Höhere Mathematik III
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 10. August 2020

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$x^3 y(x) - 2y(x)^5 + \big(2xy(x)^4 - 2x^4\big) y'(x) = 0, \quad x > 0,$$

welche die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ erfüllt. Geben Sie die Lösung in impliziter Form an.

Hinweis: Es existiert ein Eulerscher Multiplikator der Form $\Lambda(x, y) = \ell(xy)$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Menge

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 : x(x-1) - y = 0\}$$

und den Punkt $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge G nicht kompakt ist.

(b) Begründen Sie, warum es in der Menge G Punkte gibt, deren Abstand zum Punkt P minimal ist.

(c) Bestimmen Sie den minimalen Abstand von Punkten aus G zum Punkt P mit der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Fläche

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1,\, x_3 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\},$$

die so orientiert ist, dass der Normalenvektor stets vom Ursprung wegzeigt.

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von ∂S.

(b) Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_2\, x_3 \\ \sqrt{2}\, x_1\, x_3^2 \\ \sin(x_1) - \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

das Integral

$$\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \mathrm{d}o.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Stokes.

Aufgabe 4

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - 4\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$$

für $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \infty)$ mit den Randbedingungen

$$u(x, 0) = \cos(2\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0.$$

Bestimmen Sie mithilfe des Separationsansatzes eine beschränkte Lösung $u\colon [0, 1] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ für dieses Problem.

Aufgabe 5

Ein Burger-Restaurant bietet drei Speisen an: Hamburger (H), veganer Burger (V) und Pommes (P). 60% aller Kunden bestellen einen Hamburger, 20% einen veganen Burger und 70% bestellen Pommes. Manche Kunden bestellen auch Hambuger und Pommes oder einen veganen Burger und Pommes, aber niemand bestellt einen Hamburger und einen veganen Burger zusammen. 20% aller Kunden bestellen nur Pommes. Von den Kunden, die einen Hamburger bestellen, bestellen 60% Pommes dazu.

(a) Wie viel Prozent aller Kunden bestellen einen Hamburger oder veganen Burger? Und wie viel Prozent dieser Kunden bestellen dazu Pommes?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand einen veganen Burger bestellt, wenn er Pommes bestellt?

(c) Angenommen ein Hamburger kostet 10, ein veganer Burger 9 und Pommes 3. Sei X die Zufallsvariable, die einem Kunden seinen zu bezahlenden Preis zuordnen. Was ist der Erwartungswert von X?

Lösung zu 1: Wir setzen

$$P(x,y) = \ell(xy)(x^3y - 2y^5), \quad Q(x,y) = \ell(xy)(2xy^4 - 2x^4)$$

und überprüfen die Integrabilitätsbedingung. Es ist

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \ell(xy)(x^3 - 10y^4) + x\ell'(xy)(x^3y - 2y^5)$$

und

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \ell(xy)(2y^4 - 8x^3) + y\ell'(xy)(2xy^4 - 2x^4).$$

Die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ lautet dann

$$\ell(xy)(x^3 - 10y^4 - 2y^4 + 8x^3) + \ell'(xy)(x^4y - 2xy^5 - 2xy^5 + 2x^4y) = 0,$$

bzw.

$$3\ell(xy)(3x^3 - 4y^4) + xy\ell'(xy)(3x^3 - 4y^4) = 0$$

Wir teilen die Gleichung durch $(3x^3 - 4y^4)$ und substituiren $t = xy$. Dann erfüllt ℓ die separable Differentialgleichung

$$3\ell(t) + t\ell'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell'(t)}{\ell(t)} = -\frac{3}{t}.$$

Integration auf beiden Seiten liefert $\ln(\ell(t)) = -3\ln(t) = \ln(t^{-3})$, d.h. $\ell(t) = \frac{1}{t^3}$, bzw.

$$\Lambda(x,y) = \ell(xy) = \frac{1}{x^3y^3}.$$

Damit erhalten wir

$$P(x,y) = \frac{1}{y^2} - 2\frac{y^2}{x^3}, \quad Q(x,y) = 2\frac{y}{x^2} - 2\frac{x}{y^3}$$

Für das Potential f machen wir den Ansatz $f(x,y) = \int P(x,y)dx + c(y)$ und erhalten

$$f(x,y) = \int \frac{1}{y^2} - 2\frac{y^2}{x^3}\mathrm{d}x + c(y) = \frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + c(y)$$

Aus der Bedingung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ erhalten wir

$$2\frac{y}{x^2} - 2\frac{x}{y^3} = -2\frac{x}{y^3} + 2\frac{y}{x^2} + c'(y)$$

also $c'(y) = 0$, bzw. $c(y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Damit ist die Lösung der Differentialgleichung implizit durch $f(x, y(x)) = c$ gegeben, d.h.

$$c = \frac{x}{y(x)^2} + \frac{y(x)^2}{x^2}.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ folgt $c = 2$ und damit insgesamt die Lösung

$$2 = \frac{x}{y(x)^2} + \frac{y(x)^2}{x^2}.$$

Lösung zu 2:

(a) G ist abgeschlossen, da $h(x,y) = x(x-1) - y$ stetig ist. Also müssen wir zeigen, dass G nicht beschränkt ist. Wir setzen zum Beispiel $x_n = n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der Gleichung $x(x-1) - y = 0$, dass mit $y_n = n(n-1)$ die Punkte (x_n, y_n) in der Menge G liegen, es gilt jedoch $\|(x_n, y_n)^\top\|_2 = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geqslant |x_n| = n \to \infty$ für $n \to \infty$. Also ist G nicht beschränkt und damit nicht kompakt.

