

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt
vom 15. Februar 2020

Aufgabe 1

Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\sinh(3z) = \frac{\sqrt{3}i}{2} - i e^{-\frac{3z}{2}} \sin\left(i \frac{3z}{2}\right).$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 2 \cos(x) y(x) - \sin(2x) \sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 4.$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge (a_n) durch einen Startwert $a_1 \in \mathbb{R}$ und die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n^2 - 2a_n + 4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) für $a_1 \in [2, 4]$ beschränkt und monoton ist.

(b) Zeigen Sie für $a_1 \geq 4$ die Ungleichung

$$a_n - 4 \geq 2^{n-1} (a_1 - 4), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) Für welche $a_1 \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge, für welche divergiert sie? Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{3 + x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Potenzreihendarstellung von f für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

(c) Welchen Wert hat $f^{(6)}(0)$?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie die Ungleichung $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $|x| > 1$ und $|x| \leq 1$ getrennt. Im zweiten Fall untersuchen Sie das Vorzeichen von f' .

Lösung zu 1: Mit den Darstellungen des Sinus und des Sinus hyperbolicus durch die Exponentialfunktion gilt

$$\frac{1}{2} (e^{3z} - e^{-3z}) = \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{i e^{-3z/2}}{2i} (e^{-3z/2} - e^{3z/2}) = \frac{\sqrt{3}i}{2} + \frac{1}{2} (1 - e^{-3z}).$$

Multiplikation mit 2 und Addition von e^{-3z} auf beiden Seiten liefert

$$e^{3z} = 1 + \sqrt{3}i.$$

Es ist

$$|1 + \sqrt{3}i|^2 = 1 + 3 = 4, \quad \text{also} \quad |1 + \sqrt{3}i| = 2.$$

Mit bekannten Werten der trigonometrischen Funktionen ergibt sich

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Mit Anwendung des komplexen Logarithmus und aus der Periodizität der Exponentialfunktion erhalten wir

$$3z = \ln(1 + \sqrt{3}i) + 2\pi ni = \ln(2) + i \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Somit erhalten wir die Lösungen

$$z = \frac{1}{3} \ln(2) + i \frac{(6n+1)\pi}{9}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lösung zu 2: Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit Exponent $\alpha = \frac{1}{2}$. Mit $\lambda = 1/(1 - \alpha) = 2$ machen wir die Substitution $y(x) = (u(x))^2$, wobei wir von $u(x) \geq 0$ ausgehen. Mit der Ableitung $y'(x) = 2u(x)u'(x)$ ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$2u(x)u'(x) = 2\cos(x)u(x)^2 - \sin(2x)u(x).$$

Nach Division mit $2u(x)$ erhalten wir die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$u'(x) = \cos(x)u(x) - \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung u_h der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung durch Separation:

$$\frac{u'_h(x)}{u_h(x)} = \cos(x), \quad \text{also} \quad \ln|u_h(x)| = \sin(x) + \tilde{C}.$$

Anwenden der Exponentialfunktion und die Substitution $C = \pm e^{\tilde{C}}$ liefert die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = C e^{\sin(x)}.$$

Als nächstes ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen. Dazu führen wir *Variation der Konstanten* durch,

$$u_p(x) = C(x) e^{\sin(x)}.$$

Mit $u'_p(x) = C'(x) \exp(\sin(x)) + C(x) \cos(x) \exp(\sin(x))$ erhalten wir

$$C'(x) e^{\sin(x)} + C(x) \cos(x) e^{\sin(x)} = \cos(x) C(x) e^{\sin(x)} - \frac{1}{2} \sin(2x),$$

$$C'(x) e^{\sin(x)} = -\frac{1}{2} \sin(2x),$$

$$C'(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x) e^{-\sin(x)}.$$

Vor der Integration verwenden wir noch die Identität $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. Somit ist mit der Substitution $v = \sin(x)$ ($dv = \cos(x) dx$)

$$C(x) = - \int \sin(x) \cos(x) e^{-\sin(x)} dx = - \int v e^{-v} dv.$$

Eine partielle Integration mit $f'(v) = e^{-v}$, $g(v) = v$ liefert

$$C(x) = v e^{-v} - \int e^{-v} dv = (v+1) e^{-v} = (1 + \sin(x)) e^{-\sin(x)}.$$

