Höhere Mathematik III

Klausur vom 29. Februar 2020

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die explizite Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x\,y(x)}}{x\,y(x)} + \frac{1}{y(x)} y'(x) = 0, \quad x > 0,$$

welche die Anfangsbedingung $y(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ erfüllt.

Hinweis: Es existiert ein Eulerscher Multiplikator der Form $\Lambda(x, y) = \ell(xy)$.

Lösung:

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung setzen wir

$$P(x, y) = \ell(xy)\Big(\frac{1}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{xy}\Big)$$

und

$$Q(x, y) = \frac{1}{y}\ell(xy).$$

Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

erfüllt sein. Wir berechnen

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \ell'(xy)\Big(1 - \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y}\Big) + \ell(xy)\mathrm{e}^{-xy}\Big(\frac{1}{y} + \frac{1}{xy^2}\Big)$$

und

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \ell'(xy).$$

Wir multiplizieren die Gleichung $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ mit $y\mathrm{e}^{xy}$ und setzen $t := xy$. Dies führt zu

$$-\ell'(t) + \ell(t)\Big(1 + \frac{1}{t}\Big) = 0.$$

Diese separable Differentialgleichung schreiben wir in der Form

$$\frac{\ell'(t)}{\ell(t)} = 1 + \frac{1}{t}$$

und erhalten $\ln(\ell(t)) = t + \ln(t)$, bzw. $\ell(t) = t\mathrm{e}^t$. Damit haben wir den Eulerschen Multiplikator

$$\Lambda(x, y) = \ell(xy) = xy\mathrm{e}^{xy}$$

bestimmt. Wir können nun das Potential f der exakten Differentialgleichung bestimmen. Es ist

$$f(x,y) = \int Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{xy} + c(x).$$

Weiter muss

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy} + c'(x) \stackrel{!}{=} P(x,y) = y\mathrm{e}^{xy} - 1$$

gelten, also ist $c'(x) = -1$, bzw. $c(x) = -x$. Damit ist das Potential durch

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - x$$

gegeben. Für die Lösung y der Differentialgleichung gilt $f(x, y(x)) = c$ mit Konstante $c \in \mathbb{R}$. Also

$$\mathrm{e}^{xy(x)} - x = c \Rightarrow y(x) = \frac{\ln(x+c)}{x}.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ folgt $c = 0$ und wir erhalten die explizite Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit dem Charakteristikenverfahren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - x_2^2\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - u(x) &= 0, && x_1 > 0,\ x_2 < 0, \\ u(\sqrt{t}, -t^{-1}) &= \cos(t), && t > 0. \end{aligned}$$

Lösung: Wir setzen $x_1 = k_1(s)$, $x_2 = k_2(s)$ und $u(k_1(s), k_2(s)) = w(s)$. Die charakteristischen Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= \frac{1}{2k_1(s)} \\ k_2'(s) &= -k_2(s)^2 \\ w'(s) &= w(s). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Gleichung für k_1. Es ist

$$k_1'(s) = \frac{1}{2k_1(s)} \Rightarrow 2k_1'(s)k_1(s) = 1$$

Integration auf beiden Seiten führt zu $k_1(s)^2 = s + c_1$, also $k_1(s) = \sqrt{s + c_1}$. Analog erhalten wir für k_2

$$k_2'(s) = -k_2(s)^2 \Rightarrow -\frac{k_2'(s)}{k_2(s)^2} = 1$$

Integration auf beiden Seiten führt zu $\frac{1}{k_2(s)} = s + c_2$, also $k_2(s) = \frac{1}{s+c_2}$. Für w erhalten wir $w(s) = c_3\mathrm{e}^s$ als Lösung. Wir bestimmen die Konstanten so, dass für $s = 0$ die Anfangswerte erfüllt werden, d.h.

$$\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c_1} \\ \frac{1}{c_2} \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ -\frac{1}{t} \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich $c_1 = t$, $c_2 = -t$ und $c_3 = \cos(t)$. Es folgt

$$x_1 = k_1(s,t) = \sqrt{s+t}, \quad x_2 = k_2(s,t) = \frac{1}{s-t}.$$

Also erhalten wir $s + t = x_1^2$ und $s - t = \frac{1}{x_2}$ und damit

$$s = \frac{1}{2}\Big(x_1^2 + \frac{1}{x_2}\Big), \quad t = \frac{1}{2}\Big(x_1^2 - \frac{1}{x_2}\Big).$$

