Karlsruher Institut für Technologie

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik III
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 23. August 2022

Aufgabe 1

Bestimmen Sie in expliziter Form die Lösung des Anfangswertproblems

$$-x\,(y(x))^2 + (x+1)\,y(x)\,y'(x) = 0 \quad \text{für } x > 0 \qquad \text{mit} \quad y(0) = 2\,.$$

Hinweis: Es gibt einen Euler'schen Multiplikator, der von ye^x abhängt.

Aufgabe 2

Gegeben ist die abgeschlossene Menge

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 4(x_1+1)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)^2 = 1 \right\}$$

(a) Begründen Sie, dass es eine minimale und eine maximale x_3-Koordinate für Vektoren in M gibt.

(b) Berechnen Sie den minimalen und den maximalen Wert der x_3-Koordinate zu Elementen in M.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, parametrisiert durch

$$x(t) = \sin(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]\,.$$

(a) Ist Γ durch $x : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert ?

(b) Die Kurve schließt ein ebenes Flächenstück A in der x_1, x_2-Ebene ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt von A, indem Sie das Vektorfeld $F(x) = (0, x_1, 0)^\top$ und den Stokes'schen Satz verwenden.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_2} \right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - (u(x))^{\frac{1}{2}} = 0$$

mit $u(x_1, 0) = x_1^2$.

Aufgabe 5

Es werden zwei Tetraeder gewürfelt, deren Seiten jeweils mit Augenzahlen $1, 2, 3, 4$ beschriftet sind. Gewertet wird die Augenzahl, auf der der Würfel liegen bleibt, d.h. die gewerteten Augenzahlen 1-4 jedes Würfels sind gleich wahrscheinlich. Wir bezeichnen mit Ω die Ergebnismenge und mit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die Zufallsvariable, die jedem Wurf die Augensumme zuordnet. Weiter definieren wir die Ereignisse

$$A = \{\omega \in \Omega : \text{mindestens ein Tetraeder zeigt die Augenzahl } 2\}$$

und

$$B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 4\}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

(b) Sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig?

(c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme kleiner oder gleich vier ist, wenn wir wissen, dass kein Würfel eine 2 anzeigt.

(d) Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X.

Lösung zu 1: Mit einem Multiplikator $\lambda(ye^x)$ definieren wir

$$P(x,y) = -xy^2\lambda(ye^x) \quad \text{und} \quad Q(x,y) = (x+1)y\lambda(ye^x)\,.$$

Mit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \stackrel{!}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

und den Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -xy^2 e^x\,\lambda'(ye^x) - 2xy\,\lambda(ye^x)\,,\\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= y\,\lambda(ye^x) + (x+1)e^x y^2\,\lambda'(ye^x) \end{aligned}$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$(2xy+y)\,ye^x\,\lambda'(ye^x) = (-2xy-y)\,\lambda(ye^x)$$

bzw. mit $t = ye^x$ folgt

$$t\lambda'(t) + \lambda(t) = 0\,.$$

Durch Separation erhalten wir

$$\ln\lambda(t) = -\ln(t) + \tilde{c}$$

und somit als möglichen Multiplikator $\lambda(t) = t^{-1}$, also $\lambda(ye^x) = \frac{1}{y}e^{-x}$.

Die ursprüngliche DGL wird exakt, wenn wir sie mit $\frac{1}{y}e^{-x}$ multiplizieren. Das Potential F mit $\nabla F = (P,Q)^\top$ ergibt sich aus

$$F(x,y) = \int (x+1)e^{-x}\,dy = (x+1)ye^{-x} + c(x)\,.$$

Leiten wir partiell nach x ab, so folgt

$$ye^{-x} - (x+1)ye^{-x} + c'(x) = -xye^{-x} + c'(x) = P(x,y)\,.$$

Also ist $c'(x) = 0$ und wir bekommen $c(x) = \mathrm{k} \in \mathbb{R}$.
Somit sind Lösungen der Differentialgleichung implizit durch

$$F(x,y) = (x+1)ye^{-x} = k$$

für Konstanten $k \in \mathbb{R}$ gegeben. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ folgt $k = 2$ und durch Auflösen der impliziten Gleichung ergibt sich die Lösung

$$y(x) = \frac{2e^x}{x+1}\,.$$

Lösung zu 2: zu (a): Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_3$ ist stetig. Da die Menge M abgeschlossen ist, bleibt zu zeigen, dass M beschränkt ist, da eine stetige Funktion auf kompakten Mengen Extremalstellen besitzt.

