Karlsruher Institut für Technologie

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik III
Fachrichtungen: biw/ciw/mach/mit/mwt/vt

Klausur vom 27. März 2021

Aufgabe 1 Auf $D = \{x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 > 0\}$ sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_3} \arctan(tx_2)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in D,$$

gegeben. Bestimmen Sie den Gradienten von f und berechnen Sie damit die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(s) = \int_0^{2/s^2} \arctan(ts)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x + x^4 + 2x^2(u(x))^2 + (u(x))^4 = -u(x)u'(x)$$

in impliziter Form. Welche Lösung verläuft durch den Punkt $(1, 1)^\top$?

Hinweis: Es existiert ein integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator), der nur von $x^2 + u^2$ abhängt.

Aufgabe 3 Gegeben seien das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (0,\ x(z-1),\ z-1)^\top$, sowie die Halbkugel

$$H = \left\{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \le 1,\ 1 \le z\right\}.$$

Parametrisieren Sie die beiden glatten Teilflächen, die H beranden. Berechnen Sie den Fluss

$$\iint_{\partial H} F \cdot \nu\,\mathrm{do}$$

von F durch die Oberfläche von H ohne Verwendung des Satzes von Gauß. Mit ν bezeichnen wir die nach außen gerichtete Normale.

Aufgabe 4 Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} 3u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + u^2(x) &= 0, && x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x_2) &= 1, && x_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens.

Aufgabe 5 Wir betrachten eine Urne mit zwei roten, vier blauen und fünf gelben Kugeln, aus der nacheinander ohne Zurücklegen drei Kugeln gezogen werden.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der drei Kugeln gelb ist.

(b) Bestimmen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafr, dass mindestens eine der Kugeln rot ist, wenn mindestens eine gelbe im Ergebnis auftritt.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl verschiedener Farben, die im Ergebnis vorkommen.

Lösung zu 1: Es gilt $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x), \frac{\partial}{\partial x_3} f(x)\right)^\top$ mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) &= -\arctan(x_1 x_2),\\
\frac{\partial}{\partial x_2} f(x) &= \int_{x_1}^{x_3} \frac{t}{1+t^2 x_2^2}\,\mathrm{d}t\\
\frac{\partial}{\partial x_3} f(x) &= \arctan(x_3 x_2).
\end{aligned}$$

für x in D. Wir definieren $b(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$b(s) = \left(0, s, \frac{2}{s^2}\right)^\top.$$

Dann ist $g(s) = f(b(s))$. Mit der Kettenregel folgt

$$g'(s) = f'(b(s))b'(s) = f'\left(0, s, \frac{2}{s^2}\right) b'(s) = \nabla f\left(0, s, \frac{2}{s^2}\right) \cdot b'(s).$$

Für b' bekommen wir

$$b'(s) = \left(0, 1, -\frac{4}{s^3}\right)^\top.$$

Also erhalten wir

$$g'(s) = \int_0^{2/s^2} \frac{t}{1+t^2 s^2}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{s^3}\arctan\left(\frac{2}{s}\right)$$

Die Substitution $u = 1 + t^2 s^2$ mit $\mathrm{d}t = \frac{1}{2s^2 t}\mathrm{d}u$ liefert

$$\int_0^{2/s^2} \frac{t}{1+t^2 s^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2s^2}\int_1^{1+4/s^2} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2s^2}\left[\ln(u)\right]_1^{1+4/s^2} = \frac{1}{2s^2}\ln(1+\frac{4}{s^2}).$$

Insgesamt bekommen wir

$$g'(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+\frac{4}{s^2}) - \frac{4}{s}\arctan\left(\frac{2}{s}\right)\right).$$

Lösung zu 2: Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $l(x^2+u^2)$ und untersuchen für die neue Gleichung

$$l(x^2+u^2)(x + x^4 + 2x^2u^2 + u^4) + l(x^2+u^2)uu' = 0$$

die Integrabilitätsbedingung. Wir definieren

$$p(x,u) = l(x^2+u^2)(x + x^4 + 2x^2u^2 + u^4) \qquad \text{und} \qquad q(x,u) = l(x^2+u^2)u.$$

Falls l integrierender Faktor ist, muss diese Differentialgleichung exakt sein, d.h. die Ausdrücke

$$\frac{\partial p(x,u)}{\partial u} = l'(x^2+u^2)\,2u\,(x + x^4 + 2x^2u^2 + u^4) + l(x^2+u^2)\,(4x^2u + 4u^3)$$

und

$$\frac{\partial q(x,u)}{\partial x} = l'(x^2+u^2)\,2xu$$

müssen identisch sein.