Somit lautet eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$u_p(x) = 1 + \sin(x)$$

und die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = 1 + \sin(x) + C e^{\sin(x)}.$$

Mit unserer Annahme $u(x) \geq 0$ und der Anfangsbedingung $y(0) = 4$ gilt $u(0) = 2$ und somit ist $2 = 1 + C$, d.h. $C = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich durch Rücksubstitution

$$y(x) = (1 + \sin(x) + e^{\sin(x)})^2.$$

Lösung zu 3: (a) Zunächst ist

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} a_n^2 - 2a_n + 2 = \frac{1}{2} (a_n^2 - 4a_n + 4) = \frac{1}{2} (a_n - 2)^2 \geq 0,$$

und somit $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass auch $a_n \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, falls $a_1 \in [2, 4]$ ist.

Der Induktionsanfang stimmt laut Voraussetzung. Ist nun $a_n \in [2, 4]$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2} a_n^2 - 2a_n = \frac{a_n}{2} (a_n - 4) \leq 0$$

nach Induktionsvoraussetzung, denn der erste Faktor ist größer gleich 0, der zweite kleiner gleich 0. Damit ist der Induktionsschritt erbracht und es folgt $a_n \in [2, 4]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist beschränkt.

Wir betrachten noch die Monotonie.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2} a_n^2 - 3a_n + 4 = \frac{1}{2} (a_n^2 - 6a_n + 8) \\ &= \frac{1}{2} (a_n - 2)(a_n - 4). \end{aligned}$$

Aus $a_n \in [2, 4]$ folgt nun $a_{n+1} - a_n \leq 0$, die Folge ist also monoton fallend.

(b) Zunächst sieht man wie in Teil (a): Ist $a_1 \geq 4$, so ist auch $a_n \geq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Jetzt beweisen wir die Behauptung mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ gilt nach Voraussetzung

$$a_1 - 4 = 1 \cdot (a_1 - 4) = 2^0 \cdot (a_1 - 4).$$

Somit ist der Induktionsanfang erbracht.

Wir nehmen an, dass die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Dann folgt

$$a_{n+1} - 4 = \frac{a_n}{2} (a_n - 4) \stackrel{\text{i.V.}}{\geq} \frac{a_n}{2} 2^{n-1} (a_1 - 4) \stackrel{a_n \geq 4}{\geq} \frac{4}{2} 2^{n-1} (a_1 - 4) = 2^n (a_1 - 4).$$

Also ist der Induktionsschritt erbracht und die Abschätzung aus Teil (b) bewiesen.

(c) Für $a_1 \in [2, 4]$ ist die Folge (a_n) nach mit (a) nach dem Monotoniekriterium konvergent. Für $a_1 > 4$ gilt nach (b) die Abschätzung $a_n \geq c 2^n$ mit einer positiven Konstante c . Damit divergiert die Folge in diesem Fall. Mit

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} (a_n - 2)^2$$

erkennt man:

$$a_1 \in [0, 2) \implies a_2 \in (2, 4], \quad a_1 \in (-\infty, 0) \implies a_2 \in (4, \infty).$$

Damit konvergiert die Folge auch für $a_1 \in [0, 2)$ und divergiert für $a_1 \in (-\infty, 0)$.

Für $a_1 = 2$ oder $a_1 = 4$ ist die Folge konstant, der Grenzwert ist gleich dem Startwert. Für $a_1 \in (2, 4)$ lautet die Fixpunktgleichung

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} a_n^2 - 2a_n + 4 \right) = \frac{a^2}{2} - 2a + 4.$$

Dies liefert

$$0 = a^2 - 6a + 8 = (a - 2)(a - 4).$$

Da die Folge monoton fällt, kommt $a = 4$ nicht in Frage, somit ist in diesem Fall $a = 2$.

