Karlsruher Institut für Technologie

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 6. September 2021

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$3\,\cosh(3z) - 2\sinh(3z) = 2\,.$$

Aufgabe 2

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_n = \frac{n^2}{n-2} - \sqrt{n^2+1} \quad \text{für } n \geq 3 \quad \text{und } a_1 = a_2 = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie Konvergenz der Folge und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\left(\sum_{n=3}^{\infty} a_n\,(3x+1)^{2n}\right)$$

konvergiert.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die differenzierbare Funktion $g : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x - \ln(x+1)$ genau eine Nullstelle in $x = 0$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{(x^2)} - 1}{x - \ln(x+1)} & \text{für } x \in (-1,\infty) \setminus \{0\}\,, \\ a & \text{für } x = 0\,, \end{cases}$$

stetig ist.

(c) Begründen Sie, dass es eine Stelle $\widehat{x} \in (-1,\infty)$ gibt mit $f(\widehat{x}) = 1$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,\infty) \to I$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{1}{2}x^2 + 1\,, & 0 \leq x < 2\,, \\ \dfrac{x-2}{x}\,, & 2 \leq x\,, \end{cases}$$

eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie diese an.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\arcsin(x)}\,dx$$

und geben Sie dabei explizit den Rechenweg mit den verwendeten Integrationstechniken an.

Lösung zu 1: Wir setzen die Darstellungen der hyperbolischen Funktionen durch die Exponentialfunktion ein:

$$\frac{3}{2}\left(e^{3z}+e^{-3z}\right)-\left(e^{3z}-e^{-3z}\right)=2\,.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit 2 und sortieren die Terme:

$$e^{3z}+5e^{-3z}=4\,.$$

Mit der Substitution $w=e^{3z}$ und nach Multiplikation mit w erhalten wir somit die quadratische Gleichung

$$w^2-4w+5=0\,.$$

Mit der quadratischen Ergänzung $(w-2)^2+1=0$ ergeben sich die Lösungen

$$w_1=2-i\,,\qquad w_2=2+i\,.$$

Es gilt $|w_{1/2}|=\sqrt{5}$ und $\operatorname{Arg}(w_{1/2})=\pm\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Also ist

$$\ln w_{1/2}=\ln\sqrt{5}\pm i\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mit der Rücksubstitution $w=e^{3z}$ erhalten wir also

$$3z=\ln\sqrt{5}\pm i\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+2\pi n i\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,,$$

bzw.

$$z=\frac{1}{3}\ln\sqrt{5}+\left(\pm\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\pi n\right)i\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Lösung zu 2: (a) Mit der dritten binomischen Formel, der Stetigkeit der Wurzel und den Nullfolgen $(n^{-p})_{n\in\mathbb{N}}$, $p\in\mathbb{N}$, erhalten wir Konvergenz und den Grenzwert aus

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{n-2}-\sqrt{n^2+1}&=\frac{n^4-(n-2)^2(n^2+1)}{(n-2)^2\left(\frac{n^2}{n-2}+\sqrt{n^2+1}\right)}\\&=\frac{4n^3-5n^2+4n-4}{(n^3-4n^2+4n)\left(\frac{n}{n-2}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\\&=\frac{4-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{(1-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2})\left(\frac{1}{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\to\frac{4}{2}=2\,,\quad n\to\infty\,.\end{aligned}$$

(b) Mit Teil (a) ergibt sich für den Quotienten

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(3x+1)^{2(n+1)}}{a_n(3x+1)^{2n}}\right|=\frac{2}{2}\,|3x+1|^2=(3x+1)^2\,.$$

Mit dem Quotientenkriterium gilt absolute Konvergenz der Reihe für $x\in\mathbb{R}$ mit

$$(3x+1)^2<1\,.$$

Also ergibt sich der Konvergenzradius $r=\frac{1}{3}$ der Potenzreihe um $x_0=-\frac{1}{3}$ und wir erhalten Konvergenz der Reihe für $x\in(-\frac{2}{3},0)$.

