Karlsruher Institut für Technologie

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik III
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 10. August 2021

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x - \frac{2x^2}{y(x)^2} + \left(1 + \frac{x}{y(x)^2}\right)\frac{x^2\, y'(x)}{y(x)} = 0\,, \quad x > 0\,, \quad \text{mit} \quad y(1) = 1 + \sqrt{2}\,,$$

in expliziter Form.

Hinweis: Es gibt einen Euler'schen Multiplikator der Form $\lambda = \lambda\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Menge

$$M = \left\{x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - 2x_2^2 + 5x_2 - 7 = 0\right\}.$$

Begründen Sie, dass es einen Punkt $p \in M$ mit geringstem Abstand vom Ursprung gibt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

Aufgabe 3

Eine Vase besteht aus dem kreisförmigen Boden

$$B = \left\{x_1^2 + x_2^2 \leq 4\,,\ x_3 = 0\right\}$$

und der Mantelfläche M, die den Boden mit der Öffnung verbindet, die durch die Kurve

$$E = \left\{2x_1^2 + x_2^2 = 2\,,\ x_3 = 2\right\}$$

beschrieben ist. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_M \operatorname{rot}\begin{pmatrix} x_2^2 x_3 \\ x_1 x_2^2 \\ \mathrm{e}^{x_1 x_2} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{do}\,.$$

Hierbei soll M so orientiert sein, dass der Normalenvektor von der x_3-Achse wegzeigt.

Aufgabe 4

Verwenden Sie das Charakteristiken-Verfahren, um das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + xy^2\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{1}{x}\,u(x,y) = 0\,, \qquad x > 1\,,\ y > 0\,,$$

mit $u(1,y) = y^2$, $y > 0$, zu lösen.

Aufgabe 5

Bei der Eisdiele *Laplace Glace* gibt es den Spezialbecher. Er besteht aus drei Kugeln Eis, wobei zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Kugel eine der Sorten *Vanille, Erdbeer* oder *Schokolade* ausgewählt wird. Es gibt allerdings die Einschränkung, dass höchstens einmal *Schokolade* vorkommen darf.

(a) Stellen Sie einen geeigneten Ergebnisraum für die Zusammenstellung des Spezialbechers auf und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Becher mindestens eine Kugel *Vanille* enthält unter der Bedinung, dass mindestens eine Kugel *Erdbeer* enthalten ist.

(c) Geben Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariable X an, deren Wert die Gesamtzahl von *Erdbeer*- und *Schokoladen*-Kugeln ist.

Lösung zu 1: Mit dem Euler'schen Multiplikator in der angegebenen Form definieren wir

$$P(x,y) = \lambda\left(\frac{x}{y}\right)\left(x - \frac{2x^2}{y^2}\right), \qquad Q(x,y) = \lambda\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^3}\right).$$

Die Integrabilitätsbedinung $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y)$ liefert

$$-\lambda'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^2}\left(x - \frac{2x^2}{y^2}\right) + \lambda\left(\frac{x}{y}\right)\frac{4x^2}{y^3} = \lambda'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^3}\right) + \lambda\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{2x}{y} + \frac{3x^2}{y^3}\right).$$

Wir sortieren die Terme nach λ und λ':

$$\lambda'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^4} + \frac{x^2}{y^2} - \frac{2x^3}{y^4}\right) = \lambda\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{4x^2}{y^3} - \frac{2x}{y} - \frac{3x^2}{y^3}\right),$$

bzw.

$$\lambda'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{x^3}{y^4}\right) = \lambda\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{2x}{y}\right).$$

Man kann nun $\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{2x}{y}$ kürzen. Nach der Substitution $t = x/y$ erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-\lambda'(t)\,t = \lambda(t).$$

Separation und anschließende Integration liefert

$$\log\lambda(t) = -\log(t) = \log\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \text{also} \quad \lambda(t) = \frac{1}{t}.$$

Damit ist

$$P(x,y) = y - \frac{2x}{y}, \qquad Q(x,y) = x + \frac{x^2}{y^2}.$$

Wir integrieren P bezüglich x und erhalten

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = xy - \frac{x^2}{y} + c(y).$$

Somit ist

$$x + \frac{x^2}{y^2} = Q(x,y) = \partial_y F(x,y) = x + \frac{x^2}{y^2} + c'(y), \quad \text{also} \quad c'(y) = 0.$$

