx.$$

Ist nun $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig, so schreiben wir $f = f^+ - f^-$ mit

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{für } f(x) < 0 \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{für } f(x) < 0. \end{cases}$$

Anwendung des Resultats aus dem ersten Teil auf f^+ und f^- impliziert die Behauptung. $\square$

Beispiele 6.34 (a) Wir berechnen die **Laplacetransformation** der Funktion $f(x) = x$, d.h.

$$\int_0^\infty x e^{-tx} \, dx,$$

wobei $t > 0$ ein fester Parameter ist. Für den Nachweis der Integrierbarkeit betrachten wir das Integral über $[0, c]$ und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \int_0^c \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{e^{-tx}}_{v'(x)} \, dx &= -\frac{1}{t} x e^{-tx} \Big|_0^c + \frac{1}{t} \int_0^c e^{-tx} \, dx = -\frac{1}{t} c e^{-tc} - \frac{1}{t^2} e^{-tx} \Big|_0^c \\ &= -\frac{1}{t} c e^{-tc} - \frac{1}{t^2} e^{-tc} + \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

Wegen $t > 0$ konvergiert für $c \rightarrow \infty$ der zweite Ausdruck gegen 0. Der erste Ausdruck konvergiert auch gegen 0. Dies folgt aus der L'Hospital'schen Regel, denn

$$\lim_{c \rightarrow \infty} c e^{-tc} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c}{e^{tc}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{t e^{tc}} = 0.$$

Daher ist $x \mapsto x e^{-tx}$ Lebesgue-integrierbar und wir erhalten

$$\int_0^\infty x e^{-tx} \, dx = \frac{1}{t^2}, \quad t > 0.$$

(b) Mit der Regel von L'Hospital erhalten wir für die Berechnung von $\int_0^1 \ln x \, dx$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x \ln x - x) \Big|_\varepsilon^1 = -1 - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) \rightarrow -1$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Also ist $\ln \in L(0, 1)$ mit $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$. $\square$

Bemerkung: Auch wenn die Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen recht umfassend ist, gibt es Situationen, in denen der Begriff nicht ausreicht. Zum Beispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ **nicht** Lebesgue-integrierbar auf $I = (0, \infty)$, denn aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt

$$\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx \geq \sum_{j=1}^n \int_{(j-\frac{3}{4})\pi}^{(j-\frac{1}{4})\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, dx \geq \sum_{j=1}^n \frac{\sin \frac{1}{4}\pi}{2(j-\frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j-\frac{1}{4}} \rightarrow \infty$$

für $n \rightarrow \infty$. Beachte, dass nach der L'Hospitalschen Regel $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$ gilt. Daher ist $\frac{\sin x}{x}$ auf dem kompakten Intervall $[0, n\pi]$ stetig, also integrierbar.

Der in der Signalverarbeitung wichtige Grenzwert

$$S = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert aber dennoch und wird als ein **uneigentliches Integral** bezeichnet. An dieser Stelle können wir nur die Existenz zeigen und noch nicht den Wert berechnen. Wir definieren zunächst

$$S_n := \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und zeigen, dass die Folge (S_n) monoton steigend und beschränkt ist. Es gilt

$$S_{n+1} - S_n = \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Im ersten Integranden substituieren wir $x = 2n\pi + t$ und im zweiten $x = (2n+1)\pi + t$. Mit $\sin(2n\pi + t) = \sin t$ und $\sin((2n+1)\pi + t) = -\sin t$ folgt

$$S_{n+1} - S_n = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin t \left(\frac{1}{2n\pi + t} - \frac{1}{(2n+1)\pi + t} \right)}_{\geq 0} dt \geq 0.$$

Also ist (S_n) monoton steigend. Ferner ist (S_n) nach oben beschränkt, da

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \sum_{m=1}^{n-1} (S_{m+1} - S_m) \\ &\leq S_1 + \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2m\pi + t} - \frac{1}{(2m+1)\pi + t} \right) dt \\ &= S_1 + \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{(2m\pi + t)((2m+1)\pi + t)} dt \\ &\leq S_1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\pi^2}{(2m\pi)^2} \leq S_1 + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

gilt. Somit konvergiert die Folge (S_n) gegen ein $S \in \mathbb{R}$.