Dies setzen wir in $w(s,t) = \cos(t)\mathrm{e}^s$ ein und erhalten die Lösung

$$u(x_1,x_2) = \cos\left(\frac{1}{2}\Big(x_1^2 - \frac{1}{x_2}\Big)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\Big(x_1^2 + \frac{1}{x_2}\Big)\right).$$

Aufgabe 3

Der Rand des Zylinders

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2,\ -1 \leqslant x_3 \leqslant 1\}$$

besteht aus dem Boden B, dem Deckel D und der Mantelfläche M. Ferner sei das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_1x_3 \\ x_2(1-x_3) \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es bezeichne ν den äußeren Normaleneinheitsvektor. Berechnen Sie

$$\int_M F(x)\cdot\nu(x)\mathrm{d}o.$$

Lösung:

Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung lässt sich der Satz von Gauß wie folgt schreiben:

$$\int_Z \operatorname{div} F(x)\mathrm{d}x = \int_M F(x)\cdot\mathrm{d}o + \int_B F(x)\cdot\mathrm{d}o + \int_D F(x)\cdot\mathrm{d}o.$$

Wir berechnen

$$\operatorname{div} F(x) = -x_3 + (1-x_3) + 2x_3 = 1.$$

Damit können wir das Volumenintegral über Z in Zylinderkoordinaten wie folgt berechnen:

$$\int_Z \operatorname{div} F(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{2}} 1\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = 4\pi\Big[\frac{1}{2}r^2\Big]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi.$$

Parametrisierungen Φ_B des Bodens und Φ_D des Deckels sind durch

$$\Phi_B(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_D(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in (0,\sqrt{2}),\ \varphi \in (0,2\pi)$$

gegeben. Wir berechnen die Kreuzprodukte der partiellen Ableitungen und erhalten

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_B}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi_D}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_D}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Da die Normalenrichtung auch am Boden aus dem Zylinder heraus zeigen muss, ist der erste Vektor in entgegengesetzte Richtung zu orientieren. Damit berechnen wir

$$\int_D F(x) \cdot \nu(x) \mathrm{d}o = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} F(\Phi_D(r, \varphi)) \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 2\pi.$$

Analog ergibt sich

$$\int_B F(x) \cdot \nu(x) \mathrm{d}o = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} F(\Phi_B(r, \varphi)) \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} -r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = -2\pi.$$

Wir erhalten schließlich

$$\int_M F(x) \cdot \nu(x) \mathrm{d}o = 4\pi + 2\pi - 2\pi = 4\pi.$$

Alternativ lässt sich das Integral auch direkt bestimmen. Wir parametrisieren M durch Φ_M mittels

$$\Phi_M(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi),\ z \in (-1, 1)$$

mit

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_M F(x) \cdot \nu(x) \mathrm{d}o &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} z \cos \varphi \\ \sqrt{2}(1-z) \sin \varphi \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} -2 \cos^2 \varphi z + 2 \sin^2 \varphi (1-z) \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} -2 + 2 \sin^2 \varphi \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi \\
&= \underbrace{-4\pi \int_{-1}^{1} z \mathrm{d}z}_{=0} + 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= 2 \big[(\varphi - \sin(\varphi) \cos(\varphi) \big]_0^{2\pi} = 4\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es sei die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\}$ gegeben.

(a) Begründen Sie, warum es in der Menge M Punkte gibt, deren Abstand zum Ursprung minimal, bzw. maximal ist.

(b) Bestimmen Sie mit der Lagrangeschen Multiplikatorenregel die Punkte aus Teil (a).

Lösung: (a) Die Funktion $h(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1$ ist ein Polynom also stetig. Die Menge M ist gegeben durch

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\},$$

also ist M abgeschlossen. Gilt nun

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$$

so kann sowohl $(x_1 - 1)^2$ als auch $(x_2 - 1)^2$ höchstens 1 sein. Also gilt in jedem Fall $x_1 \in [1, 3]$ und $x_2 \in [0, 2]$. Damit ist M beschränkt und folglich kompakt. Punkte mit minimalem, bzw. maximalem Abstand sind Minimal- bzw. Maximalstellen der Funktion $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Da f stetig ist und M kompakt, nimmt f auf M Minima und Maxima an, d.h. es gibt Punkte $x \in M$ mit minimalem, bzw. maximalem Abstand.