Mit den Überlegungen von oben ist der Grenzwert $a = 2$ für $a_1 \in (0, 2)$ und $a = 4$ für $a_1 = 0$.

Lösung zu 4: (a) Es gilt

$$x^2 + 1 = (3 + x) f(x) = (3 + x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 3a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (3a_k + a_{k-1}) x^k.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} k = 0: \quad 1 &= 3a_0, & \text{d.h.} \quad a_0 &= \frac{1}{3}, \\ k = 1: \quad 0 &= 3a_1 + a_0 = 3a_1 + \frac{1}{3}, & \text{d.h.} \quad a_1 &= -\frac{1}{9}, \\ k = 2: \quad 1 &= 3a_2 + a_1 = 3a_2 - \frac{1}{9}, & \text{d.h.} \quad a_2 &= \frac{10}{27}, \\ k \geq 3: \quad 0 &= 3a_k + a_{k-1}, & \text{d.h.} \quad a_k &= -\frac{a_{k-1}}{3}. \end{aligned}$$

Somit vermuten wir $a_k = (-1)^k 10/3^{k+1}$, $k \geq 2$, was sich durch vollständige Induktion sofort beweisen lässt. Damit ist die Potenzreihendarstellung von f

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{10}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{x}{3} \right)^k.$$

(b) Die Reihe ist bis auf die ersten beiden Glieder eine geometrische Reihe mit $q = -x/3$. Sie konvergiert also für $|q| < 1$, in allen anderen Fällen divergiert sie. Somit konvergiert die Reihe genau für $|x| < 3$.

(c) Die Potenzreihendarstellung von f entspricht der Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Damit ist

$$\frac{10 \cdot (-1)^6}{3^7} = \frac{f^{(6)}(0)}{6!}, \quad \text{also} \quad f^{(6)}(0) = \frac{10 \cdot 6!}{3^7} = \frac{10 \cdot 2^2 \cdot 4 \cdot 5}{3^5} = \frac{800}{243}.$$

Lösung zu 5: Ist $|x| > 1$, so ist

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| < |\sin(x)| \leq 1.$$

Es genügt also das Intervall $[-1, 1]$ zu betrachten.

Mit der Regel von de l'Hospital erkennen wir, dass f auf diesem Intervall stetig ist. Das das Intervall außerdem beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, ist, nimmt f dort sein Maximum und sein Minimum an. Allerdings ergibt sich in diesem konkreten Fall die Existenz eines Maximums und zweier Minima direkt aus dem Monotonieverhalten von f , siehe unten.

Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ bestimmen wir die Ableitung

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Da der Nenner positiv ist, reicht es aus, den Zähler zu betrachten. Setze also (sogar für $x \in \mathbb{R}$)

$$g(x) = x \cos(x) - \sin(x).$$

Dann ist $g'(x) = -x \sin(x)$. Diese Funktion ist negativ auf $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$. Also ist g auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton fallend. Da $g(-\pi/2) = 1$, $g(0) = 0$ und $g(\pi/2) = -1$ ist, ist g auf $[-\pi/2, 0)$ positiv und auf $(0, \pi/2]$ negativ.

Für f' bedeutet dies, dass f' positiv auf $(-1, 0)$ und negativ auf $(0, 1)$ ist.

Somit, da f stetig ist, ist f auf $[-1, 0]$ streng monoton wachsend, auf $[0, 1]$ streng monoton fallend. Also hat f sein Maximum in $[-1, 1]$ in 0 mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ und sein Minimum in ± 1 mit dem Funktionswert $f(\pm 1) = \sin(1) > 0 > -1$. Also ist $-1 \leq f(x) \leq 1$ auf $[-1, 1]$, was zu zeigen war.