Wir wählen $c(y) = 0$. Die Lösungen der Differentialgleichung sind also implizit durch die Gleichungen

$$F(x,y(x)) = x\,y(x) - \frac{x^2}{y(x)} = C$$

für $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Mit der Anfangsbedingung folgt

$$C = 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1 - \sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems erfüllt also

$$0 = y(x)^2 - \frac{2}{x}\,y(x) - x = \left(y(x) - \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2} - x.$$

Bei der Auflösung nach $y(x)$ muss man noch beachten, dass die Anfangsbedingung nur für das +-Vorzeichen vor der Wurzel erfüllt ist. Damit erhält man

$$y(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x + \frac{1}{x^2}}, \qquad x > 0.$$

Lösung zu 2: Die Menge M ist abgeschlossen, da die sie durch eine Bedingung $g(x) = 0$ definiert ist, bei der g stetig ist. Alledings ist M nicht beschränkt.

Der Punkt $(\frac{7}{2}, 0)^\top$ liegt in M und hat den Abstand $7/2$ vom Ursprung. Betrachte also

$$\hat{M} = M \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 7/2\}$$

Diese Menge ist als Schnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen, beschränkt und nicht leer. Die Funktion $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ist stetig. Somit besitzt f auf $\hat{M}$ eine Minimalstelle p. Für alle $x \in \hat{M}$ und alle $y \in M \setminus \hat{M}$ gilt damit

$$f(p) \leq f(x) \leq \frac{7}{2} < f(y).$$

Also ist p sogar Minimalstelle von f auf M.

Zur Berechnung von p verwenden wir die Lagrangefunktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x) + \lambda\,g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\left(2x_1 - 2x_2^2 + 5x_2 - 7\right).$$

Der Gradient von g ist

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4x_2 + 5 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Sämtliche kritische Punkte erfüllen also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} &= 2x_1 + 2\lambda && \overset{!}{=} 0, \\
\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} &= 2x_2 - \lambda\,(4x_2 - 5) && \overset{!}{=} 0, \\
\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} &= 2x_1 - 2x_2^2 + 5x_2 - 7 && \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $\lambda = -x_1$. Damit erhalten wir aus der zweiten Gleichung

$$x_1 = \frac{2x_2}{5 - 4x_2}.$$

Dies in dritte eingesetzt ergibt

$$0 = 4x_2 - (5 - 4x_2)\,(2x_2^2 - 5x_2 + 7) = 8x_2^3 - 30x_2^2 + 57x_2 - 35.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $x_2 = 1$. Wir erhalten $x_1 = 2$.

Durch Ausklammern des Linearfaktors $x_2 - 1$ erhalten wir

$$0 = (x_2 - 1)\,(8x_2^2 - 22x_2 + 35) = 2\,(x_2 - 1)\left(\left(2x_2 - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + 35\right).$$

Da $121 < 4 \cdot 35 = 140$ ist, gibt es keine weiteren reelle Lösungen.

Der einzige kritische Punkt und damit der Punkt p ist also $(2,1)^\top$.

Lösung zu 3: Wir können den Satz von Stokes auf die Vereinigung $M \cup B$ anwenden. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld gilt

$$\iint_{M\cup B} \operatorname{rot} F(x)\,\mathrm{do} = \int_E F(x)\cdot \mathrm{d}\ell\,.$$

Also ist

$$\iint_M \operatorname{rot} F(x)\,\mathrm{do} = \int_E F(x)\cdot \mathrm{d}\ell - \iint_B \operatorname{rot} F(x)\,\mathrm{do}\,.$$

Zunächst berechnen wir das Integral über B. Es ist

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x_2^2 x_3 \\ x_1 x_2^2 \\ \mathrm{e}^{x_1 x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\,\mathrm{e}^{x_1x_2} \\ x_2^2 - x_2\,\mathrm{e}^{x_1x_2} \\ x_2^2 - 2x_2x_3\end{pmatrix}.$$

Dazu parametrisieren wir B mit Hilfe von Zylinderkoordinaten als

$$B = \left\{ X(r,\varphi) = r\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{pmatrix} : r \in (0,2)\,,\ \varphi \in (-\pi,\pi] \right\}.$$