(b) Der Punkt $(0,0)^\top$ liegt in der Menge G und hat den Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zu dem Punkt P. Das bedeutet, dass wir die Suche nach Punkten mit minimalem Abstand auf die Menge

$$\widetilde{G} = G \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - P\|_2 \leqslant 2020\}$$

beschränken können. $\widetilde{G}$ ist kompakt, da sie Schnittmenge einer abgeschlossenen und einer kompakten Menge ist. Da die Funktion

$$x \mapsto \|x - P\|_2$$

stetig ist und $\widetilde{G}$ kompakt, werden auf $\widetilde{G}$ Minima und Maxima angenommen, also existieren Punkte in G, deren Abstand zu P minimal ist.

(c) Wir stellen die Lagrange-Funktion auf, um den quadrierten Abstand zu P unter der Nebenbedingung $h(x,y) = x(x-1) - y = 0$ zu minimieren:

$$L(x,y,\lambda) = (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + \lambda(x(x-1) - y).$$

Kritische Punkte erfüllen $\nabla L = 0$ und $\nabla h \neq 0$. Es ist

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle } (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$$

und

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x-1/2) + \lambda(2x-1) \\ 2(y-1/2) - \lambda \\ x(x-1) - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+2\lambda)(x-1/2) \\ 2(y-1/2) - \lambda \\ x(x-1) - y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Gleichung lesen wir ab, dass entweder $\lambda = -1$ oder $x = \frac{1}{2}$. Ist $\lambda = -1$ so folgt aus der zweiten Gleichung

$$2(y - 1/2) + 1 = 0 \Leftrightarrow y - 1/2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 0$$

und dann mit der dritten Gleichung

$$x(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1.$$

Wir erhalten die kritischen Punkte $x_1 = (0,0)^\top$ und $x_2 = (1,0)^\top$. Ist hingegen $x = \frac{1}{2}$, so erhalten wir aus der dritten Gleichung direkt

$$y = x(x-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{4}$$

und damit den dritten kritischen Punkt $x_3 = (1/2, -1/4)^\top$. Die kritischen Punkte haben die Abstände

$$d(x_3, P) = \sqrt{(1/2 - 1/2)^2 + (-1/4 - 1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d(x_1, P) = d(x_2, P) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Also minimieren sowohl x_1 als auch x_2 den Abstand von P zu G. Der minimale Abstand beträgt $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösung zu 3:

(a) $\|x\|_2 = 1$ beschreibt eine Kugeloberfläche. In Kugelkoordinaten wird die Kugeloberfläche durch

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi]$$

beschrieben. Der Rand von S ist durch $x_3 = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gegeben. Also ist $\theta = \frac{\pi}{4}$. Wir erhalten die Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi], \quad \gamma(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen

$$\gamma'(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$F(\gamma(\varphi)) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)/2 \\ \cos(\varphi)/2 \\ \sin(\cos(\varphi)/\sqrt{2}) - \cos(\sin(\varphi)/\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

Mit dem Satz von Stokes und unter Beachtung der Orientierung folgt

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \mathrm{d}o &= -\int_{\partial S} F(x) \cdot \mathrm{d}\ell = -\int_0^{2\pi} F(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \mathrm{d}\varphi \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \int \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi.\end{aligned}$$

Lösung zu 4: Wir machen den Ansatz

$$u(x, y) = v(x)w(y)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$v''(x)w(y) - 4v(x)w'(y) = 0$$

Dividieren durch $u(x, y) = v(x)w(y)$ ($u \neq 0$ wegen der ersten Randbedingung) liefert

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = 4\frac{w'(y)}{w(y)}$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von y abhängt, sind beide Seiten konstant einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir lösen zuerst

$$4\frac{w'(y)}{w(y)} = \lambda$$

was äquivalent zu

$$w'(y) = \frac{\lambda}{4} w(y)$$

ist. Die allgemeine Lösung ist

$$w(y) = A_\lambda e^{\frac{\lambda}{4} y}$$

mit Konstanten $A_\lambda \in \mathbb{R}$. Da die gesuchte Lösung beschränkt sein soll, muss $\lambda \leq 0$ sein. Es gilt auch $A_\lambda \neq 0$, denn u ist wgen der ersten Randbedingung nicht trivial. Als nächstes lösen wir