(b) Punkte mit größtem, bzw. kleinsten Abstand sind Extremstellen des Optimierungsproblems, unter der Nebenbedingung $h(x) = 0$ mit

$$h(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1$$

die Funktion f zu maximieren, bzw. minimieren, wobei

$$f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Wir stellen die Lagrangesche Funktion auf:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\big((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1\big).$$

Der Gradient von L ist durch

$$\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2\lambda(x_1 - 2) \\ 2x_2 + 2\lambda(x_2 - 1) \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir erhalten Kandidaten für die Extremstellen durch Lösungen von $\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = 0$. Wir betrachten

$$0 = x_2 \nabla L(x_1, x_2, \lambda)_1 - x_1 \nabla L(x_1, x_2, \lambda)_2 = -4\lambda x_2 + 2\lambda x_1$$

Also ist entweder $\lambda = 0$ oder $x_1 = 2x_2$. Der Fall $\lambda = 0$ führt, wenn man sich die ersten beiden Gleichungen von $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$ anschaut zu $x_1 = x_2 = 0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der dritten Gleichungen, die dann $1 + 1 - 1 = 0$ lauten würde. Also gilt $x_1 = 2x_2$. Dies setzen wir in

$$0 = \nabla L(x_1, x_2, \lambda)_3 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1$$

ein und erhalten

$$5x_2^2 - 10x_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = \frac{1}{5}.$$

Wir erhalten also die zwei Kandidaten

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Es ist $\|\hat{x}\| \geqslant \|\tilde{x}\|$, sowohl die x_1 als auch die x_2 Komponente von $\hat{x}$ betragsmäßig größer ist als die von $\tilde{x}$. Also ist $\hat{x}$ der Punkt mit dem größten und $\tilde{x}$ der Punkt mit dem kleinsten Abstand zum Ursprung.

Aufgabe 5

Person A und B gehen regelmäßig italienisch essen. In ihrer Lieblingspizzeria gibt es drei Gerichte: Pizza, Nudeln und Salat. Jeder bestellt jeweils nur ein Gericht. Der Kellner hat folgende Beobachtungen bezüglich des Bestellverhaltens von A und B gemacht:

- B bestellt doppelt so oft als erstes wie A und wählt dann in drei von vier Fällen Salat, ansonsten immer Nudeln.
- Wenn B Nudeln bestellt hat, dann wählt A immer Pizza.
- Wenn A als erstes bestellt, dann wählt A genau so oft Pizza wie Nudeln, aber nie Salat.
- Wenn A Pizza bestellt hat, dann wählt B zu gleichen Anteilen eines der drei Gerichte.
- Falls A Nudeln bestellt hat, dann wählt B genau so, als würde B zuerst bestellen.
- Wenn B Salat bestellt hat, dann entscheidet sich A genau so oft für Salat wie für Nudeln, jedoch nie für Pizza.

(a) Wie groß ist bei einem Besuch die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) B Nudeln isst?

(ii) Pizza bestellt wird?

(iii) A zuerst bestellt hat, wenn B Nudeln isst?

(b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der bestellten Salate bei einem Besuch. Ist der Erwartungswert von X größer als Eins?

Lösung: Mit den Informationen aus der Aufgabenstellung ergibt sich das folgende Baumdiagramm.

(a) Daraus lesen wir die gesuchten Wahrscheinlichkeiten ab:

(i) $P(\text{B isst Nudeln}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{72}$.

(ii) $P(\text{A oder B bestellen Pizza}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

(iii) $A1$ bezeichne das Ereignis, dass A zuerst bestellt. BN bezeichne das Ereignis, dass B Nudeln isst. Dann ist nach $P(A1|BN)$ gefragt. Nach Definition und mit Aufgabenteil (i) ist

$$P(A1|BN) = \frac{P(A1 \cap BN)}{P(BN)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)}{\frac{19}{72}} = \frac{7}{19}.$$

(b) Die einzigen Werte für X mit positiver Wahrscheinlichkeit sind $0, 1$ und 2. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{23}{72}\\
P(X=1) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{31}{72}\\
P(X=2) &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{18}{72}
\end{aligned}$$

mit $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$. Damit lautet der Erwarungswert

$$E(X)=\sum_{i=0}^{2} i\cdot P(X=i)=\frac{1}{72}\Big(0\cdot 23+1\cdot 31+2\cdot 18\Big)=\frac{67}{72}$$

und es ist $E(X)<1$.