Folglich muss l die Gleichung

$$l'(x^2+u^2)(2x^4u + 4x^2u^3 + 2u^5) = -l(x^2+u^2)(4x^2u + 4u^3).$$

erfüllen. Wir dividieren durch $2u \neq 0$ (beachte, dass $u = 0$ keine Lösung der Differentialgleichung sein kann) und erhalten

$$(x^2+u^2)^2 l'(x^2+u^2) = -2(x^2+u^2)l(x^2+u^2).$$

Setzen wir $t = x^2 + u^2$, so erhalten die separable Differentialgleichung $tl'(t) = -2l(t)$. Durch Separation $l'(t)/l(t) = -2/t$ ergibt sich die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zu $l(t) = \frac{c}{t^2}$.

Da wir nur einen integrierenden Faktor benötigen, können wir die Integrationskonstante an dieser Stelle beliebig wählen. Wir setzen $c = 1$ und bekommen den integrierende Faktor

$$l(x^2+u^2) = \frac{1}{(x^2+u^2)^2}.$$

Damit ist die modifizierte Differentialgleichung

$$\frac{x}{(x^2+(u(x))^2)^2} + 1 + \frac{u(x)}{(x^2+(u(x))^2)^2}u'(x) = 0$$

exakt.

Das Potential f erhält man nun aus den beiden Bedingungen

$$\frac{x}{(x^2+u^2)^2} + 1 = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}$$

und

$$\frac{u}{(x^2+u^2)^2} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}.$$

Integration der ersten Bedingung nach x liefert

$$f(x,u) = \int\left(\frac{x}{(x^2+u^2)^2} + 1\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+u^2} + x + c(u).$$

Berechnen wir davon die partielle Ableitung nach u, so folgt

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = \frac{u}{(x^2+u^2)^2} + c'(u).$$

Gleichsetzen dieses Ausdrucks mit der zweiten Bedingung führt auf

$$\frac{u}{(x^2+u^2)^2} + c'(u) \overset{!}{=} \frac{u}{(x^2+u^2)^2},$$

d.h. $c'(u) = 0$ und somit ist $c(u)$ konstant. Die allgemeine Lösung der DGL ergibt sich mit dem Potential implizit als Lösung der Gleichung

$$f(x, u(x)) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + (u(x))^2} + x = C\,.$$

Setzen wir den Anfangswert $u(1) = 1$ ein, so ist $C = f(1, u(1)) = f(1, 1) = \frac{3}{4}$. Die spezielle Lösung ist implizit also durch

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + (u(x))^2} + x = \frac{3}{4}$$

gegeben.

Lösung zu 3: Wir parametrisieren die Bodenfläche B durch

$$X : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ X(r, \varphi) = (r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi) + 2,\ 1)^\top$$

und berechnen

$$-(X_r \times X_\varphi)(r, \varphi) = -\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt offensichtlich nach außen.

Den oberen Teil D der Halbkugeloberfläche parametrisieren wir durch

$$Y : [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3,\ Y(\varphi, \vartheta) = (\cos(\varphi)\sin(\vartheta),\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) + 2,\ \cos(\vartheta) + 1)^\top.$$

Wir berechnen wieder

$$(Y_\vartheta \times Y_\varphi)(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} = \sin(\vartheta)\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

und erkennen, dass dieser Vektor ebenfalls nach außen zeigt.

Damit berechnen wir den Fluss durch die Bodenfläche B als

$$\iint\limits_B F \cdot \nu \,\mathrm{d}o = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 0.$$

Für den Fluss durch die Fläche D nach außen erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint\limits_D F \cdot \nu \,\mathrm{d}o &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin^2(\vartheta) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \big(\cos(\varphi)\sin(\varphi)\sin^3(\vartheta)\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\big)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{2}\right]_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + 2\pi\left[-\frac{\cos^3(\vartheta)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

d.h. insgesamt gilt $\iint\limits_{\partial H} F \cdot \nu \,\mathrm{d}o = \frac{2\pi}{3}$.

Lösung zu 4: Wir setzen $x_1 = k_1(s), x_2 = k_2(s)$ und $w(s) = u(k_1(s), k_2(s))$ und erhalten das charakteristische System

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= 3w(s), \\ k_2'(s) &= -k_2(s), \\ w'(s) &= -w^2(s). \end{aligned}$$

- Die Lösung der dritten Gleichung bekommen wir durch Trennung der Veränderlichen,
$$-\frac{w'(s)}{w^2(s)} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \int -\frac{w'(s)}{w^2(s)}\,\mathrm{d}s = \int 1\,\mathrm{d}s \quad\Leftrightarrow\quad (w(s))^{-1} = s + C_3,$$
also $w(s) = \frac{1}{s+C_3}$.
- Einsetzen in die erste Gleichung des charakteristischen Systems liefert $k_1'(s) = 3/(s+C_3)$. Integration liefert $k_1(s) = 3\ln|s + C_3| + C_1$.
- Die zweite Gleichung lösen wir ebenfalls durch Trennung der Veränderlichen und erhalten $k_2(s) = C_2 e^{-s}$.