Da in der Beschreibung von M alle Summanden positiv sind, gelten für $x \in M$ die Abschätzungen $|x_1+1| \le \frac{1}{2}$, $|x_2-x_3| \le 1$ und $|x_3-x_1| \le \sqrt{2}$. Somit folgt $|x_1| \le |x_1+1-1| \le |x_1+1|+1 \le \frac{3}{2}$,

$$|x_2| - |x_3| \le |x_2 - x_3| \le 1 \quad \text{und} \quad |x_3| - |x_1| \le |x_3 - x_1| \le \sqrt{2}\,.$$

Aus der letzten Ungleichung ergibt sich $|x_3| \le \sqrt{2} + |x_1| \le \sqrt{2} + \frac{3}{2}$. Weiter erhalten wir $|x_2| \le 1 + |x_3| \le \sqrt{2} + \frac{5}{2}$. Also ist M beschränkt.

zu (b): Wir setzen $f(x) = x_3$ und

$$g(x) = 4(x_1+1)^2 + (x_2-x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_3-x_1)^2 - 1\,.$$

Mit der Lagrange Funktion $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ liefert die Multiplikatorenregel die notwendige Bedingung $\nabla L(x,\lambda) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 8\lambda(x_1+1) - \lambda(x_3-x_1) &= 0\\ 2\lambda(x_2-x_3) &= 0\\ 1 - 2\lambda(x_2-x_3) + \lambda(x_3-x_1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Bedingung folgt $x_2 = x_3$, da wegen der dritten Bedingung $\lambda \ne 0$ gilt. Weiter liefert die erste Bedingung

$$x_3 - x_1 = 8(x_1+1)\,.$$

Einsetzen in $g(x) = 0$ ergibt

$$4(x_1+1)^2 + 32(x_1+1)^2 = 36(x_1+1)^2 = 1$$

bzw. $x_1 = -\frac{5}{6}$ oder $x_1 = -\frac{7}{6}$. Aus $x_3 = x_1 + 8(x_1+1)$ ergeben sich mögliche extremale Zielfunktionswerte $x_3 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{5}{2}$.

Um zu prüfen, dass es sich um ein Maximum bzw. Minimum von f handelt, schliessen wir noch Stellen aus, an denen die Multiplikatorenregel eventuell nicht greift; denn mit

$$\nabla g(x) = (8(x_1+1) - (x_3-x_1), 2(x_2-x_3), -2(x_2-x_3) + (x_3-x_1))^\top$$

gilt nur für $x = (-1,-1,-1) \notin M$, dass $\nabla g(x) = 0$ ist. Somit gilt in den wegen (a) existierenden Extremalstellen die Multiplikatorenregel und wir erhalten $\min_{x\in M} f(x) = -\frac{5}{2}$ und $\max_{x\in M} f(x) = \frac{1}{2}$.

Lösung zu 3: zu(a): Wir berechnen

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\|^2 &= \left\| \cos(t)\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 0\end{pmatrix}\right\|^2\\ &= (\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + (2\cos(t)\sin(t))^2 = (\cos^2(t) + \sin^2(t))^2 = 1 \end{aligned}$$

für jedes $t \in [0,\pi]$. Somit ist Γ nach der Bogenlänge parametrisiert.

