Karlsruher Institut für Technologie

Upload-Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 9. April 2021

Aufgabe 1

Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(3-2\mathrm{i})\cos(z) - (2+\mathrm{i})\sin(z) = -1+\mathrm{i}\,.$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_1 \in [1,2]$ und

$$a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie $a_n \in [1,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Begründen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert in Abhängigkeit von a_1.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{4-x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2,\,4\}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Potenzreihe?

(c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n}\right).$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^{1/3}}{1+64\,x^3}\,, & x \geq 0\,, \\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abschätzungen

$$0 \leq f(x) \leq \frac{13}{9}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1+x^2)\,y'(x) = 4\,(1+x^2)\,(y(x))^{3/4} + 8x\,y(x)\,, \quad x > 0\,, \qquad y(1) = \pi^4\,.$$

Lösung zu 1: Wir setzen die Darstellungen der Kosinus- und Sinusfunktion durch die Exponentialfunktion ein und multiplizieren die Gleichung mit 2i. So erhalten wir

$$(2+3\mathrm{i})\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)-(2+\mathrm{i})\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)=-2-2\mathrm{i}\,.$$

Wir substituieren $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, multiplizieren mit w und bringen alle Terme nach links. Dadurch erhalten wir die quadratische Gleichung

$$2\mathrm{i}\,w^2+(2+2\mathrm{i})\,w+4+4\mathrm{i}=0\,.$$

Wir dividieren noch durch 2i und führen dann quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} w^2+(1-\mathrm{i})\,w+2-2\mathrm{i}&=0\,.\\ \left(w+\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2+2-2\mathrm{i}-\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2&=0\,.\\ \left(w+\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2&=-2+2\mathrm{i}-\frac{\mathrm{i}}{2}=-2+\frac{3}{2}\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

Wir suchen zunächst eine Zahl $x+\mathrm{i}y$, $x,\,y\in\mathbb{R}$, mit $(x+\mathrm{i}y)^2=-2+3/2\,\mathrm{i}$. Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^2-y^2=-2\,,\qquad 2xy=\frac{3}{2}\,.$$

Wir setzen $y=3/(4x)$ in die erste Gleichung ein:

$$x^2-\frac{9}{16x^2}=-2\,,\qquad\text{also}\quad x^4+2x^2-\frac{9}{16}=0\,.$$

Mit quadratischer Ergnzung folgt $(x^2+1)^2=25/16$, also $x^2=-1\pm 5/4$. Da $x\in\mathbb{R}$ kommt nur die positive Lösung in Frage, also $x^2=1/4$. Wir erhalten $x=\pm1/2$ und $y=\pm\frac{3}{2}$. Somit ist

$$w=-\frac{1-\mathrm{i}}{2}+\frac{1+3\mathrm{i}}{2}=2\mathrm{i}\qquad\text{oder}\qquad w=-\frac{1-\mathrm{i}}{2}-\frac{1+3\mathrm{i}}{2}=-1-\mathrm{i}\,.$$

Es bleibt noch die Rücksubstitution von $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ durchzuführen. Im Falle $w=2\mathrm{i}$ ist $|w|=2$, $\operatorname{Arg}(w)=\pi/2$, also

$$\mathrm{i}z=\ln(2)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Im Falle $w=-1-\mathrm{i}$ ist $|w|=\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(w)=-3\pi/4$, also

$$\mathrm{i}z=\ln(\sqrt{2})+\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist also

$$\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n-\mathrm{i}\,\ln(2):n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{3\pi}{4}+2\pi n-\mathrm{i}\,\ln(\sqrt{2}):n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Lösung zu 2: (a) Wir zeigen dies durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ($n=1$) ist durch die Aufgabenstellung schon vorgegeben. Es ist also nur noch der Induktionsschritt zu erbringen. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir also an, dass $a_n\in[1,2]$ für ein n gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} a_{n+1}-1&=\frac{2}{3-a_n}-1=\frac{2-3+a_n}{3-a_n}=\frac{a_n-1}{3-a_n}\overset{\text{I.V.}}{\geq}0\,,\\ a_{n+1}-2&=\frac{2}{3-a_n}-2=\frac{2-6+2a_n}{3-a_n}=-2\,\frac{2-a_n}{3-a_n}\overset{\text{I.V.}}{\leq}0\,.\end{aligned}$$

