

**Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt
vom 26. Februar 2022**

Aufgabe 1

- (a) Berechnen Sie die beiden Lösungen $w_{1,2} \in \mathbb{C}$ der quadratischen Gleichung

$$w^2 = 3 + 4i.$$

- (b) Nutzen Sie das Ergebnis aus Teil (a), um alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$-2 \left(\sin \left(\frac{z}{2} \right) \right)^2 = i + (2 + i) e^{-iz}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 2

Die Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv durch einen Startwert $a_0 \in [1, 3]$ und die Vorschrift

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n \in [1, 3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
 (b) Überprüfen Sie die Folge $(a_n)_n$ auf Monotonie.
 (c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert in Abhängigkeit von a_0 .

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x \ln(x)} + 1, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $x = 0$ stetig ist.
 (b) Ist die Funktion in $x = 0$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Sei $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$ für $x > -2$.

- (a) Zeigen Sie, dass für die k -te Ableitung von f gilt:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{3 \cdot (2k)!}{2^{2k} k! (x+2)^{\frac{2k+1}{2}}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- (b) Geben Sie die Taylorreihe für f mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ an.
 (c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung und berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y(x)}{2x} + e^x \arctan(e^x) \sqrt{x}, \quad x \in [1, \infty) \quad \text{mit} \quad y(1) = -\frac{1}{2} \ln(1 + e^2).$$

Hinweis: Es gilt $\int \arctan(z) dz = z \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) + C$.

Lösung zu 1:

(a) Mit $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, folgt

$$w^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \stackrel{!}{=} 3 + 4i$$

und wir erhalten durch Vergleich der Real- und Imaginärteile die beiden Gleichungen

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{und} \quad xy = 2.$$

Einsetzen von $y = \frac{2}{x}$ in die erste Gleichung liefert $x^4 - 3x^2 = 4$ mit den beiden Lösungen $x^2 = -1$ und $x^2 = 4$. Da davon nur die zweite eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt, folgt $x_{1,2} = \pm 2$ und $y_{1,2} = \pm 1$. Wir erhalten die zwei Lösungen $w_1 = 2 + i$ und $w_2 = -2 - i$.

(b) Mit der Darstellung $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ erhalten wir

$$\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \left(\frac{1}{2i}\right)^2 (e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}})^2 = -\frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz} - 2).$$

Einsetzen dieser Identität und Multiplikation mit 2 führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} e^{iz} + e^{-iz} - 2 &= 2i + (4 + 2i)e^{-iz} \\ \Leftrightarrow e^{iz} - 2(1 + i) &= (3 + 2i)e^{-iz} \end{aligned}$$

Wir substituieren $u = e^{iz}$ und erhalten die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} u^2 - 2(1 + i)u &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow (u - (1 + i))^2 &= 3 + 2i + (1 + i)^2 = 3 + 4i. \end{aligned}$$

Aus Teil (a) erhalten wir die beiden Lösungen

$$u_{1,2} = \begin{cases} (1 + i) + (2 + i) &= 3 + 2i, \\ (1 + i) - (2 + i) &= -1. \end{cases}$$

Mit $u = e^{iz}$ bzw. $iz = \ln(u) + 2\pi i k = \ln|u| + i \arg(u) + 2\pi i k$ für $k \in \mathbb{Z}$ und

$$|u_1| = \sqrt{13}, \quad \arg(u_1) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right), \quad |u_2| = 1, \quad \arg(u_2) = \arccos(-1) = \pi$$

erhalten wir die Lösungen

$$z = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2k\pi - i \ln(\sqrt{13}) \quad \text{und} \quad z = (1 + 2k)\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung zu 2:

(a) Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: $n = 0$: Nach Voraussetzung gilt $1 \leq a_0 \leq 3$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a_n \in [1, 3]$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $a_n \leq 3$. Somit gilt

$$\begin{aligned} a_n - 3 &\leq 0 & | \cdot 2a_n \\ \stackrel{a_n \geq 1}{\Leftrightarrow} 2a_n^2 - 6a_n &\leq 0 & | + 3a_n \\ \Leftrightarrow 2a_n^2 - 3a_n &\leq 3a_n & | + 3 \\ \Leftrightarrow 2a_n^2 - 3a_n + 3 &\leq 3a_n + 3 \\ \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} &\leq \frac{3(a_n + 1)}{a_n + 1} = 3. \end{aligned}$$

