

**Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt
vom 10. September 2020**

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = e^{2z} - (1 + i)e^z + 2ie^{-z} + i - 2.$$

- (a) Überprüfen Sie, dass mit $z = \frac{\pi}{2}i$ eine Nullstelle von f gegeben ist.
- (b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f .

Aufgabe 2

Die Folge (a_n) ist für $a_0 \geq -3$ rekursiv gegeben durch

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- (a) Zeigen Sie: im Fall $a_0 \leq 1$ ist $a_n \in [-1, 1]$ und im Fall $a_0 \geq 1$ ist $a_n \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Begründen Sie, dass die Folge für jeden Wert $a_0 \geq -3$ konvergiert.
- (c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge für $a_0 \geq -3$.

Aufgabe 3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{für } x \neq \pm \frac{\pi}{2},$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

- (a) Bestimmen Sie die Linearisierung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu f , d.h.

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

- (b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{4}$ eine Lösung besitzt.

Aufgabe 4

- (a) Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} n a^n = 0$ für jedes $a \in (0, 1)$.
- (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + e^{-nx^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n + n} \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^{\frac{n}{2}}$$

konvergiert.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)} e^{-\tan(x)}$$

und berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^a f(x) dx.$$

Lösung zu 1: (a) Wir erhalten mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= e^{\pi i} - (1+i)e^{\frac{\pi}{2}i} + (i-2) + 2ie^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= -1 - (1+i)(i) + (i-2) + 2i(-i) = -1 - i + 1 + i - 2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

(b) Die Substitution $w = e^z$ liefert

$$w^3 - (1+i)w^2 + (i-2)w + 2i = 0.$$

Mit der Nullstelle $w = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ aus Teil (a) ergibt sich mit Polynomdivision

$$\begin{array}{r} w^3 - (1+i)w^2 + (i-2)w + 2i \\ w^3 - i w^2 \\ \hline -w^2 + (i-2)w + 2i \\ -w^2 + i w \\ \hline -2w + 2i \\ -2w + 2i \\ \hline 0 \end{array}.$$

Wir berechnen noch die beiden Nullstellen $w = -1$ und $w = 2$ aus $w^2 - w - 2 = (w - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$.

Rücksubstitution liefert die Nullstellen:

$$\begin{aligned} w = i &\leadsto z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)i \\ w = -1 &\leadsto z = (1 + 2n)\pi i \\ w = 2 &\leadsto z = \ln(2) + 2\pi n i \end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung zu 2: (a) Wir zeigen die beiden Behauptungen induktiv.

(i) Ist $a_0 \in [-3, 1]$, so ist $0 \leq 3 + a_0 \leq 4$, und mit der Monotonie der Wurzel ergibt sich der Induktionsanfang $-1 \leq \sqrt{3+a_0} - 1 = a_1 \leq 1$. Analog folgt aus $-1 \leq a_n \leq 1$ der Induktionsschritt

$$-1 \leq \sqrt{3+a_n} - 1 = a_{n+1} \leq 1$$

für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Im anderen Fall, $a_0 \geq 1$, ergibt sich sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschritt mit $a_n \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$ aus

$$a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1 \geq \sqrt{4} - 1 \geq 1.$$

(b) Mit der dritten binomischen Formel erhalten wir

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3+a_n} - (1+a_n) = \frac{3+a_n - (1+a_n)^2}{\sqrt{3+a_n} + (1+a_n)} = \frac{2-a_n-a_n^2}{\sqrt{3+a_n} + (1+a_n)}.$$

Da der Nenner für $a_n \geq -1$ stets positiv ist, ergibt sich aus der Faktorisierung $2 - a_n - a_n^2 = -(a_n - 1)(a_n + 2) \geq 0$ im Fall (i) mit $a_n \in [-1, 1]$ eine monoton steigende Folge und im Fall (ii)

mit $a_n \geq 1$ eine monoton fallende Folge. In beiden Fällen liefert das Monotoniekriterium mit der Beschränkung $a_n \in [-1, 1]$, bzw. $a_n \in [1, a_1]$ im zweiten Fall, die Konvergenz der Folge.

