Karlsruher Institut für Technologie

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik II
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

Karlsruhe, 16. September 2024

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \sin(xy) + \int_0^{\ln(x)} x\cos(ty)\,\mathrm{d}t\,.$$

(a) Zeigen Sie:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) + \cos(y\ln(x)) + \int\limits_0^{\ln(x)} \cos(ty)\,\mathrm{d}t \\ x\cos(xy) - \int\limits_0^{\ln(x)} xt\sin(ty)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

(b) Begründen Sie, dass die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ in einer Umgebung des Punkts $(x_0, y_0)^\top = (1,0)^\top$ der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist. Bestimmen Sie weiterhin das Taylorpolynom ersten Grades zu der Funktion $y(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$2x^2(y(x))^2 + (x^3y(x) + x\,y(x))\,y'(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mit $y(0) = 2$. Hinweis: Es gibt einen Euler'schen Multiplikator von der Form $\lambda(xy)$.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Fläche

$$S = \left\{ X(r,\varphi) = r\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \varphi \end{pmatrix} : r \in [0,1], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und das Vektorfeld $n(r,\varphi) = X_r(r,\varphi) \times X_\varphi(r,\varphi)$. Bestätigen Sie die Identität

$$\int_S \frac{n_3}{\|n\|}\,\mathrm{d}o = \frac{\pi}{4}\,,$$

(a) in dem Sie das Flächenintegral direkt berechnen.

(b) unter Verwendung des Stoke'schen Satzes für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x) = (x_2, 0, x_3)^\top$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\sqrt{x_1}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \frac{x_2^2}{2u(x)}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{1+\sqrt{x_1}}\,u(x) \quad \text{auf } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$$

mit der Bedingung $u(0,t) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ a\,x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass f die Dichte einer Verteilungsfunktion F zu einer Zufallsvariablen X ist, und geben Sie die Funktion F an.

(b) Mit a, F, X wie in (a) ist eine weitere Zufallsvariable Y gegeben durch

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1\,, & X(\omega) \leq 1\,, \\ 2\,, & X(\omega) > 1\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion G zu Y und den Erwartungswert $E[Y]$.

(c) Berechnen Sie für $s \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq s \,|\, Y = 2)$, und zeigen Sie, dass die Ereignisse $\{X \leq \frac{1}{2}\}$ und $\{Y = 2\}$ stochastisch abhängig sind.

Lösung zu 1: zu (a) Aus

$$f(x,y) = \sin(xy) + x\int_0^{\ln(x)} \cos(ty)\,\mathrm{d}t$$

erhalten wir mit Produkt- und Kettenregel, sowie dem zweiten Hauptsatz der Integralrechnung die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\cos(xy) + \int_0^{\ln(x)} \cos(ty)\,\mathrm{d}t + x\frac{1}{x}\cos(y\ln(x))\,.$$

Da der Integrand stetig differenzierbar ist, lassen sich Differentiation nach y und Integration vertauschen und es ergibt sich für die zweite partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\cos(xy) - \int_0^{\ln(x)} xt\sin(ty)\,\mathrm{d}t\,.$$

Somit gilt die angegebene Darstellung für den Gradienten zu f.

zu (b) An der Stelle $(x_0,y_0)^\top = (1,0)^\top$ gilt $f(1,0)=0$ und weiter ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 - \int_0^0 t\sin(0)\,\mathrm{d}t = 1 \neq 0\,.$$

Deswegen liefert der Satz über implizit gegebene Funktionen, dass es eine differenzierbare Funktion $y(x)$ in einer Umgebung U um $x_0 = 1$ gibt mit $f(x,y(x)) = 0$ für $x \in U$.

Implizit erhalten wir an dieser Stelle die Ableitung der Funktion; denn aus $f(x,y(x)) = 0$ folgt mit der Kettenregel

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x,y(x))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + y'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\,.$$

Also gilt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + y'(x_0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 + y'(x_0)$$

bzw. $y'(1) = -1$. Insgesamt ergibt sich das Taylorpolynom erster Ordnung

$$y(x) \approx T_1(x) = y_0 + y'(x_0)(x-1) = 1 - x\,.$$

Lösung zu 2: Wir setzen

$$q(x,y) = x^3y + xy \quad \text{und} \quad p(x,y) = 2x^2y^2\,.$$

Betrachten wir einen Multiplikator $\lambda(xy)$: Dann lautet die Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(xy)p(x,y)\right) &= 4\lambda(xy)x^2y + 2\lambda'(xy)x^3y^2\\ &= \frac{\partial}{\partial x}q(x,y) = \lambda(xy)\left(3x^2y + y\right)) + \lambda'(xy)\left(x^3y^2 + xy^2\right)\end{aligned}$$

bzw.

$$\lambda'(xy)xy\left(x^2-1\right)y = \lambda(xy)\left(1-x^2\right)y\,.$$

Somit ergibt sich für λ die separable Differentialgleichung

$$-t\lambda'(t) = \lambda(t)\,.$$

Wir erhalten aus

$$\ln(|\lambda(t)| = \int \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\ln|t|$$

den Multiplikator $\lambda(t) = \frac{1}{t}$.

