

**Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik III
Fachrichtungen: biw/ciw/mach/mit/mwt/vt
vom 5. März 2022**

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x, y) = \ln(y) + \int_0^{e^x} \cos(xyt) dt.$$

- (a) Berechnen Sie $\nabla F(x, y)$.
- (b) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $F(x, y) = 1$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 1)$ implizit eine Funktion $x(y)$ definiert ist, und bestimmen Sie das Taylor-Polynom p_1 ersten Grades der Funktion x im Entwicklungspunkt $y_0 = 1$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie in expliziter Form die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{1}{y(x)} - 2\frac{y(x)}{x} + 2y'(x) = 0, \quad x > 0, \quad \text{mit } y(1) = 2.$$

Hinweis: Es gibt einen Euler'schen Multiplikator, der nur von $\frac{x^2}{y}$ abhängt.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Menge

$$M = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq xy \leq 2, y \geq 0 \text{ und } 1 \leq \frac{y}{z} \leq \frac{xz}{y} \leq xy \right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_M \frac{x}{z} d(x, y, z)$$

mit Hilfe der Variablentransformation $u = \frac{xz}{y}$, $v = xy$, $w = \frac{y}{z}$.

Aufgabe 4

Es gibt eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

mit $u(t, -t) = 2e^{2t}$ für $t \in \mathbb{R}$ in der Form

$$u(x) = v(x_1 + x_2) w(x_1 - x_2).$$

Berechnen Sie mit der angegebenen Separation diese Lösung.

Hinweis: Betrachten Sie die Variablen $y_1 = x_1 + x_2$ und $y_2 = x_1 - x_2$ im \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ at e^{-bt^2}, & t \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f Dichte einer Zufallsvariable X ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$P\left(0 \leq X \leq 1\right) = 1 - \frac{1}{e^2}.$$

- (b) Berechnen Sie für die Zufallsvariable X aus Teil (a) den Erwartungswert und die Varianz.

Hinweis: Es gilt $\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Lösung zu 1: (a) Es ist $F(x, y) = \ln(y) + G(x, y, e^x)$ mit

$$G(x, y, z) = \int_0^z \cos(xyt) dt.$$

Mit Differentiation des Parameterintegrals und dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\nabla G(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\int_0^z yt \sin(xyt) dt \\ -\int_0^z xt \sin(xyt) dt \\ \cos(xyz) \end{pmatrix}.$$

Die Kettenregel liefert

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, e^x) + e^x \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, e^x) \\ \frac{1}{y} + \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, e^x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_0^{e^x} yt \sin(xyt) dt + e^x \cos(xye^x) \\ \frac{1}{y} - \int_0^{e^x} xt \sin(xyt) dt \end{pmatrix}.$$

Alternative: Partielle Integration liefert $f(x, y) = \ln(y) + \frac{1}{xy} \sin(xye^x)$ und die Ableitungen ergeben sich aus der Kettenregel zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= -\frac{1}{x^2 y} \sin(xye^x) + \left(\frac{1}{x} + 1\right) e^x \cos(xye^x) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} \sin(xye^x) + \frac{e^x}{y} \cos(xye^x) \end{aligned}$$

(b) Offensichtlich ist $F(0, 1) = 1$, d.h. $(0, 1) \in M$, und nach Teil (a) gilt $(\partial F / \partial x)(0, 1) = 1 - 0 \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 1)$ nach x auflösbar, d.h. es gibt eine Funktion $x = x(y)$ um $y_0 = 1$, mit $F(x(y), y) = 1$ für y in einem offenen Intervall um 1.

Um das Taylor-Polynom $p_1(y) = x(y_0) + x'(y_0)(y - y_0)$ mit Entwicklungspunkt $y_0 = 1$ zu bestimmen, leiten wir die Gleichung $1 = F(x(y), y)$ ab:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dy} F(x(y), y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(y), y) x'(y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(y), y) \\ &= x'(y) \left(-\int_0^{e^{x(y)}} yt \sin(x(y)yt) dt + e^{x(y)} \cos(x(y)ye^{x(y)}) \right) + \frac{1}{y} - \int_0^{e^{x(y)}} x(y)t \sin(x(y)yt) dt \end{aligned}$$

Einsetzen der Stelle $(0, 1) = (x(1), 1) = (x(y_0), y_0)$ für $(x(y), y)$ liefert

$$0 = x'(1) + 1 \quad \text{bzw.} \quad x'(1) = -1.$$

Damit ist $p_1(y) = 0 - (y - 1) = 1 - y$.