(c) Aus der Fixpunktgleichung $a = \sqrt{3+a} - 1$ folgt

$$a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2) = 0$$

und somit ist mit dem einzigen Fixpunkt $a = 1 \geq -1$ in beiden Fällen der Grenzwert der Folge (a_n) gegeben.

Lösung zu 3: (a) Zunächst berechnen wir mit der Regel von L'Hospital den Funktionswert in x_0 zu

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{\pi}.$$

Die Ableitung zu f für $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ist

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin(x) - 2x\cos(x)}{(x^2 - \frac{\pi^2}{4})^2}.$$

Den Funktionswert $f'(\frac{\pi}{2})$ erhalten wir wiederum mit der Regel von L'Hospital durch

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin(x) - 2x\cos(x)}{(x^2 - \frac{\pi^2}{4})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4} + 2)\cos(x)}{4x(x^2 - \frac{\pi^2}{4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x^2 - \frac{\pi^2}{4} + 2)\sin(x) - 2x\cos(x)}{4(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) + 8x^2} = 1/\pi^2. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$g(x) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2}).$$

(b) Mit $f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{4}{3\pi^2}$ und der Abschätzung

$$\frac{4}{3\pi^2} \leq \frac{4}{27} \leq \frac{1}{4} = \frac{4}{16} \leq \frac{4}{\pi^2}$$

liefert der Zwischenwertsatz die Behauptung.

Lösung zu 4: (a) Mit $a \in (0, 1)$ und $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ gibt es $N \geq 0$ und $b \in (0, 1)$, sodass $a\sqrt[n]{n} \leq b < 1$ für alle $n \geq N$. Also folgt

$$n a^n \leq b^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Alternativ lässt sich der Grenzwert auch mit der Regel von L'Hospital zeigen durch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(a)a^{-x}} = 0.$$

(b) Wir betrachten den Grenzwert

$$\frac{\frac{1+e^{-(n+1)x^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1} \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{1+e^{-nx^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n} \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{\frac{n}{2}}} = \frac{1+e^{-(n+1)x^2}}{1+e^{-nx^2}} \frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1} \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2}}$$

für $n \rightarrow \infty$. Dabei nutzen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-(n+1)x^2}}{1+e^{-nx^2}} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{1} = 1 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

und mit Teilaufgabe (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n (n+1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir Konvergenz der Reihe, wenn

$$\frac{2}{\pi} \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < 1$$

gilt, also im Fall $x \in (0, \pi)$. Ausserdem liefert das Quotientenkriterium Divergenz der Reihe, wenn $x \notin [0, \pi]$ ist.

Im Fall $x = 0$ ergibt sich für die Summanden der Reihe

$$\frac{2}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{2}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n n} \rightarrow 2, \quad n \rightarrow \infty$$

und im Fall $x = \pi$

$$\frac{1+e^{-n\pi^2/4}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

In beiden Fällen bilden die Summanden keine Nullfolge. Daher divergiert die Reihe in diesen Fällen und wir erhalten Konvergenz ausschliesslich im Fall $x \in (0, \pi)$.

Lösung zu 5: Mit der Substitution $u = \tan x$ und der Ableitung $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ folgt

$$\int \frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)} e^{-\tan(x)} dx = \int \cos(u) e^{-u} du.$$

Zweimal partiell Integrieren führt auf

$$\int \cos(u) e^{-u} du = \sin(u) e^{-u} + \int \sin(u) e^{-u} du = \sin(u) e^{-u} - \cos(u) e^{-u} - \int \cos(u) e^{-u} du.$$

Also erhalten wir nach Rücksubstitution die Stammfunktion

$$\int \frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)} e^{-\tan(x)} dx = \frac{1}{2} (\sin(\tan(x)) - \cos(\tan(x))) e^{-\tan(x)}.$$

Aus der Beschränkung $|\sin(\tan(x)) - \cos(\tan(x))| \leq 2$ für jedes $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$ folgt weiterhin

$$\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin(\tan(x)) - \cos(\tan(x))) e^{-\tan(x)} - \frac{1}{2} (\sin(0) - \cos(0)) e^0 = \frac{1}{2}.$$