

**Klausur zur Bachelorprüfung  
Höhere Mathematik III  
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt**

Karlsruhe, 11. September 2023

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{y(x)}{x^2} - 2\frac{(y(x))^3}{x^3} + \frac{2(y(x))^2}{x^2}y'(x) = 0, \quad x > 1,$$

mit  $y(1) = 2$ .

Hinweis: Versuchen Sie einen Euler Multiplikator zu finden, der nur von  $x$  oder nur von  $y$  abhängt.

**Aufgabe 2**

Welcher Punkt  $(x, y)^\top \in M$  in der Menge

$$M = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 2y = \frac{1}{2} \right\}$$

hat die kleinste  $x$ -Koordinate ?

**Aufgabe 3**

Gegeben ist das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = (x_1x_2x_3^2, x_1x_3^2 - x_1x_2^2x_3, x_1x_2x_3^2)^\top$$

und die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2, x_3 > 0, x_1^2 + x_3^2 < 2 - x_2\}.$$

Berechnen Sie über den Rand von  $M$  das Oberflächenintegral

$$\iint_{\partial M} F \cdot d\sigma.$$

Hinweis: Verwenden Sie einen passenden Integralsatz, und beschreiben Sie  $M$  in Zylinderkoordinaten.

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie die Lösung  $u : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  des Anfangswertproblems

$$(x_1 + x_2) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + (u(x))^3 = 0, \quad x_1, x_2 > 0$$

mit  $u(t^2, t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}$  für  $t > 0$ .

**Aufgabe 5**

(a) Bestimmen Sie  $a \in \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 4x^2 e^{ax}, & x > 0 \end{cases}$$

die Dichte einer Zufallsvariable  $X$  ist.

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von  $X$ .

(c) Sind die Ereignisse  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 1\}$  und  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 2\}$  stochastisch unabhängig?

**Lösung zu 1:** Wir setzen

$$q(x, y) = \frac{y}{x^2} - 2\frac{y^3}{x^3} \quad \text{und} \quad p(x, y) = \frac{2y^2}{x^2}.$$

Betrachten wir zunächst einen Multiplikator  $\lambda(x)$ : Dann lautet die Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{2y^2}{x^2} \right) &= \lambda'(x) \frac{2y^2}{x^2} - 4\lambda(x) \frac{y^2}{x^3} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(x) \left( \frac{y}{x^2} - 2\frac{y^3}{x^3} \right) \right) = \lambda(x) \left( \frac{1}{x^2} - 6\frac{y^2}{x^3} \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \left( \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{x} \right).$$

Da die rechte Seite von  $y$  abhängt, ergibt sich ein Widerspruch. Also liefert der Ansatz  $\lambda(x)$  keinen Euler Multiplikator zur DGL.

Wir versuchen einen Ansatz  $\lambda(y)$ : Aus den Integrabilitätsbedingungen folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(y) \frac{2y^2}{x^2} \right) &= -4\lambda(y) \frac{y^2}{x^3} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(y) \left( \frac{y}{x^2} - 2\frac{y^3}{x^3} \right) \right) = \lambda'(y) \left( \frac{y}{x^2} - 2\frac{y^3}{x^3} \right) + \lambda(y) \left( \frac{1}{x^2} - 6\frac{y^2}{x^3} \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = -\frac{1}{y}.$$

Wir haben somit einen Multiplikator gefunden und Integration der DGL für  $\lambda$  ergibt

$$\lambda(y) = \frac{1}{y}.$$

Mit dem Faktor ist

$$\left( \frac{1}{x^2} - 2\frac{(y(x))^2}{x^3} \right) + \frac{2y(x)}{x^2} y' = 0$$

eine exakte DGL und für das zugehörige Potential erhalten wir

$$F(x, y) = 2 \int \frac{y}{x^2} dy = \frac{y^2}{x^2} + c(x).$$

Aus

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -2\frac{y^2}{x^3} + c'(x) = \frac{1}{x^2} - 2\frac{(y(x))^2}{x^3}$$

ergibt sich  $c'(x) = \frac{1}{x^2}$  und somit etwa  $c(x) = -\frac{1}{x}$ . Die Lösung der DGL ist implizit gegeben durch

$$F(x, y(x)) = \frac{(y(x))^2}{x^2} - \frac{1}{x} = k$$

mit einer Integrationskonstanten  $k \in \mathbb{R}$ , bzw. explizit folgt

$$y(x) = \sqrt{kx^2 + x}$$

und mit der Anfangsbedingung  $y(1) = 2$  berechnen wir  $k = 3$ .

**Lösung zu 2:** Wir definieren die Funktion  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x$  und für die Nebenbedingungen

$$g(x, y) = (x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 2y - \frac{1}{2}$$

und wenden die Lagrange Multiplikatorenregel an, um kritische Punkte, in denen ein Minimum liegen könnte, zu finden.

Zunächst betrachten wir

$$0 = \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-2) + y \\ y + x - 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt  $y = 2 - x$  und dann mit der Ersten  $y = 0$ . Da der Punkt  $(2, 0)^\top \notin M$  ist, ist die Voraussetzung zur Multiplikatorenregel in jedem Punkt  $(x, y)^\top \in M$  erfüllt.