Für $x\notin[-\frac{3}{2},0]$ ist die Potenzreihe divergent. Es bleiben die Randpunkte $x=0$ bzw. $x=-\frac{2}{3}$ zu untersuchen. An diesen Stellen ergibt sich jeweils die Reihe

$$\left(\sum_{n=3}^{\infty}a_n\right).$$

Diese Reihe ist divergent, da die Folge der Summanden keine Nullfolge ist (s. Teil (a)).

Lösung zu 3: (a) Für die Ableitung $g'(x)=1-\frac{1}{x+1}$ ergibt sich genau eine Nullstelle in $x=0$. Da $g(x)\to\infty$ gilt für $x\to-1$ und für $x\to\infty$, besitzt die differenzierbare Funktion genau eine Minimalstelle in $x=0$ und mit $g(0)=0$ ist $g(x)>0$ für $x\in(-1,0)\setminus\{0\}$.

(b) Ausserhalb der Stelle $x=0$ ist die Funktion stetig, da es sich um einen Quotienten stetiger Funktionen handelt und der Nenner nach Teil (a) nicht verschwindet.

Mit der Regel von l'Hospital erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2^{(x^2)}-1}{x-\ln(x+1)}&=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(2)x\,e^{(\ln(2)x^2)}}{1-(x+1)^{-1}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(2\ln(2)+(2\ln(2)x)^2)\,e^{(\ln(2)x^2)}}{(x+1)^{-2}}=2\ln(2)\end{aligned}$$

für den Wert von a.

(c) Es gilt

$$f(1)=\frac{1}{1-\ln(2)}>1\quad\text{und}\quad\lim_{x\to-1}f(x)=0\,.$$

Also gibt es wegen des Zwischenwertsatzes eine Stelle $\widehat{x}\in(-1,1)$ zur stetigen Funktion f mit $f(\widehat{x})=1$.

Lösung zu 4: Die Funktion f ist auf $(0,\infty)\setminus\{2\}$ differenzierbar mit

$$f'(x)=\begin{cases}2-x\,, & 0<x<2\,,\\ \dfrac{2}{x^2}\,, & 2<x\,,\end{cases}$$

Daher ist $f'>0$ auf $(0,2)$ und auf $(2,\infty)$ und somit f auf $[0,2)$ und auf $[2,\infty)$ jeweils streng monoton wachsend. Insbesondere werden diese Intervalle wieder auf Intervalle abgebildet, nämlich

$$\operatorname{Bild}(f|_{[0,2)})=\left[f(0),\lim_{x\to2-}f(x)\right)=[1,3)\,,\qquad\operatorname{Bild}(f|_{[2,\infty)})=\left[f(2),\lim_{x\to\infty}f(x)\right)=[0,1)\,.$$

Da $[0,1)\cap[1,3)=\emptyset$, ist f injektiv, insbesondere ist $f:[0,\infty)\to[0,3)$ umkehrbar.

Um die Abbildungsvorschrift für f^{-1} zu finden, lösen wir die Gleichung $f(x)=y$ nach x auf. Dazu unterscheiden wir die Fälle $x\in[0,2)$ und $x\in[2,\infty)$. Im ersten Fall lautet die Gleichung

$$y=2x-\frac{x^2}{2}+1=3-\frac{1}{2}(x-2)^2\,.$$

Formales Auflösen nach x ergibt
$$x = 2 \pm \sqrt{6-2y}\,.$$
Da $x < 2$ vorausgesetzt ist, muss das Minusvorzeichen gewählt werden.

Im Fall $x \geq 2$, gilt $xy = x - 2$ bzw.
$$x = \frac{2}{1-y}\,.$$
Insgesamt erhalten wir
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-y}\,, & 0 \leq y < 1\,,\\ 2-\sqrt{6-2y}\,, & 1 \leq y < 3\,. \end{cases}$$

Lösung zu 5: Mit $x = \sin(t)$ folgt $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$. Eine Substitution führt mit $\arcsin(\sin(t)) = t$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ somit auf
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\arcsin(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\,.$$
Nun wenden wir zweimal partielle Integration an und erhalten
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(t)\,\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$
Also ergibt sich
$$\frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\pi}$$
bzw.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{\pi} - \frac{2}{5}\,.$$