Es bleibt noch $a_{n+1} \geq 1$ zu zeigen. Umformen liefert

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} &\stackrel{!}{\geq} 1 \\ \Leftrightarrow 2a_n^2 - 3a_n + 3 &\geq a_n + 1 \\ \Leftrightarrow 2a_n^2 - 4a_n + 2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(a_n - 1)^2 &\geq 0. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Alternative: Wir zeigen, dass die Funktion $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x + 1}$ monoton steigend ist und erhalten damit

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(3) = 3 \\ f(x) &\geq f(1) = 1 \quad \text{für } x \in [1, 3] \quad \Rightarrow a_{n+1} \in [1, 3]. \end{aligned}$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{(4x - 3)(x + 1) - 2x^2 + 3x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x + 1)^2} = \frac{2(x + 1)^2 - 8}{(x + 1)^2} = 2 - \frac{8}{(x + 1)^2}.$$

Für $x \in [1, 3]$ erhalten wir

$$4 \leq (x + 1)^2 \leq 16 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{16} \leq \frac{1}{(x + 1)^2} \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{8}{(x + 1)^2} \leq 2$$

und somit ist

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{(x + 1)^2} \geq 0 \quad \text{für } x \in [1, 3].$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion f monoton steigend ist.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} - a_n = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3 - a_n(a_n + 1)}{a_n + 1} = \frac{a_n^2 - 4a_n + 3}{a_n + 1} \\ &= \frac{(a_n - 2)^2 - 1}{a_n + 1} \stackrel{a_n - 2 \in [-1, 1]}{\leq} 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Folge $(a_n)_n$ ist monoton fallend.

(c) Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert nach dem Monotoniekriterium. Wir berechnen

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} = \frac{2a^2 - 3a + 3}{a + 1} \\ \Leftrightarrow a^2 + a &= 2a^2 - 3a + 3 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow |a - 2| &= 1 \Rightarrow a = 1 \text{ oder } a = 3. \end{aligned}$$

Für $a_0 \in [1, 3)$ konvergiert die Folge gegen den Grenzwert $a = 1$. Für $a_0 = 3$ ist die Folge konstant 3, also gegen $a = 3$ konvergent.

Lösung zu 3:

(a) Damit die Funktion f in $x = 0$ stetig ist, muss

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \stackrel{!}{=} f(0) = 1$$

erfüllt sein, d.h. wir haben den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ zu berechnen. Mithilfe der Regel von L'Hospital bestimmen wir zunächst

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{x^2}{x} = 0.$$

Somit können wir für die Berechnung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x)}{x \ln(x)}$ die Regel von L'Hospital benutzen. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x)}{x \ln(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\ln(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2}{\ln(x) + 1 + 2x \ln(x) + 2x} = 0.$$

Somit ist $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ und wir haben die Stetigkeit von f in $x = 0$ gezeigt.

(b) Für die Differenzierbarkeit ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ zu berechnen. Der linksseitige Grenzwert ist 0, da $f(x) = 1$ ist für alle $x \leq 0$. Für $x > 0$ ist

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+2x)}{x \ln(x)} + 1 - 1}{x} = \frac{\ln(1+2x)}{x^2 \ln(x)}.$$

Da

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{x^3}{2x} = 0$$

kann erneut die Regel von L'Hospital angewendet werden. Für den Kehrwert von $\frac{\ln(1+2x)}{x^2 \ln(x)}$ berechnen wir

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 \ln(x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x \ln(x) + \frac{x^2}{x}}{\frac{1}{1+2x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (1+2x)(2x \ln(x) + x) = 0.$$

Wenn der Kehrwert jedoch gegen 0 konvergiert, so muss der Bruch $\frac{\ln(1+2x)}{x^2 \ln(x)}$ für $x \rightarrow 0+$ divergieren. Daher ist f in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Achtung: Wenn wir die Regel von L'Hospital anwenden möchten, muss der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$$

existieren. Daher können wir mit L'Hospital nur den Grenzwert des Kehrwertes berechnen.