Damit ergibt sich die exakte Differentialgleichung

$$2xy(x) + (x^2+1)y'(x) = 0\,.$$

Wir bestimmen ein Potential aus

$$F(x,y) = 2\int xy\,dx = x^2y + c(y)\,.$$

Und mit

$$(x^2+1) = \frac{F(x,y)}{\partial y} = x^2 + c'(y)$$

folgt $c'(y) = 1$ bzw. $c(y) = y$.

Also sind Lösungen der Differentialgleichung implizit gegeben durch

$$k = F(x,y(x)) = (x^2+1)y(x)\,.$$

Mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ ist $k = 2$ und wir erhalten die Lösung

$$y(x) = \frac{2}{1+x^2}\,.$$

Lösung zu 3: zu (a): Mit den Ableitungen

$$X_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \varphi\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_\varphi(r,\varphi) = r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 1\end{pmatrix}$$

berechnen wir den Normalenvektor

$$X_r(r,\varphi)\times X_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi\\ -\varphi\sin\varphi - r\cos\varphi\\ r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\end{pmatrix}\,.$$

Also erhalten wir für das Flächenintegral

$$\int_S \frac{n_3}{\|n\|}\,\mathrm{d}o = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\,(\tfrac{1}{2}r^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

zu (b): Zunächst berechnen wir

$$\mathrm{rot}F(x) = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\,.$$

Also ist nach dem Stoke'schen Satz

$$\int_S \frac{n_3}{\|n\|}\,\mathrm{d}o = -\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{rot}(F(X)\cdot(X_r\times X_\varphi)\,\mathrm{d}(r,\varphi) = -\int_S \mathrm{rot}(F)\cdot\mathrm{d}o = -\int_\Gamma F\cdot\mathrm{d}l\,,$$

wobei wir mit Γ die Randkurve von S mit passender Orientierung bezeichnen.

Betrachten wir $\varphi=0$, $r=1$ oder $\varphi=\frac{\pi}{2}$ so wird ersichtlich, dass die Randkurve zu S sich aus drei Stücken zusammen setzt, die wir durch

$$\gamma_1(r) = \begin{pmatrix} r\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad r\in[0,1]$$

$$\gamma_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \varphi\end{pmatrix}, \quad \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_3(r) = \begin{pmatrix} 0\\ r\\ \frac{\pi}{2}r\end{pmatrix}, \quad r\in[0,1]$$

parametrisieren können. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die angegebene dritte Parametrisierung, γ_3, für den Stoke'schen Satz die falsche Orientierung hat. Mit dieser Beobachtung und den Tangentialvektoren γ_j' ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F\cdot\mathrm{d}l &= \int_{\gamma_1} F\cdot\mathrm{d}l + \int_{\gamma_2} F\cdot\mathrm{d}l - \int_{\gamma_3} F\cdot\mathrm{d}l\\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} x_2(r,0)\\ 0\\ x_3(r,0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x_2(1,\varphi)\\ 0\\ x_3(1,\varphi)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi\\
&\quad - \int_0^1 \begin{pmatrix} x_2(r,\frac{\pi}{2})\\ 0\\ x_3(r,\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\mathrm{d}r\\
&= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin^2\varphi+\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \int_0^1\frac{\pi^2}{4}r\,\mathrm{d}r\\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi^2}{4}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir wiederum den gesuchte Wert des Flächenintegrals.