zu (b): Wir berechnen zu $F(x) = (0, x_1, 0)^\top$ die Rotation $\mathrm{rot}F(x) = (0,0,1)^\top$. Damit und mit dem in positive x_3 Richtung gerichteten Normalenvektor $\nu = (0,0,1)^\top$ an der Fläche ergibt der Stokes'sche Satz

$$
\begin{aligned}
|A| = \int_A \mathrm{d}o &= \int_A \operatorname{rot}(F)(x)\cdot \nu \mathrm{d}o = \int_A \operatorname{rot}(F)(x)\cdot \mathrm{d}o \\
&= \int_\Gamma F(x)\cdot \mathrm{d}l = \int_0^\pi F(x(t))\cdot \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^\pi \sin^2(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Lösung zu 4: Es handelt sich um eine quasi-lineare partielle Differentialgleichung. Wir können das Charakteristiken-Verfahren nutzen. Ist mit $k_1(s), k_2(s), w(s)$ eine Charakteristik bezeichnet, so ergibt sich das charakteristische System

$$
\begin{aligned}
k_1'(s) &= k_1(s) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-k_2(s)} \\
k_2'(s) &= -1 \\
w'(s) &= (w(s))^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Mit Integration der zweiten Gleichung folgt $k_2(s) = -s + c_2$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert die inhomogene lineare DGL

$$k_1'(s) = k_1(s) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-c_2}\,.$$

Mit der Lösung $\tilde{k}(s) = \mathrm{e}^s$ der homogenen Gleichung und dem Ansatz $k_1(s) = c(s)\tilde{k}(s)$ ergibt sich

$$c'(s)\mathrm{e}^s + c(s)\mathrm{e}^s = c(s)\mathrm{e}^s + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-c_2}\,.$$

Es folgt $c(s) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-c_2}\,s + c_1$ und wir erhalten

$$k_1(s) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-c_2}\,s + c_1\right)\mathrm{e}^s\,.$$

Die dritte, separable DGL lösen wir mit

$$2\sqrt{w(s)} = \int \frac{w'(s)}{\sqrt{w(s)}}\,\mathrm{d}s = \int 1\,\mathrm{d}s = s + c_3$$

und bekommen

$$w(s) = \frac{1}{4}(s+c_3)^2\,.$$

Aus dem Schnitt mit der Anfangskurve folgt

$$t = k_1(0) = c_1\,,\quad 0 = k_2(0) = c_2 \quad \text{und} \quad t^2 = w(0) = \frac{1}{4}(s+c_3)^2\,.$$

Also ist $c_3 = 2t$, $x_2 = -s$ und $x_1 = \left(-\frac{x_2}{2}+t\right)\mathrm{e}^{-x_2}$ bzw.

$$t = x_1\mathrm{e}^{x_2} + \frac{x_2}{2}\,.$$

Insgesamt ergibt sich die Lösung

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4}(-x_2 + 2x_1\mathrm{e}^{x_2} + x_2)^2 = x_1^2\,\mathrm{e}^{2x_2}\,.$$

Lösung zu 5: Um die möglichen Ergebnisse zu überblicken, bietet sich eine Tabelle an, wobei wir mit den ersten drei Spalten beginnen:

Kombinat.	# Permutat.	Summe	$\lvert X(\omega)-E(X)\rvert$
(1,1)	1	2	3
(1,2)	2	3	2
(1,3)	2	4	1
(1,4)	2	5	0
(2,2)	1	4	1
(2,3)	2	5	0
(2,4)	2	6	1
(3,3)	1	6	1
(3,4)	2	7	2
(4,4)	1	8	3
	16		

Da jeder Wurf gleich wahrscheinlich ist, handelt es sich um ein Laplace Experiment (wenn wir die Würfe $(1,2)$ und $(2,1)$ unterscheiden). Damit ergibt sich

$$P(A) = \frac{7}{16}\,,\quad P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}\,.$$

Für die Schnittmenge folgt

$$P(A\cap B) = \frac{3}{16} \neq P(A)\,P(B)\,.$$

Insbesondere sind die Ereignisse stochastisch abhängig.

Bezeichnen wir mit $\overline{A}$ das Komplement des Ereignis A, dann gilt für die gesuchte, bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P(B|\overline{A}) = \frac{3}{16-7} = \frac{1}{3}\,.$$

Um die Varianz $E((X-E(X))^2)$ zu bestimmen, benötigen wir zunächst den Erwartungswert. Es gilt

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) \\
&\frac{1}{16}\left(2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 6 + 2\cdot 7 + 8\right) = \frac{80}{16} = 5\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergänzen wir die Liste oben und erhalten

$$Var(X) = \frac{1}{16}\left(2\cdot 3^2 + 4\cdot 2^2 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 0^2\right) = \frac{5}{2}\,.$$