Also ist auch $a_{n+1}\in[1,2]$. Somit ist der Induktionsschritt erbracht. Es folgt $a_n\in[1,2]$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gezeigt.

(b) Nach Teil (a) ist die Folge beschränkt. Wir untersuchen sie auf Monotonie:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2}{3-a_n}-a_n=\frac{2-3a_n+a_n^2}{3-a_n}=\frac{(a_n-1)\,(a_n-2)}{3-a_n}\leq0\,,$$

wobei wir die Schranken aus Teil (a) verwenden. Die Folge ist also monoton fallend. Aus dem Monotoniekriterium ergibt sich, dass die Folge konvergiert.

Wir setzen $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ und bilden die Fixpunktgleichung:

$$a=\frac{2}{3-a}\quad\Longleftrightarrow\quad a^2-3a+2=0\quad\Longleftrightarrow\quad(a-1)\,(a-2)=0\,.$$

Der Grenzwert ist also entweder 1 oder 2. Da die Folge monoton fällt, ist $a=1$ für $a_1\in[1,2)$.

Ist $a_1=2$, so folgt $a_2=2$ und induktiv ergibt sich $a_n=2$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Somit ist $a=2$ für $a_1=2$.

Lösung zu 3: (a) Wir verwenden die geometrische Reihe und erhalten

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}}\,x^n$$

für $|x|<2$.

(b) Aus der Herleitung über die geometrische Reihe folgt direkt, dass die Reihe genau für $|x|<2$ konvergiert.

Man kann sich davon aber auch über das Wurzelkriterium (oder ähnlich über das Quotientenkriterium) überzeugen. Es ist

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}}\,x^n\right|}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\,\frac{\sqrt[n]{2^n+\frac{1}{2}}}{4}\,|x|\longrightarrow\frac{|x|}{2}\quad(n\to\infty)\,.$$

Dabei verwenden wir im Zähler das Einschließungskriterium:

$$2=\sqrt[n]{2^n}\leq\sqrt[n]{2^n+\frac{1}{2}}\leq\sqrt[n]{2^n+2^n}=\sqrt[n]{2\cdot2^n}=\sqrt[n]{2}\cdot2\longrightarrow2\quad(n\to\infty)\,.$$

In den Randpunkten $x=\pm2$ sind die Reihenglieder

$$(-1)^n\,\frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}}\,2^n=(-1)^n\,\frac{2+\frac{1}{2^n}}{4}$$

und konvergieren daher nicht gegen null. Also divergiert die Reihe in den Randpunkten nach dem Nullfolgenkriterium.

(c) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}} = 2 + f(1) = 2 + \frac{1}{2-1} + \frac{1}{4-1} = \frac{10}{3}.$$

Lösung zu 4: (a) Beide Ausdrücke sind Kompositionen stetiger Funktionen und die Nenner werden niemals null. Daher ist f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig. Auerdem gilt $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 1$. Es ist noch zu zeigen, dass auch $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$ ist.

$$x \to 0- \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \to 1.$$

Somit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{x^{1/3}}{1+64\,x^3} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/3}}{1+64\,x^3} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-8/3}}{x^{-3}+64} = 1 + \frac{0}{0+64} = 1$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\exp(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Alle in der Definition von f auftretenden Terme sind auf den entsprechenden Intervallen für x positiv. Somit ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x < 0$ gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0.$$

Daher ist f auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und somit $f(x) \leq f(0) = 1$ für $x \leq 0$.