Sei jetzt (c_ℓ) eine beliebige Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $c_\ell \rightarrow \infty$. Zu jedem ℓ gibt es ein $n_\ell \in \mathbb{N}$ mit $c_\ell \in [2n_\ell\pi, 2(n_\ell+1)\pi)$. Wegen $c_\ell \rightarrow \infty$ gilt auch $n_\ell \rightarrow \infty$. Außerdem ist

$$\int_0^{c_\ell} \frac{\sin x}{x} dx = S_{n_\ell} + \int_{2n_\ell\pi}^{c_\ell} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Die Folge (S_{n_ℓ}) konvergiert gegen S , und das zweite Integral gegen 0 wegen

$$\left| \int_{2n_\ell\pi}^{c_\ell} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_{2n_\ell\pi}^{c_\ell} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leq \int_{2n_\ell\pi}^{c_\ell} \frac{1}{2n_\ell\pi} dx \leq \frac{1}{n_\ell} \rightarrow 0, \ell \rightarrow \infty.$$

Daher konvergiert $\left(\int_0^{c_\ell} \frac{\sin x}{x} dx \right)$ gegen S , und das uneigentliche Integral existiert.

b) Ein weiteres Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Funktion f ist auf $I = (-1, 1)$ **nicht** Lebesgue-integrierbar und das uneigentliche Integral auf $(-1, 0)$ oder $(0, 1)$ existiert auch nicht. Aber unter Ausnutzung der Symmetrie existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

Solche Grenzwerte, bei denen der Limes symmetrisch um eine Stelle (hier $x_0 = 0$) zu betrachten ist, werden **Cauchysche Hauptwerte** genannt.

6.6 Numerische Integration

Für die meisten Funktionen kann keine Stammfunktion geschlossen angegeben werden. Bekannte Beispiele dafür sind wie oben erwähnt $f(x) = \exp(-x^2)$ oder $f(x) = [1 - a \cos x]^{-1/2}$, wobei $|a| < 1$ vorauszusetzen ist. Trotzdem ist es häufig notwendig, das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ zumindest näherungsweise zu berechnen. Wir besprechen kurz zwei wichtige Verfahren.

(a) **Trapezregel:** Sei $n \in \mathbb{N}$, $h := (b-a)/n$ und $x_j = a + jh$ für $j = 0, 1, \dots, n$, also eine *äquidistante* Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle. Auf dem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ ersetze f durch die Gerade g , die durch die Punkte $(x_j, f(x_j))$ und $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ verläuft und integriere diese statt f . Die *interpolierende* Gerade g hat die Form

$$g(x) = \frac{x - x_j}{h} f(x_{j+1}) + \frac{x_{j+1} - x}{h} f(x_j), \quad \text{also} \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_j) + f(x_{j+1})].$$

Aufsummiert über alle Teilintervalle ergibt dies die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2} f(b) \right] + E_h(f).$$

Satz 6.35 Der Fehler $E_h(f)$ bei der zusammengesetzten Trapezregel lässt sich abschätzen durch

$$|E_h(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|,$$

falls $f \in C^2[a, b]$.

Beweis: Sei $x \in [x_j, x_{j+1}]$ und

$$R_j(x) = g(x) - f(x) = \frac{x - x_j}{h} [f(x_{j+1}) - f(x)] + \frac{x_{j+1} - x}{h} [f(x_j) - f(x)]$$

der Fehler. Wir können ihn mit dem zweiten Hauptsatz (und danach zweimaliger partieller Integration) schreiben als

$$\begin{aligned} R_j(x) &= \frac{x - x_j}{h} \int_x^{x_{j+1}} f'(t) dt - \frac{x_{j+1} - x}{h} \int_{x_j}^x f'(t) dt \\ &= \frac{x - x_j}{h} \left[(t - x_{j+1}) f'(t) \Big|_{t=x}^{t=x_{j+1}} - \int_x^{x_{j+1}} (t - x_{j+1}) f''(t) dt \right] \\ &\quad - \frac{x_{j+1} - x}{h} \left[(t - x_j) f'(t) \Big|_{t=x_j}^{t=x} - \int_{x_j}^x (t - x_j) f''(t) dt \right] \\ &= \frac{x - x_j}{h} \int_x^{x_{j+1}} (x_{j+1} - t) f''(t) dt + \frac{x_{j+1} - x}{h} \int_{x_j}^x (t - x_j) f''(t) dt. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung $\|f''\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ und erhalten

$$|R_j(x)| \leq \frac{x - x_j}{h} \|f''\|_\infty \int_x^{x_{j+1}} (x_{j+1} - t) dt + \frac{x_{j+1} - x}{h} \|f''\|_\infty \int_{x_j}^x (t - x_j) dt.$$