Der zugehörige Normalenvektor

$$\partial_r X(r,\varphi) \times \partial_\varphi X(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-r\,\sin\varphi \\ r\,\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}$$

zeigt in Richtung der positiven x_3-Achse. Damit die Orientierung von B zur geforderten Orientierung von M passt, müssen wir das umgekehrte Vorzeichen wählen, also

$$\begin{aligned}
\iint_B \operatorname{rot}\begin{pmatrix} x_2^2 x_3 \\ x_1 x_2^2 \\ \mathrm{e}^{x_1 x_2}\end{pmatrix}\cdot \mathrm{do} &= -\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 \begin{pmatrix} r\cos\varphi\,\mathrm{e}^{r^2\cos\varphi\sin\varphi} \\ r^2\sin\varphi - r\sin\varphi\,\mathrm{e}^{r^2\cos\varphi\sin\varphi} \\ r^2\sin^2\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = -4\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -4\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin\varphi\,\cos\varphi\right]_{-\pi}^{\pi} = -4\pi\,.
\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung der Kurve E können wir ebenfalls mit Zylinderkoordinaten finden:

$$E = \left\{ y(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ 2\end{pmatrix} : \varphi \in (-\pi,\pi] \right\}.$$

Schaut man von oben auf die Kurve (also entgegengesetzt zur x_3-Richtung) so wird E hierbei entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen. Damit die Orientierung zur Orientierung von M passt, muss wieder das Vorzeichen gendert werden:

$$\begin{aligned}
\int_E \begin{pmatrix} x_2^2 x_3 \\ x_1 x_2^2 \\ \mathrm{e}^{x_1 x_2}\end{pmatrix}\cdot \mathrm{d}\ell &= -\int_{-\pi}^{\pi}\begin{pmatrix} 4\,\sin^2\varphi \\ 2\,\sin^2\varphi\,\cos\varphi \\ \mathrm{e}^{\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \sqrt{2}\,\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(4\sin^3\varphi - 2\sqrt{2}\,\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,.
\end{aligned}$$

Da $\sin^3$ eine ungerade Funktion ist, verschwindet das erste Integral. Wir erhalten durch partielle Integration

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{1}{3}\,\sin^3\varphi\,\cos\varphi\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Also ist

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Es folgt

$$\int_E \begin{pmatrix} x_2^2 x_3 \\ x_1 x_2^2 \\ \mathrm{e}^{x_1 x_2}\end{pmatrix}\cdot \mathrm{d}\ell = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Insgesamt folgt

$$\iint_M \operatorname{rot}\begin{pmatrix} x_2^2 x_3 \\ x_1 x_2^2 \\ \mathrm{e}^{x_1 x_2}\end{pmatrix}\mathrm{do} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 4\pi = \pi\left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Lösung zu 4: Das charkateristische Differentialgleichungssystem lautet

$$\begin{aligned}
k_1'(s) &= 1\,,\\
k_2'(s) &= k_1(s)\,k_2(s)^2\,,\\
w'(s) &= \frac{w(s)}{k_1(s)}\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten aus der ersten Gleichung $k_1(s) = s + c_1$. Damit lautet die zweite Gleichung

$$\frac{k_2'(s)}{k_2(s)^2} = s + c_1\,,\qquad \text{also}\quad k_2(s) = -\frac{1}{\frac{s^2}{2} + c_1\,s + c_2}\,,$$

und die dritte Gleichung

$$\frac{w'(s)}{w(s)} = \frac{1}{s+c_1}\,,\qquad \text{also}\quad w(s) = c_3\,(s+c_1)\,.$$

Die Parametrisierung der Anfangskurve ist $\gamma(t) = (1, t, t^2)^\top$, $t > 0$. Für $s = 0$ sollen die Charakteristiken die Anfangskurve schneiden. Dies führt auf die Bedingungen

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_1(t) \overset{!}{=} k_1(0) = c_1\,, \\ t &= \gamma_2(t) \overset{!}{=} k_2(0) = -\frac{1}{c_2}\,, \\ t^2 &= \gamma_3(t) \overset{!}{=} w(0) = c_3\,c_1\,. \end{aligned}$$

