

**Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt**

Karlsruhe, 8. September 2023

Aufgabe 1

Mit einem Startwert $a_0 \in (0, \frac{4}{9})$ ist die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} - \frac{a_n}{2} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in (0, \frac{4}{9})$.
Hinweis: Betrachten Sie $\frac{8}{9} - 2a_{n+1}$ für die obere Abschätzung.
- (b) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert.
- (c) Berechnen Sie den Grenzwert dieser Folge.

Aufgabe 2

Es ist $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(x) \ln(\cos(x)), & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ a, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion stetig ist.
- (b) Zeigen Sie mit dem Wert für a aus Teil (a) die Abschätzungen

$$-\frac{1}{2e} \leq f(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Aufgabe 3

Die Funktion $f : (1-r, 1+r) \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2 - n - 2} - n)^n}{n} (x-1)^n, \quad x \in (1-r, 1+r),$$

wobei $r \geq 0$ den Konvergenzradius der Potenzreihe bezeichnet.

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n - 2} - n)$$

- (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe.
- (c) Berechnen Sie an der Stelle $x = 1$ die dritte Ableitung $f^{(3)}(1)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\sin(iz) = \sin\left(\frac{i}{2}z\right).$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie mit Substitution und partieller Integration das Integral

$$\int_a^b \frac{(\ln(x))^2}{x} \cos(\ln(\ln(x))) dx$$

auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a = e$ und $b = e^{(e^{\frac{\pi}{2}})}$.

Lösung zu 1: zu (a) Wir zeigen die Aussage induktiv. Mit a_0 ist ein Induktionsanfang gegeben. Nehmen wir nun an, dass $0 < a_n < \frac{4}{9}$ gilt, so ergibt sich zunächst

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} - \frac{a_n}{2} = \sqrt{a_n} \left(1 - \frac{\sqrt{a_n}}{2}\right).$$

Wegen der Annahme ist $\sqrt{a_n} > 0$ und

$$1 - \frac{\sqrt{a_n}}{2} \geq 1 - \frac{1}{3} > 0.$$

Also folgt $a_{n+1} > 0$. Berechnen wir weiterhin mit quadratischer Ergänzung

$$\frac{4}{9} - a_{n+1} = \frac{4}{9} - \sqrt{a_n} + \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \left(a_n - 2\sqrt{a_n} + \frac{8}{9} \right) = \frac{1}{2} \left((\sqrt{a_n} - 1)^2 - \frac{1}{9} \right).$$

Aus $0 < a_n < \frac{4}{9}$ folgt $0 < \sqrt{a_n} < \frac{2}{3}$ bzw. $-1 < \sqrt{a_n} - 1 < -\frac{1}{3}$, und wir sehen $(\sqrt{a_n} - 1)^2 \in (\frac{1}{9}, 1)$. Insbesondere ergibt sich aus obiger Rechnung $\frac{4}{9} - a_{n+1} > 0$. Insgesamt haben wir $a_{n+1} \in (0, \frac{4}{9})$ gezeigt und mit Induktion folgt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

zu (b) Mit der Beschränkung $a_n \in (0, \frac{4}{9})$ aus Teil (a) erhalten wir

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n} - \frac{3}{2}a_n = \sqrt{a_n} \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{a_n}\right) > 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend, und das Monotoniekriterium liefert Konvergenz der Folge.

zu (c) Aus der Fixpunktgleichung

$$a = \sqrt{a} - \frac{a}{2}$$

für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folge berechnen wir

$$\frac{3}{2}a = \sqrt{a} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} = \frac{2}{3},$$

da aufgrund der Monotonie der Folge (a_n) für den Grenzwert $a \neq 0$ gelten muss. Also ist $a = \frac{4}{9}$ der gesuchte Grenzwert.

Lösung zu 2: zu (a) Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist f als Produkt stetiger Funktionen auch stetig. Für die Stetigkeit in $x = \frac{\pi}{2}$ betrachten wir mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \ln(\cos(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos(x))}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{\cos(x)} \sin(x)}{\frac{2}{\cos^3(x)} \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} \cos^2(x) = 0.$$

Also ist f stetig auf $[0, \frac{\pi}{2}]$, wenn $a = 0$ gesetzt wird.

zu (b) Da $\cos(x) \geq 0$ und $\ln(\cos(x)) \leq 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist, ergibt sich die Abschätzung $f(x) \leq 0$ auf dem Intervall.