Wir können die beiden verbleibenden Integrale leicht ausrechnen als

$$\int_x^{x_{j+1}} (x_{j+1} - t) dt = \frac{1}{2} (x - x_{j+1})^2, \quad \int_{x_j}^x (t - x_j) dt = \frac{1}{2} (x - x_j)^2,$$

und erhalten

$$|R_j(x)| \leq \frac{1}{2h} \|f''\|_\infty [(x - x_j)(x_{j+1} - x)^2 + (x - x_j)^2(x_{j+1} - x)].$$

Jetzt integrieren wir diesen Fehler und erhalten (nachrechnen)

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |R_j(x)| dx \leq \frac{h^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

Schließlich müssen wir das Ganze noch über alle Teilintervalle summieren und erhalten dann

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |R_j(x)| dx \leq n \frac{h^3}{12} \|f''\|_\infty = \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty,$$

und dies war zu zeigen. □

(b) **Simpsonregel:** Sei $n \in \mathbb{N}$ **gerade**, $h := (b-a)/n$, $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$. Auf $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ approximiere f durch die Parabel durch die Punkte $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$, $(x_j, f(x_j))$ und $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$. Wir erhalten

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(b)] + E_h(f)$$

mit der Fehlerabschätzung:

$$|E_h(f)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|, \quad \text{falls } f \in C^4[a, b].$$

Diese Simpsonregel wird sehr häufig benutzt!

Beispiele: (a) Wir testen die beiden Näherungsformeln am Integral

$$\int_0^1 e^{-4x} dx = \frac{1}{4} (1 - e^{-4}),$$

und erhalten für die Fehler:

n	Trapezregel	Simpsonregel
4	$2.0119e-2$	$1.2166e-3$
8	$5.0918e-3$	$8.2744e-5$
16	$1.2769e-3$	$5.2866e-6$
32	$3.1948e-4$	$3.3226e-7$
64	$7.9884e-5$	$2.0795e-8$

Sehr schön ist zu sehen, dass bei Verdopplung von n , also Halbierung von h , der Fehler bei der Trapezregel um $1/4$ und bei der Simpsonregel um $1/16$ zurückgeht.

(b) Jetzt testen wir die beiden Näherungsformeln am Integral

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3},$$

und erhalten für die Fehler:

n	Trapezregel	Simpsonregel
4	$2.3384e-2$	$1.0140e-2$
8	$8.5364e-3$	$3.5874e-3$
16	$3.0855e-3$	$1.2685e-3$
32	$1.1077e-3$	$4.4848e-4$
64	$3.9586e-4$	$1.5856e-4$

Hier konvergieren die Näherungswerte sehr viel langsamer, da die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ nicht mehr differenzierbar ist. Die Glattheitsvoraussetzungen der Fehlerabschätzungen an die Funktion f sind also keine „mathematischen Spitzfindigkeiten“, sondern werden sogar vom Computer „erkannt“.

Die folgenden Formeln gelten für jedes Intervall, auf dem die Stammfunktionen auf der rechten Seite definiert sind.

$\int 1 \, dx = x \quad \text{auf } \mathbb{R}$	
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{auf } \begin{cases} (-\infty, +\infty), & \text{falls } \alpha \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{falls } \alpha = -2, -3, \dots, \\ (0, +\infty), & \text{falls } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \end{cases}$	
$\int \frac{dx}{x} = \ln x \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\int e^x \, dx = e^x \quad \text{auf } \mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x \quad \text{auf } \mathbb{R}$	$\int \sin x \, dx = -\cos x \quad \text{auf } \mathbb{R}$
$\int \cosh x \, dx = \sinh x \quad \text{auf } \mathbb{R}$	$\int \sinh x \, dx = \cosh x \quad \text{auf } \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad \text{auf } \mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arsinh} x \quad \text{auf } \mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{auf } (-1, +1)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Arcosh} x & \text{auf } (+1, +\infty) \\ -\operatorname{Arcosh}(-x) & \text{auf } (-\infty, -1) \end{cases}$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \quad \text{auf } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \quad \text{auf } (0, \pi)$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x \quad \text{auf } \mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x \quad \text{auf } \mathbb{R}$
$\int \tan x \, dx = -\ln \cos x \quad \text{auf } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\int \cot x \, dx = \ln \sin x \quad \text{auf } (0, \pi)$
$\int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) \quad \text{auf } \mathbb{R}$	$\int \coth x \, dx = \ln \sinh x \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Index