Lösung zu 2: Mit einem Multiplikator $\lambda\left(\frac{x^2}{y}\right)$ definieren wir

$$P(x, y) = \lambda\left(\frac{x^2}{y}\right) \left(\frac{1}{y} - \frac{2y}{x}\right) \quad \text{und} \quad Q(x, y) = 2\lambda\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

Mit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \stackrel{!}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

und den Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -\lambda'\left(\frac{x^2}{y}\right) \left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{2x}{y}\right) + \lambda\left(\frac{x^2}{y}\right) \left(-\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x}\right) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= 2\lambda'\left(\frac{x^2}{y}\right) \frac{2x}{y} \end{aligned}$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$\lambda'\left(\frac{x^2}{y}\right) \left(-\frac{x^2}{y^3} - \frac{2x}{y}\right) + \lambda\left(\frac{x^2}{y}\right) \left(-\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x}\right) = 0$$

bzw. mit $t = \frac{x^2}{y}$ folgt

$$t\lambda'(t) + \lambda(t) = 0.$$

Durch Separation erhalten wir

$$\ln \lambda(t) = -\ln(t) + \tilde{c}$$

und somit als möglichen Multiplikator $\lambda(t) = t^{-1}$.

Die ursprüngliche DGL wird also exakt, wenn wir sie mit $\frac{y}{x^2}$ multiplizieren. Wir erhalten

$$P(x, y) = \frac{1}{x^2} - 2\frac{y^2}{x^3} \quad \text{und} \quad Q(x, y) = 2\frac{y}{x^2}.$$

Das Potential F mit $\nabla F = (P, Q)^\top$ ergibt sich aus

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy = \frac{y^2}{x^2} + c(x).$$

Leiten wir partiell nach x ab, so folgt mit P

$$-2\frac{y^2}{x^3} + c'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = \frac{1}{x^2} - 2\frac{y^2}{x^3}.$$

Also ist $c'(x) = \frac{1}{x^2}$ und wir bekommen $c(x) = -\frac{1}{x}$.

Somit sind Lösungen der Differentialgleichung implizit durch

$$F(x, y) = \frac{y^2 - x}{x^2} = k$$

für Konstanten $k \in \mathbb{R}$ gegeben. Mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ folgt $k = 3$ und durch Auflösen der impliziten Gleichung ergibt sich die Lösung

$$y(x) = \sqrt{3x^2 + x}.$$

Lösung zu 3: Mit der Bedingung $y \geq 0$ folgt aus der ersten Bedingung $x, y > 0$ und aus der dritten Bedingung auch $z > 0$ für Punkte in M . Also ergibt sich $1 \leq v \leq 2$.

Insgesamt lässt sich mit der dritten Ungleichungskette und der Transformation $\psi(u, v, w) = (x, y, z)^\top$ die Menge durch $M = \psi(D)$ mit

$$D = \{(u, v, w)^\top \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq v \leq 2, 1 \leq w \leq u \leq v\}$$

beschreiben.

Um das Integral in die neuen Koordinaten zu transformieren, benötigen wir noch die Funktionaldeterminante $\det(\psi'(u, v, w))$. Wir bestimmen explizit die Umkehrung: Aus $xz = \frac{v}{w}$ erhalten wir

$$y = \frac{xz}{u} = \frac{v}{uw}, \quad x = \frac{v}{y} = uw \text{ und } z = \frac{y}{w} = \frac{v}{uw^2}.$$

Dann ergibt sich direkt die Funktionaldeterminante aus

$$\det \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ -\frac{v}{u^2w} & \frac{1}{uw} & -\frac{v}{uw^2} \\ -\frac{v}{u^2w^2} & \frac{1}{uw^2} & -\frac{v}{uw^3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ -\frac{v}{u^2w} & \frac{1}{uw} & -\frac{v}{uw^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v}{uw^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{uw} \det \begin{pmatrix} w & u \\ 0 & -\frac{v}{uw^3} \end{pmatrix} = -\frac{v}{u^2w^3}$$