Aus der Randbedingung $u(0, x_2) = 1$ lesen wir die Anfangskurve $\tilde{\Gamma} = \{(0, t, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$ ab. Damit bestimmen wir die Konstanten C_1, C_2, C_3 durch

$$(0, t, 1) \stackrel{!}{=} (k_1(0),\ k_2(0),\ w(0)) = (3\ln|C_3| + C_1,\ C_2,\ 1/C_3).$$

Wir erhalten $C_3 = 1$, $C_2 = t$ und $C_1 = 0$. Folglich ist

$$\big(k_1(s, t),\ k_2(s, t),\ w(s, t)\big) = \big(3\ln|s + 1|,\ te^{-s},\ 1/(s + 1)\big).$$

Es gilt $k_1(s, t) = x_1(s, t)$, $k_2(s, t) = x_2(s, t)$ und $w(s, t) = u(k_1(s, t), k_2(s, t)) = u(x_1, x_2)$. Die erste Gleichung liefert $x_1 = 3\ln|s + 1| \Rightarrow \exp(x_1/3) = |s + 1| \Rightarrow s + 1 = \pm\exp(x_1/3)$ und somit

$$u^\pm(x_1, x_2) = \frac{1}{\pm\exp(x_1/3)}.$$

Offensichtlich erfüllt nur die Funktion

$$u^+(x_1, x_2) = \exp(-x_1/3)$$

die Anfangsbedingung $u(0, x_2) = 1$ und ist daher Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung zu 5: Sei $U = \{1, \ldots, 11\}$ die Menge der elf Kugeln und $R = \{1, 2\}$, $B = \{3, \ldots, 6\}$, $G = \{7, \ldots, 11\}$ entsprechend die Mengen der roten, blauen und gelben Kugeln. Da die Reihenfolge der Kugeln in keinem der Aufgabenteile eine Rolle spielt, modellieren wir das Zufallsexperiment als Kombination ohne Wiederholung und betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in U^3 :\ \omega_1 < \omega_2 < \omega_3\}.$$

Da alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, handelt es sich um ein Laplace-Experiment. Es gilt $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2} = 165$. Die drei Farben lassen sich auf zehn verschiedene Weisen kombinieren. Da wir die Wahrscheinlichkeiten dieser zehn Ereignisse spter bentigen, legen wir folgende Tabelle an, wobei r fr rot, b fr blau und g fr gelb steht.

Ereignis	Anzahl günstiger Ergebnisse	$P(A)$
rrr	0	0
rrg	$\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$	$\frac{5}{165}$
rrb	$\binom{2}{2}\binom{4}{1} = 4$	$\frac{4}{165}$
rgg	$\binom{2}{1}\binom{5}{2} = 20$	$\frac{20}{165}$
rgb	$\binom{2}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{1} = 40$	$\frac{40}{165}$
rbb	$\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 12$	$\frac{12}{165}$
ggg	$\binom{5}{3} = 10$	$\frac{10}{165}$
ggb	$\binom{5}{2}\binom{4}{1} = 40$	$\frac{40}{165}$
gbb	$\binom{5}{1}\binom{4}{2} = 30$	$\frac{30}{165}$
bbb	$\binom{4}{3} = 4$	$\frac{4}{165}$

(a) Wir suchen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

$$A_1 := \{\omega \in \Omega : \text{ mindestens ein } \omega_i \in G,\ i = 1,2,3\}.$$

Diese lässt sich leicht aus unserer Tabelle ablesen:

$$P(A_1) = \frac{5+20+40+10+40+30}{165} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33}.$$

(b) Wir definieren das Ereignis

$$A_2 := \{\omega \in \Omega : \text{ mindestens ein } \omega_i \in R,\ i = 1,2,3\}.$$

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_2|A_1)$, die per Definition durch

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$$

gegeben ist. $P(A_1)$ haben wir bereits in (a) berechnet. $P(A_1 \cap A_2)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass mindestens eine der Kugeln rot und mindestens eine gelb ist, also rrg, rgg, oder rgb. Unsere Tabelle liefert $P(A_2 \cap A_1) = \frac{5+20+40}{165} = \frac{65}{165}$. Insgesamt erhalten wir

$$P(A_2|A_1) = \frac{65}{165} \cdot \frac{165}{145} = \frac{65}{145} = \frac{13}{29}.$$

(c) Sei X die Zufallsvariable, die angibt, wie viele verschiedene Farben im Ergebnis vorkommen. Wir nutzen unsere Tabelle um den Erwartungswert zu bestimmen und bekommen

$$E(X) = 3 \cdot \frac{40}{165} + 2 \cdot \frac{5+4+20+12+40+30}{165} + 1 \cdot \frac{10+4}{165} = \frac{365}{165} \approx 2,16.$$