Für $x > 0$ gibt es wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ ein $A > 0$ mit $f(x) \leq 1 + \frac{2^{2/3}}{3}$ für alle $x > A$.

Es bleibt das Intervall $[0, A]$ zu betrachten. Auf diesem kompakten Intervall nimmt die stetige Funktion f ihr Maximum an. Von den Randwerten wissen wir bereits, dass sie die Ungleichungen erfüllen. Wir suchen noch nach möglichen Maximalstellen in $(0, A)$. Dazu berechnen wir

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}\,x^{-2/3}\,(1+64\,x^3) - x^{1/3}\,192\,x^2}{(1+64\,x^3)^2} = \frac{1+64x^3-576x^3}{3\,x^{2/3}\,(1+64\,x^3)^2}, \qquad x \in (0, A).$$

Somit ist $f'(x) = 0$ genau für $1 - 512x^3 = 0$, also für $x = 1/8$, wenn wir o.E. $A > 1/8$ annehmen. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}}{1+64\,\left(\frac{1}{8}\right)^3} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = \frac{13}{9}.$$

Also ist auch $f(x) \leq \frac{13}{9}$ auf $(0, A)$.

Lösung zu 5: Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung. Wir substitutieren $y(x) = u(x)^\lambda$ mit

$$\lambda = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4 \qquad \text{und} \qquad u(x) \geq 0.$$

Dann ist $y'(x) = 4\,u(x)^3\,u'(x)$, wir erhalten also die Gleichung

$$4\,(1+x^2)\,u(x)^3\,u'(x) = 4\,(1+x^2)u(x)^3 + 8x\,u(x)^4.$$

Wir dividieren durch $4u(x)^3$ und erhalten eine lineare Differentialgleichung für u:

$$(1+x^2)\,u'(x) = 2x\,u(x) + 1 + x^2.$$

Zunächst lösen wir die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung durch Separation. Für ihre Lösung u_h gilt also

$$\frac{u_h'(x)}{u_h(x)} = \frac{2x}{1+x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \ln|u_h(x)| = \ln(1+x^2) + \tilde{C}.$$

Wir wenden die Exponentialfunktion an, lösen den Betrag auf und ersetzen die Integrationskonstante, um die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = C\,(1+x^2)$$

zu erhalten.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung bestimmen wir durch Variation der Konstanten. Mit $u_p(x) = c(x)\,(1+x^2)$ ist $u_p'(x) = c'(x)\,(1+x^2) + 2x\,c(x)$. Wir setzen beide Formeln ein und erhalten

$$(1+x^2)^2\,c'(x) + 2x\,(1+x^2)\,c(x) = 2x\,(1+x^2)\,c(x) + 1 + x^2.$$

Somit folgt

$$c'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{also} \quad c(x) = \arctan(x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung lautet also

$$u(x) = (\arctan(x) + C)\,\big(1+x^2\big).$$

Mit unserer Annahme $u(x) \geq 0$ folgt aus $y(1) = \pi^4$ auch $u(1) = \pi$. Somit ist

$$\pi = 2\,(\arctan(1) + C) = \frac{\pi}{2} + 2C.$$

Es folgt $C = \pi/4$ und insgesamt

$$y(x) = \left(\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{4}\right)(1+x^2)\right)^4.$$

Bemerkung: Die Annahme $u(x) \geq 0$ ergibt sich natrlich aus der Tatsache, dass die Rücksubstitution (in diesem Fall $u(x) = y(x)^{1/4}$) wohldefiniert sein muss. Vergisst man dies, erhält man eine zweite „mögliche Lösung“

$$y(x) = \left(\left(\arctan(x) - \frac{3\pi}{4}\right)(1+x^2)\right)^4.$$

Eine Probe unter Beachtung des Vorzeichens des Terms $(y(x))^{3/4}$ zeigt aber, dass dies tatsächlich keine Lösung der DGL ist.