In einer Minimalstelle gilt somit  $\nabla L(x, y; \lambda) = 0$  für die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) = x + \lambda \left( (x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 2y - \frac{1}{2} \right).$$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + \lambda(2(x-2) + y) &= 0 \\ \lambda(y + x - 2) &= 0 \\ (x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 2y - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Da  $\lambda = 0$  auf einen Widerspruch in der ersten Gleichung führt, ist  $\lambda \neq 0$ . Die zweite Gleichung liefert somit  $y = 2 - x$ . Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt

$$\frac{3}{2}y^2 - y^2 = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad y^2 = 1.$$

Also sind mit  $(x, y) = (1, 1)$  und  $(x, y) = (3, -1)$  zwei kritische Stellen in  $M$  gefunden. Mit  $f(1, 1) = 1$  ist  $(1, 1)^\top \in M$  die Stelle mit kleinster  $x$ -Koordinate.

**Lösung zu 3:** Mit dem Gauß'schen Satz gilt

$$\iint_{\partial M} F \cdot d\mathbf{o} = \iiint_M \operatorname{div} F(x) dx.$$

Wir berechnen

$$\operatorname{div} F(x) = x_2 x_3^2 - 2x_1 x_2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3^2.$$

Die Menge  $M$  ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$M = \left\{ x = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ h \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} : 0 < h < 2, 0 < r < \sqrt{2} \text{ und } \varphi \in (0, \pi) \right\}$$

Eine Koordinatentransformation führt auf ein iteriertes Integral und wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M} F \cdot d\mathbf{o} &= \iiint_M \operatorname{div} F(x) dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-h}} \int_0^\pi h r^3 \sin^2 \varphi d\varphi dr dh \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-h}} h r^3 dr dh \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^2 h(2-h)^2 dh \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^2 4h - 4h^2 + h^3 dh = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

**Lösung zu 4:** Wir wenden das Charakteristiken-Verfahren an. Zunächst stellen wir mit der Parametrisierung  $x = (k_1(s), k_2(s))$  und  $u(k(s)) = w(s)$  das charakteristische System

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s) + k_2(s) \\ k_2'(s) &= k_2(s) \\ w'(s) &= -w^3(s) \end{aligned}$$

zusammen. Aus der zweiten, separablen Differentialgleichung erhalten wir die allgemeine Lösung

$$k_2(s) = c_2 e^s.$$

Somit ergibt sich für  $k_1$  die inhomogene lineare DGL  $k_1'(s) = k_1(s) + c_2 e^s$ . Die zugehörige homogene DGL haben wir bereits für  $k_2$  gelöst. Einsetzen des Ansatz  $k_1(s) = c(s)e^s$  (Variation der Konstanten) liefert  $c'(s) = c_2$  bzw.  $c(s) = c_2 s + c_1$  und wir erhalten

$$k_1(s) = (c_2 s + c_1) e^s.$$

Separation führt für die dritte DGL auf

$$-\frac{1}{2(w(s))^2} = \int \frac{w'(s)}{(w(s))^3} ds = - \int ds = -s + c_3.$$

bzw.  $w(s) = \frac{1}{\sqrt{2(s-c_3)}}$ .

Mit der Anfangskurve parametrisiert durch  $(t^2, t)^\top$  und den Bedingungen  $k_1(0) = c_1 = t^2$ ,  $k_2(0) = c_2 = t$  und

$$\frac{1}{\sqrt{2t}} = u(t^2, t) = w(0) = \frac{1}{\sqrt{-2c_3}}$$

folgt  $c_3 = -t$ . Insgesamt ergibt sich

$$x_2 = t e^s, \quad x_1 = (ts + t^2) e^s = (s+t)x_2,$$

und wir erhalten die Lösung des Anfangswertproblems aus

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2(s+t)}} = \sqrt{\frac{x_2}{2x_1}}.$$

**Lösung zu 5:** zu (a) Damit  $f$  Dichte einer Zufallsvariablen ist, muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

gelten.

Wir bestimmen durch zweimaliges partielles Integrieren zunächst für  $a \neq 0$  die Verteilungsfunktion für  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = 4 \int_0^x t^2 e^{at} dt = \frac{4}{a} t^2 e^{at} \Big|_0^x - \frac{8}{a} \int_0^x t e^{at} dt \\ &= \frac{4}{a} x^2 e^{ax} \Big|_0^x - \frac{8}{a} \left[ \frac{1}{a} t e^{at} \Big|_0^x - \frac{1}{a} \int_0^x e^{at} dt \right] \\ &= \frac{4}{a} x^2 e^{ax} - \frac{8}{a^2} x e^{ax} + \frac{8}{a^3} e^{ax} - \frac{8}{a^3}. \end{aligned}$$

Für  $x \leq 0$  gilt  $F(x) = 0$ . Wegen der Bedingung ist offensichtlich  $a < 0$  und mit

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = -\frac{8}{a^3}$$

errechnen wir  $a = -2$ .

zu (b) Mit  $a = -2$  ergibt sich der Erwartungswert einer mit Dichte  $f$  stetig verteilten Zufallsvariable  $X$  zu

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 4 \int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx \\ &= 4 \left[ -\frac{1}{2} x^3 e^{-2x} \Big|_0^{\infty} + \frac{3}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx}_{=\frac{3}{4}} \right] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

mit der Rechnung aus Teil (a).

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 4 \int_0^{\infty} x^4 e^{-2x} dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 4 \left[ -\frac{1}{2} x^4 e^{-2x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \cdot 4 \int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx \right] - \frac{9}{4} \\ &= 4 \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

zu (c) Mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - (2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}$$

gilt

$$P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x) dx = 1 - F(1) = 5e^{-2}, \quad P(X \leq 2) = F(2) = 1 - 13e^{-4}$$

und

$$P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = 5e^{-2} - 13e^{-4} \neq P(X > 1)P(X \leq 2).$$

Somit sind die beiden Ereignisse stochastisch abhängig.