Alternativ lässt sich auch berechnen:

$$\begin{aligned} \det((\psi^{-1})'(x, y, z)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{z}{y} & -\frac{xz}{y^2} & \frac{x}{y} \\ y & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -2\frac{xz}{y} & \frac{x}{y} \\ y & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \end{pmatrix} \\ &= -y \det \begin{pmatrix} -2\frac{xz}{y^2} & \frac{x}{y} \\ \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \end{pmatrix} = -y \left(2\frac{x}{yz} - \frac{x}{yz} \right) = -\frac{x}{z} = -\frac{u^2w^3}{v}. \end{aligned}$$

Also ist $|\det(\psi'(u, v, w))| = \frac{v}{u^2w^3}$. Für das Integral erhalten wir mit der Transformationsformel und den Umkehrungen von x und z

$$\begin{aligned} \iiint_M \frac{x}{z} d(x, y, z) &= \iiint_D \frac{u^2w^3}{v} \frac{v}{u^2w^3} d(u, v, w) \\ &= \int_1^2 \int_1^v \int_w^v du dw dv \\ &= \int_1^2 \int_1^v v - w dw dv = \int_1^2 \left[v^2 - v - \frac{1}{2}(v^2 - 1) \right] dv \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}v^2 - v + \frac{1}{2} \right] dv = \frac{1}{6}(8 - 1) - \frac{1}{2}(4 - 1) + \frac{1}{2}(2 - 1) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Lösung zu 4: Zum Ansatz $u(x) = v(x_1 + x_2)w(x_1 - x_2)$ berechnen wir mit der Kettentregel zunächst die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = v'(x_1 + x_2)w(x_1 - x_2) + v(x_1 + x_2)w'(x_1 - x_2) = v'(y_1)w(y_2) + v(y_1)w'(y_2)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) &= v'(y_1)w(y_2) - v(y_1)w'(y_2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) &= v''(y_1)w(y_2) + 2v'(y_1)w'(y_2) + v(y_1)w''(y_2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) &= v''(y_1)w(y_2) - 2v'(y_1)w'(y_2) + v(y_1)w''(y_2) \end{aligned}$$

mit $y_1 = x_1 + x_2$ und $y_2 = x_1 - x_2$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$4v'(y_1)w'(y_2) + v(y_1)w(y_2) = 0$$

bzw.

$$\frac{4v'(y_1)}{v(y_1)} = -\frac{w'(y_2)}{w(y_2)} = k$$

mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$, wenn $v \neq 0$ und $w' \neq 0$ gilt. Wir lösen die beiden separablen DGL und erhalten

$$v(y_1) = c_1 e^{\frac{k}{4}y_1} \quad \text{und} \quad w(y_2) = c_2 e^{-\frac{1}{k}y_2}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Also mit $c = c_1 c_2$ ist

$$u(x) = c e^{\frac{k}{4}(x_1+x_2)} e^{-\frac{1}{k}(x_1-x_2)}.$$

Aus der Bedingung $u(t, -t) = c \cdot 1 \cdot e^{-\frac{2}{k}t} = 2e^{2t}$ folgt $k = -1$ und $c = 2$ für die Lösung des Problems und wir erhalten $u(x) = 2 e^{\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2}$.

Lösung zu 5: (a) Damit f Dichte einer Zufallsvariable ist, muss gelten

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = a \int_0^{\infty} t e^{-bt^2} dt = \frac{-a}{2b} e^{-bt^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{2b}.$$

Weiterhin erhalten wir aus der geforderten Wahrscheinlichkeit die Bedingung

$$1 - \frac{1}{e^2} = P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 t e^{-bt^2} dt = \frac{-a}{2b} e^{-bt^2} \Big|_0^1 = \frac{a}{2b} (1 - e^{-b})$$

die Werte $b = 2$ und $a = 4$.

(b) Mit der Dichte aus Teil (a) folgt

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = 4 \int_0^{\infty} t^2 e^{-2t^2} dt \\ &= -t e^{-2t^2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{4} \sqrt{2\pi}, \end{aligned}$$

wobei sich der Integralwert, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$, aus einer Formelsammlung (oder mit der Standardnormalverteilung, s. Skript) ergibt.

Für die Varianz nutzen wir $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Also berechnen wir zunächst den Erwartungswert von X^2 . Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt &= 4 \int_0^{\infty} t^3 e^{-2t^2} dt \\ &= -t^2 e^{-2t^2} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t e^{-2t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die Varianz

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$