Weiterhin genügt es wegen $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ für die Abschätzung nach unten Minimalstellen von f in $(0, \frac{\pi}{2})$ zu bestimmen. Wir berechnen kritische Punkte aus

$$0 = f'(x) = -\cos(x) \sin(x) (2 \ln(\cos(x)) + 1).$$

Die einzige Nullstelle der Ableitung im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ ergibt sich aus $\ln(\cos(\hat{x})) = -\frac{1}{2}$. Also liegt in $\hat{x} = \arccos(e^{-\frac{1}{2}})$ ein Minimum und wir erhalten

$$f(x) \geq f(\hat{x}) = e^{-1} \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2e}.$$

Lösung zu 3: zu (a) Es gilt mit der dritten Binomischen Formel

$$\begin{aligned} (\sqrt{n^2 - n - 2} - n) &= \frac{(\sqrt{n^2 - n - 2} - n)(\sqrt{n^2 - n - 2} + n)}{(\sqrt{n^2 - n - 2} + n)} \\ &= \frac{n^2 - n - 2 - n^2}{(n\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} + n)} \\ &= \frac{-1 - \frac{2}{n}}{(\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1)} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

zu (b) Wir berechnen den Konvergenzradius mit Hilfe des Wurzelkriteriums: Mit dem Resultat aus Teil (a) und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\sqrt{n^2 - n - 2} - n)^n}{n} (x - 1)^n \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{n^2 - n - 2} - n|}{\sqrt[n]{n}} |x - 1| = \frac{1}{2} |x - 1|$$

Daraus ergibt sich der Konvergenzradius $r = 2$.

zu (c) Da f durch eine Potenzreihe gegeben ist, ist diese identisch mit der Taylorreihe zu f um $x_0 = 1$ und ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\frac{f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{(\sqrt{n^2 - n - 2} - n)^n}{n} \Big|_{n=3} = \frac{(-1)^3}{3}.$$

Also erhalten wir

$$f^{(3)}(1) = -2.$$

Lösung zu 4: Mit der Euler'schen Formel erhalten wir aus der Gleichung die Identität

$$\frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{e^{-\frac{z}{2}} - e^{\frac{z}{2}}}{2i}.$$

Mit der Substitution $u = e^{-\frac{z}{2}}$ ergibt sich nach Multiplikation mit u^2 die Gleichung

$$u^4 - u^3 + u - 1 = 0.$$

Offensichtlich sind $u_{1,2} = \pm 1$ Lösungen dieser Gleichung und mit der Faktorisierung

$$\begin{array}{rcl} u^4 - u^3 + u - 1 & = & (u^2 - 1)(u^2 - u + 1) \\ \frac{u^4 - u^3}{-u^3 + u^2 + u - 1} & & \\ \frac{-u^3 + u}{u^2 - 1} & & \\ \frac{u^2 - 1}{0} & & \end{array}$$

ergeben sich weitere Lösungen aus $u^2 - u + 1 = (u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$. Die Quadratische Ergänzung führt auf

$$u_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{und} \quad u_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Um alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung zu bestimmen, betrachten wir für $j = 1, \dots, 4$ die Umkehrungen

$$-\frac{z}{2} = \ln(u_j) + 2\pi n i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mit dem komplexen Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln(u_1) &= \ln(1) = 0, & \ln(u_2) &= \ln(-1) = 0 + i\pi, \\ \ln(u_3) &= \ln(|u_3|) + i \arg(u_3) = 0 + i\frac{\pi}{3}, & \ln(u_4) &= 0 - i\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich alle Lösungen zu

$$z \in \left\{ 4n\pi i, -\frac{2\pi}{3}i + 4n\pi i, 2\pi i + 4n\pi i, \frac{2\pi}{3}i + 4n\pi i : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lösung zu 5: Zunächst substituieren wir $u = \ln(x)$ und erhalten mit $du = \frac{1}{x}dx$ das Integral

$$\int_e^{e^{e^{\frac{\pi}{2}}}} \frac{(\ln(x))^2}{x} \cos(\ln(\ln(x))) dx = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \cos(\ln(u)) du.$$

Das Integral auf der rechten Seite integrieren wir zweimal partiell. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \cos(\ln(u)) du &= \frac{1}{3} u^3 \cos(\ln(u)) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{3} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \sin(\ln(u)) du \\ &= \frac{1}{3} u^3 \cos(\ln(u)) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} u^3 \sin(\ln(u)) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \cos(\ln(u)) du \right]. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\frac{10}{9} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \cos(\ln(u)) du = u^3 \left(\frac{1}{3} \cos(\ln(u)) + \frac{1}{9} \sin(\ln(u)) \right) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{9} e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{3}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_e^{e^{e^{\frac{\pi}{2}}}} \frac{(\ln(x))^2}{x} \cos(\ln(\ln(x))) dx = \frac{1}{10} e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{3}{10}.$$

Alternative: Die Substitution $u = \ln(\ln(x))$ mit $du = \frac{1}{x \ln(x)} dx$ führt auf

$$\int_e^{e^{e^{\frac{\pi}{2}}}} \frac{(\ln(x))^2}{x} \cos(\ln(\ln(x))) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3u} \cos(u) du.$$

Auch bei dieser Variante hilft zweimal partiell Integrieren weiter, und es ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3u} \cos(u) du = e^{\frac{3\pi}{2}} - 3 - 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3u} \cos(u) du.$$

Das Ergebnis bestimmen wir wie oben.