- abgeschlossene Menge, 36
- abgeschlossenes Intervall, 4
- Ableitung, 65
 - der Umkehrabbildung, 69
 - Kettenregel, 68
 - Produktregel, 68
 - Quotientenregel, 68
 - Tabelle, 72
 - Tangente, 73
- Abschätzungen, 9
- absolut konvergent, 44
- Additionstheoreme, 15, 57
- allgemeine harmonische Reihe, 41
- allgemeine Lösung, 60, 101
- alternierende Reihe, 44
- analytische Funktion, 58
- Anfangsbedingung, 98
- Anfangswertaufgabe, 101
- Arcuskosinus, 14
- Argument, 14
 - Bestimmung des Hauptwerts, 14
- beschränkte Menge, 36
- Beschränktheit
 - einer Folge, 17
 - einer Reihe, 40
- Besselfunktion, 54
- Betrag, 10, 14
- Beweis
 - durch vollständige Induktion, 7
 - durch Widerspruch, 7
 - indirekt, 7
- bijektiv, 31
- Bild, 26
- Binomialkoeffizient, 6, 81
- binomische Formel, 8, 81
- Cauchy Produkt, 49
- Cauchyscher Hauptwert, 109
- Definitionsmenge, 26
- Differential, 73
- Differentialgleichung, 97
 - erster Ordnung, 98
 - autonome, 99
 - Bernoullische, 101
 - lineare homogene, 100
 - lineare inhomogene, 101
 - separabel, 99
- Differentialquotient, 65, 96
- Differentiation, 65
 - der Umkehrabbildung, 69
 - Kettenregel, 68
 - Produktregel, 68
 - Quotientenregel, 68
 - Tabelle, 72
 - Tangente, 73
- Differenzierbarkeit, 65, 66, 70
- direktes Produkt von Mengen, 27
- Divergenz
 - einer Folge, 17
 - einer Reihe, 40
- Drehstreckung, 27
- Dreiecksungleichung, 10, 16, 88
- Durchschnittssatz, 23
- Einheitswurzeln, 61
- Einschließungskriterium, 21
- elektrischer Schwingkreis, 98
- Element, 3
 - konjugiertes, 15
- Ellipse, 70
- Entwicklung eines Polynoms, 29
- Entwicklungspunkt, 51
- Eulersche Formel, 57
- Eulersche Zahl, 25, 42
- Exponentialfunktion, 48, 54
- Exponentialreihe, 42
- Extremum, 75
- Extremwertaufgabe, 74
- Fakultät, 6
- fast überall, 84
- Folge, 17
 - der Partialsummen, 40
 - geometrische, 19
 - Grenzwertkandidat, 21
 - Nullfolge, 18
 - Rechenregeln, 21
 - Teilfolge, 23
- Frequenz, 98
- Fundamentalsatz der Algebra, 30, 38
- Funktion, 26
 - Ableitung, 65

- analytische, 58
- Bild einer, 26
- differenzierbare, 65, 66
- Extremum einer, 75
- gerade, 57
- gleichmäßig stetig, 35
- Graph einer, 26, 73
- Komposition, 30
- Lipschitz-stetig, 34
- Monotonie einer, 77
- stetige, 32
- Umkehrfunktion, 30, 62
- ungerade, 57
- Funktionalgleichung, 50
- Funktionenfolge
 - fast überall konvergent, 105
 - monoton fallend, 105
 - monoton wachsend, 105
 - punktweise konvergent, 105
- Funktionslimes, 35
- geometrische
 - Folge, 19
 - Reihe, 41
 - Summenformel, 5
- gleichmäßig stetig, 35
- Grad, 28
- Graph, 26, 73
- Grenzwert, 17, 21
 - Rechenregeln, 21
- Häufungspunkt, 23
- harmonische Reihe, 41, 107
- Hauptsatz
 - erster, 91
 - zweiter, 92
- Hauptwert, 14, 60, 61
- hyperbolische Kosinusfunktion, 56
- hyperbolische Sinusfunktion, 56
- Identitätssatz, 55
- imaginäre Einheit, 11
- imaginäre Zahlen, 14
- Imaginärteil, 11
- Indexverschiebung, 5
- indirekter Beweis, 7
- injektiv, 31
- Integral
 - bestimmtes, 92
 - Lebesgue, 86
 - unbestimmtes, 92
- Integration
 - durch Substitution, 95
 - partielle, 94
 - wichtige Stammfunktionen, 112
- Intervall, 4
- Intervallhalbierungsverfahren, 89
- kartesische Koordinaten, 14
- Kettenregel, 68
- Koeffizienten, 28, 51
- Koeffizientenvergleich, 55
- kompakte Menge, 36
- komplexe Zahlen, 11
 - Argument und Betrag, 14
 - Bestimmung des Arguments, 14
 - Division, 16
- komplexe Zahlenebene, 14
- Komposition, 30
- konjugiertes Element, 15
- Konvergenz
 - absolute, 44
 - einer Folge, 17
 - einer Potenzreihe, 52
 - einer Reihe, 40
 - einer Taylorreihe, 82
 - gleichmäßige, 106
 - quadratische, 25
- Konvergenzkreis, 52
- Konvergenzkriterien
 - Bolzano–Weierstraß, 23
 - Einschließungskriterium, 21
 - Leibniz-Kriterium, 44
 - Majorantenkriterium, 20, 43
 - Monotoniekriterium, 24, 43
 - Quotientenkriterium, 46, 47
 - Wurzelkriterium, 47, 48
- Konvergenzradius, 52
- Koordinaten
 - kartesische, 14
 - polare, 14
- Kosinusfunktion, 56
- Kotangens, 59
- kritischer Punkt, 76
- L'Hospitalsche Regel, 78
- Landau-Symbole, 83
- Laplacetransformation, 107
- leere Menge, 3