Lösung zu 4: Wir lösen das Anfangswertproblem mit dem Charakteristiken-Verfahren. Dazu setzen wir $w(s)=u(k(s))$ und stellen zunächst das charakteristische System auf:

$$\begin{aligned}
k_1'(s) &= \sqrt{k_1(s)}\\
k_2'(s) &= \frac{(k_2(s))^2}{2w(s)}\\
w'(s) &= \frac{1}{1+\sqrt{k_1(s)}}w(s)\,.
\end{aligned}$$

Aus der ersten, separablen Differentialgleichung folgt mit

$$\int \frac{k_1'(s)}{\sqrt{k_1(s)}}\,\mathrm{d}s = \int 1\mathrm{d}s$$

durch Integration $2(k_1(s))^{\frac{1}{2}} = s+c_1$ bzw. $k_1(s)=\frac{1}{4}(s+c_1)^2$. Damit ergibt sich aus der dritten DGL

$$\frac{w'(s)}{w(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(s+c_1)}$$

durch Integration $\ln(|w(s)|) = 2\ln(1+\frac{1}{2}(s+c_1))+\tilde{c_3}$ und wir erhalten $w(s)=c_3(1+\frac{1}{2}(s+c_1))^2$.

Aus der zweiten DGL folgt

$$\int\frac{k_2'(s)}{(k_2(s))^2}\,\mathrm{d}s = \int\frac{1}{2w(s)}\,\mathrm{d}s = \int\frac{1}{2c_3(1+\frac{1}{2}(s+c_1))^2}\,\mathrm{d}s$$

und somit

$$-\frac{1}{k_2(s)} = -\frac{1}{c_3(1+\frac{1}{2}(s+c_1))} + c_2$$

bzw.

$$k_2(s) = \left(\frac{1}{c_3(1+\frac{1}{2}(s+c_1))} - c_2\right)^{-1}.$$

Betrachten wir weiterhin $u(0,t)=t$ und wählen den Schnitt mit der Anfangskurve bei $s=0$, so ergeben sich die Konstanten zu $0=k_1(0)=\frac{1}{4}c_1^2$, also $c_1=0$, $t=w(0)=c_3$ und $t=k_2(0)=(\frac{1}{t}-c_2)^{-1}$, d.h. $c_2=0$.

Insgesamt erhalten wir $x_1=\frac{1}{4}s^2$, $x_2=t(1+\frac{1}{2}s)$ und die Lösung

$$u(x) = u(x(t,s)) = t\left(1+\frac{1}{2}s\right)^2 = x_2(1+\sqrt{x_1})\,.$$

Lösung zu 5: zu (a) Wegen $f(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$, gilt $a\geq 0$. Wir definieren die stetige Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0\,, & x<0\\ \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, & x\geq 0\,.\end{cases}$$

Wir berechnen zu $x\geq 0$

$$F(x) = a\int\limits_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = a\left(-t^2\mathrm{e}^{-t}-2t\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-t}\right)\Big|_0^x = 2a\left(1-(\frac{1}{2}x^2+x+1)\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Mit der Bedingung $1=\lim_{x\to\infty}F(x)=2a$ für die Dichte f folgt $a=\frac{1}{2}$.

zu (b): Für die Verteilung zu Y ergibt sich

$$G(s) = P(Y\leq s) = \left\{\begin{array}{cc} 0\,, & s<1\\ P(X\leq 1)\,, & 1\leq s<2\\ 1\,, & s\geq 2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0\,, & s<1\\ F(1)\,, & 1\leq s<2\\ 1\,, & s\geq 2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0\,, & s<1\\ 1-\frac{5}{2\mathrm{e}}\,, & 1\leq s<2\\ 1\,, & s\geq 2\,.\end{array}\right.$$

Es gilt

$$P(Y=2) = 1 - P(Y=1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = \frac{5}{2\mathrm{e}}\,.$$

Somit erhalten wir für den Erwartungswert dieser diskreten Verteilung

$$E(Y) = 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) = (1 - \frac{5}{2\mathrm{e}}) + 2(\frac{5}{2\mathrm{e}}) = 1 + \frac{5}{2\mathrm{e}}\,.$$

zu (c) Für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X \leq s \,|\, Y=2) = \frac{P(X \leq s \text{ und } Y=2)}{P(Y=2)}$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} P(X \leq s \text{ und } Y=2) &= \left\{ \begin{array}{cc} 0\,, & s \leq 1 \\ P(1 < X \leq s)\,, & s > 1 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0\,, & s \leq 1 \\ F(s) - F(1)\,, & s > 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0\,, & s \leq 1 \\ \frac{5}{2\mathrm{e}} - (\frac{1}{2}s^2 + s + 1)\mathrm{e}^{-s}\,, & s > 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Ereignisse stochastisch abhängig; denn es ist $0 = P(X \leq \frac{1}{2} \,|\, Y=2) \neq P(X \leq \frac{1}{2})$ wegen

$$P(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t > 0\,.$$