Lösung zu 4:

(a) Beweis durch vollständige Induktion:

IA: $k = 1$: Wir berechnen die erste Ableitung f' und zeigen damit

$$f'(x) = -\frac{3}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}} = (-1)^1 \frac{3 \cdot 2!}{2^2 1! (x+2)^{\frac{2+1}{2}}}.$$

IV: Die Darstellung für $f^{(k)}$ gelte für ein $k \in \mathbb{N}$.

IS: $k \rightarrow k+1$: Wir berechnen die Ableitung von $f^{(k)}$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' \\ &= (-1)^k \frac{3 \cdot (2k)!}{2^{2k} k!} (-1) \left(\frac{2k+1}{2} \right) (x+2)^{-\frac{2k+1}{2}-1} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{3 \cdot (2k+1)!}{2^{2k+1} k! (x+2)^{\frac{2k+3}{2}}} \cdot \frac{2(k+1)}{2(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{3 \cdot (2k+2)!}{2^{2k+2} (k+1)! (x+2)^{\frac{2k+3}{2}}}. \end{aligned}$$

Damit ist die gegebene Darstellung der k -ten Ableitung nachgewiesen.

(b) Wir berechnen den Funktionswert und den Wert der Ableitungen am Punkt $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{3}{\sqrt{-1+2}} = 3 \\ f^{(k)}(-1) &= (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k} k! (-1+2)^{\frac{2k+1}{2}}} = (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k} k!}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Taylorreihe für f mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} T(x; -1) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) = \left(3 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k} k! k!} (x+1)^k \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} (x+1)^k \right). \end{aligned}$$

(c) Mit dem Quotientenkriterium berechnen wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(-1)^{k+1} 3(2k+2)!(x+1)^{k+1}}{2^{2k+2}(k+1)!(k+1)!} \frac{2^{2k} k! k!}{(-1)^k 3(2k)!(x+1)^k} \right| \\ &= \left| \frac{(2k+2)(2k+1)}{2^2(k+1)^2} \right| |x+1| = \left| \frac{2(k+1)(2k+1)}{4(k+1)(k+1)} \right| |x+1| \\ &= \frac{2k+1}{2k+2} |x+1| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |x+1|. \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist $r = 1$.

Lösung zu 5: Es liegt ein lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung vor.

Allgemeine Lösung der linearen homogenen DGL:

Eine Stammfunktion von $a(x) = \frac{1}{2x}$ ist $A(x) = \frac{1}{2} \ln(x) = \ln(\sqrt{x})$ und die lineare homogene DGL

$$y_h'(x) = \frac{1}{2x} y_h(x)$$

besitzt somit die allgemeine Lösung $y_h(x) = C\sqrt{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Spezielle Lösung der linearen inhomogenen DGL: Variation der Konstanten

Wir setzen den Ansatz $\hat{y}(x) = C(x)\sqrt{x}$ in die DGL ein, um eine Lösung der linearen inhomogenen DGL zu bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \hat{y}'(x) &= C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}C(x)\sqrt{x} + e^x \arctan(e^x)\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow C'(x) &= e^x \arctan(e^x) \\ \Rightarrow C(x) &= \int e^x \arctan(e^x) dx. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $e^x = z$, $e^x dx = dz$ können wir das Integral berechnen,

$$\begin{aligned} \int e^x \arctan(e^x) dx &= \int \arctan(z) dz \stackrel{\text{Hinweis}}{=} z \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) + C \\ &= e^x \arctan(e^x) - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alternativ kann das Integral mithilfe partieller Integration berechnet werden

$$\int e^x \arctan(e^x) dx = e^x \arctan(e^x) - \int e^x \frac{1}{e^{2x}+1} dx = e^x \arctan(e^x) - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C.$$

Eine spezielle Lösung der DGL ist somit durch

$$\hat{y}(x) = \left(e^x \arctan(e^x) - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) \right) \sqrt{x}$$

gegeben.

Allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL: Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL lautet

$$y(x) = \hat{y}(x) + y_h(x) = \left(e^x \arctan(e^x) - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C \right) \sqrt{x}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln(1+e^2) &= y(1) = e \arctan(e) - \frac{1}{2} \ln(1+e^2) + C \\ \Rightarrow C &= -e \arctan(e). \end{aligned}$$