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda$$

also

$$v''(x) = \lambda(x)v(x)$$

mit $\lambda \leq$. Für $\lambda = 0$ erhalten wir ein lineares Polynom $v(x) = ax + b$ als Lösung. Da die Lösung beschränkt sein soll muss $a = 0$ sein, d. h. v ist eine Konstante. Dieser konstante Fall ist auch in der folgende Lösung enthalten, weshalb wir ihn nicht separat betrachten müssen. Die allgemeine Lösung ist

$$v(x) = B_\lambda \sin(\sqrt{|\lambda|}x) + C_\lambda \cos(\sqrt{|\lambda|}x)$$

mit Konstanten $B_\lambda, C_\lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall $\lambda = 0$ erhalten wir aus der ersten und zweiten Randbedingung keine neuen Informationen. Im Fall $\lambda \neq 0$ können wir wie folgt schließen: Die zweite Randbedingung ergibt

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = v'(0)w(y) = \left(B_\lambda \sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|}0) - C_\lambda \sqrt{|\lambda|} \sin(\sqrt{|\lambda|}0)\right) A_\lambda e^{\frac{\lambda}{4} y}$$

also $B_\lambda = 0$, denn $A_\lambda \neq 0$. Die dritte Randbedingung ergibt

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = v'(1)w(y) = \left(B_\lambda \sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|}1) - C_\lambda \sqrt{|\lambda|} \sin(\sqrt{|\lambda|}1)\right) A_\lambda e^{\frac{\lambda}{4} y}$$

also wegen $B_\lambda = 0$, $A_\lambda \neq 0$ die Gleichung $\sin(\sqrt{|\lambda|}) = 0$, d. h. $\sqrt{|\lambda|} = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ bzw. $\lambda = -k^2\pi^2$. Die Lösung für $v(x)$ ist also

$$v(x) = C_k \cos(k\pi x)$$

diese enthält auch den Fall für $\lambda = 0$, sodass wir diesen nicht separat betrachten müssen. Die allgemeine Lösung für $u(x, y)$ erhalten wir durch aufsummieren über λ bzw. über k:

$$u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{4} y} \cos(k\pi x)$$

mit Koeffizienten $D_k = A_\lambda C_\lambda \in \mathbb{R}$. Koeffizientenvergleich mit der ersten Randbedingung

$$u(x, 0) = \cos(2\pi x)$$

liefert

$$D_k = \begin{cases} 1 & k = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Lösung für das Problem ist damit

$$u(x, y) = e^{-\pi^2 y} \cos(2\pi x).$$

Lösung zu 5: Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$P(H) = 0,6; \quad P(V) = 0,2; \quad P(P) = 0,7; \quad P(H \cap V) = 0;$$
$$P(P \cap (H \cup V)^c) = 0,2; \quad P(P \mid H) = 0,6$$

(a)

$$P(H \cup V) = P(H) + P(V) - P(H \cap V) = 0,6 + 0,2 + 0 = 0,8$$

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P \mid H \cup V) \cdot P(H \cup V) + P(P \mid (H \cup V)^c) \cdot P((H \cup V)^c) \\ &= P(P \mid H \cup V) \cdot 0,8 + 0,2 \\ \Rightarrow\ & P(P \mid H \cup V) = (0,7 - 0,2)/0,8 = 5/8 = 0,625 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 0,5 &= P(P \mid H \cup V) \cdot P(H \cup V) = P(P \cap (H \cup V)) = P(P \cap H) + P(P \cap V) \\ &= P(P \mid H)P(H) + P(V \mid P)P(P) = 0,6 \cdot 0,6 + P(V \mid P) \cdot 0,7 \\ \Rightarrow & P(V \mid P) = (0,5 - 0,6 \cdot 0,6)/0,7 = 0,2 \end{aligned}$$

(c) Wir haben folgende disjunkte Mengen:

$$P \cap (H \cup V)^c,\ P \cap H,\ P \cap V,\ H \cap P^c,\ V \cap P^c$$

mit

$$\begin{aligned} &X(P \cap (H \cup V)^c) = 3, \quad X(P \cap H) = 13, \quad X(P \cap V) = 12 \\ &X(H \cap P^c) = 10, \quad X(V \cap P^c) = 9 \end{aligned}$$

und Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} &P(P \cap (H \cup V)^c) = 0,2 = 10/50 \\ &P(P \cap H) = P(P \mid H)P(H) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36 = 18/50 \\ &P(P \cap V) = P(V \mid P)P(P) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14 = 7/50 \\ &P(H \cap P^c) = P(H) - P(H \cap P) = 0,6 - 0,36 = 0,24 = 12/50 \\ &P(V \cap P^c) = P(V) - P(V \cap P) = 0,2 - 0,14 = 0,06 = 3/50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 \cdot 0,2 + 13 \cdot 0,36 + 12 \cdot 0,14 + 10 \cdot 0,24 + 9 \cdot 0,06 \\ &= 0,6 + 4,68 + 1,68 + 2,4 + 0,54 \\ &= 3 + 6,36 + 0,54 = 9,9 \end{aligned}$$

Alternative: Es ist

$$E(X) = P(H) \cdot 10 + P(V) \cdot 9 + P(P) \cdot 3 = 10 \cdot 0,6 + 9 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,7 = 9,9.$$