- Leibniz-Kriterium, 44
- Limes, 17
 - Rechenregeln, 21
- Lipschitz-stetig, 34
- Majorantenkriterium, 20, 43
- Maximum, 36, 75
- Menge, 3
 - leere, 3
 - Nullmenge, 84
 - Teilmenge, 3
- Minimum, 36, 75
- Mittelwertsatz
 - der Differentialrechnung, 76
 - der Integralrechnung, 90
 - verallgemeinerter, 76
- monoton fallend, 24
- monoton wachsend, 24
- Monotonie
 - einer Folge, 24
 - einer Funktion, 31, 59, 62, 77
 - einer Reihe, 40
 - streng, 24, 31, 62, 77
- Monotoniekriterium, 24, 43
- Nullfolge, 18
- Nullmenge, 84
- Nullstelle, 28
- offene Menge, 36
- offenes Intervall, 4
- Partialbruchzerlegung, 102, 103
- Partialsummen, 40
- Pendelschwingung, 97, 99
- Phase, 14
- Polarkoordinaten, 14
- Polynom
 - faktorisieren, 103
- Polynomdivision, 102
- Polynome, 28
 - Entwicklung, 29
- Potenzreihe, 51
 - Differenzierbarkeit, 70
 - Konvergenz, 52
 - Rechenregeln, 55
- Produktregel, 68
- Produktzeichen, 6
- quadratische
 - Ergänzung, 13
 - Gleichung, 13
 - Konvergenz, 25
- Quotientenkriterium, 46, 47
- Quotientenregel, 68
- Realteil, 11
- Reihe, 40
 - allgemeine harmonische, 41
 - alternierende, 44
 - beschränkt, 40
 - Exponentialreihe, 42
 - geometrische, 41
 - harmonische, 41
 - konvergente, 40
 - Potenzreihe, 51
 - Taylorreihe, 82
- Restglieddarstellung
 - Integralform, 95
 - von Lagrange, 80
- Satz
 - von Beppo-Levi, 106
- Satz von Rolle, 76
- Sekantensteigung, 34
- Simpsonregel, 111
- Sinusfunktion, 56
- Stammfunktion, 91, 112
- stationäre Lösung, 99
- stetig fortsetzbar, 33
- Stetigkeit, 32
 - Gleichmäßige, 35
 - Lipschitz, 34
 - Umkehrfunktion, 38
- streng monoton, 24, 31, 62
- Substitutionsregeln, 95
- Summenzeichen, 4
 - Indexverschiebung, 5
- surjektiv, 31
- Tangens, 59
- Tangente, 73
- Taylorformel, 80
- Taylorpolynom, 79
- Taylorreihe, 82
- Teilfolge, 23
- Teilmenge, 3
- Trapezregel, 109
- Treppenfunktion, 84

Umkehrabbildung, Differentiation der, 69
Umkehrfunktion, 30, 62
uneigentliches Integral, 108

Variation der Konstanten, 101
Verdichtungskriterium, 41
Verkettung, *siehe* Komposition
vollständige Induktion, 7

Wertemenge, 26
Wurzel, 14, 61
 Einheitswurzeln, 61
Wurzelkriterium, 47, 48

Zahlengerade, 14
Zwischenwertsatz, 37