Es folgt $c_1 = 1$, $c_2 = -1/t$, $c_3 = t^2$. Wir erhalten die Parametrisierung der Lösungsfläche

$$\begin{aligned} X(s,t) &= s + 1\,, \\ Y(s,t) &= -\frac{1}{\frac{s^2}{2} + s - \frac{1}{t}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}(s+1)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{t}}\,, \\ U(s,t) &= t^2\,(s+1)\,. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$s = x - 1\,, \qquad t = \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}} = \frac{2y}{2 - y + x^2\,y}\,.$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt sich

$$u(x,y) = \frac{4\,x\,y^2}{(1 - y + x^2\,y)^2}\,.$$

Lösung zu 5: (a) Wir kürzen die Geschmacksrichtungen mit E, S und V ab. Die Eiskugeln werden ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, in der sie gezogen werden, betrachtet, und S darf hchstens einmal vorkommen. Dies ergibt den Ergebnisraum

$$\Omega = \{\text{EEE, EEV, EVV, VVV, EES, ESV, SVV}\}.$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten geht man zunächst von der Situation mit Berücksichtigung der Reihenfolge aus. Wurde bei einem Experiment noch nicht S gewählt, so ist die Wahrscheinlichkeit für jede der Sorten bei der nächsten Kugel $\frac{1}{3}$. Wurde bereits S gewählt, so ist die Wahrscheinlichkeit für die anderen beiden Sorten je $\frac{1}{2}$. Damit erstellen wir folgende Tabelle, in der auch schon mögliche Werte der Zufallsvariable X aus (c) augeführt sind.

Ereignis	Anzahl Reihenfolgen			$P =$	$X =$
	gesamt	mit 1. Kugel S	mit 2. Kugel S		
EEE	1	0	0	$\frac{1}{27}$	3
EEV	3	0	0	$\frac{1}{9}$	2
EVV	3	0	0	$\frac{1}{9}$	1
VVV	1	0	0	$\frac{1}{27}$	0
EES	3	1	1	$\frac{1}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{19}{108}$	3
ESV	6	2	2	$\frac{2}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{19}{54}$	2
SVV	3	1	1	$\frac{1}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{19}{108}$	1

(b) Nach der Formel von Bayes ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(\#\text{V} \ge 1 | \#\text{E} \ge 1) = \frac{P(\#\text{V} \ge 1 \text{ und } \#\text{E} \ge 1)}{P(\#\text{E} \ge 1)}\,.$$

Nach der Tabelle ist

$$\begin{aligned} P(\#\text{E} \ge 1) &= P(\text{EEE}) + P(\text{EEV}) + P(\text{EVV}) + P(\text{EES}) + P(\text{ESV}) \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{19}{108} + \frac{19}{54} = \frac{4 + 12 + 12 + 19 + 38}{108} = \frac{85}{108}\,, \\ P(\#\text{V} \ge 1 \text{ und } \#\text{E} \ge 1) &= P(\text{EEV}) + P(\text{EVV}) + P(\text{ESV}) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{19}{54} = \frac{12 + 12 + 38}{108} = \frac{62}{108}\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$P(\#\text{V} \ge 1 | \#\text{E} \ge 1) = \frac{62}{85}\,.$$

(c) Die möglichen Werte der Zufallsvariable X sind unter (a) aufgeführt. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\text{VVV}) = \frac{1}{27}\,, \\ P(X = 1) &= P(\text{EVV}) + P(\text{SVV}) = \frac{1}{9} + \frac{19}{108} = \frac{31}{108}\,, \\ P(X = 2) &= P(\text{EEV}) + P(\text{ESV}) = \frac{1}{9} + \frac{19}{54} = \frac{50}{108}\,, \\ P(X = 3) &= P(\text{EEE}) + P(\text{EES}) = \frac{1}{27} + \frac{19}{108} = \frac{23}{108}\,. \end{aligned}$$

Damit können wir die Verteilungsfunktion direkt angeben:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ \frac{1}{27} & x < 1\,, \\ \frac{35}{108} & x < 2\,, \\ \frac{85}{108} & x < 3\,, \\ 1 & x \ge 3\,. \end{cases}$$

Der Erwartungswert von X ergibt sich als

$$E[X] = \sum_{k=0}^{3} k\,P(X = k) = 1 \cdot \frac{31}{108} + 2 \cdot \frac{50}{108} + 3 \cdot \frac{23}{108} = \frac{31 + 100 + 69}{108} = \frac{50}{27}\,.$$