Karlsruher Institut für Technologie

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik III
Fachrichtungen: biw/ciw/mach/mit/mwt/vt

25. März 2023

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(s) = f(s^2, s^{-2})$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$f(x_1, x_2) = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{x_1}} \frac{1}{t \ln(t)} \mathrm{e}^{(x_2 \ln(t))} \, \mathrm{d}t \, .$$

Hinweis: Berechnen Sie den Gradienten von f.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsfunktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$x \, y(x) + \left(x^2 - \frac{x}{y(x)} \right) y'(x) = 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = 2 \, .$$

Dazu lässt sich ein Euler'scher Multiplikator $\lambda(xy)$ in Abhängigkeit von xy verwenden. Es genügt, die Lösung y in impliziter Form anzugeben.

Berechnen Sie weiterhin das Taylorpolynom erster Ordnung zu y um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Fläche

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + \frac{1}{3} x_2^2 < 1 \text{ und } 0 < x_2 < x_1 \right\}$$

und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x) = \left(-x_1 x_2, \, -x_2 x_3, \, \frac{3}{2} x_1^2 \right)^\top$. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Kurvenintegral

$$\int_C F \cdot \mathrm{d}\ell$$

längs der Randkurve C der Fläche S. Dabei sei S so orientiert, dass der Normalenvektor eine nicht-negative dritte Koordinate hat, und C dazu positiv orientiert.

Hinweise:

(i) Zur Parametrisierung der Fläche bieten sich elliptische Koordinaten der Form $x_1 = a \, r \cos t$ und $x_2 = b \, r \sin t$ mit passenden Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ an.

(ii) Es gilt $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \frac{x_2}{x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + 2 x_2 \tan(x_1 x_2) \, u(x) = 0$$

auf $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, 0 < x_1 x_2 < \frac{\pi}{2}\}$ mit der Anfangsbedingung $u(x_2^2, x_2) = x_2 \cos(x_2^3)$.

Aufgabe 5

Ein fairer Würfel wird n-mal gewürfelt.

(a) Im Fall $n = 2$ definieren wir die Zufallsvariable X, die den Betrag der Differenz der beiden Augenzahlen angibt. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X, wenn nur Würfe betrachtet werden, die weder eine Fünf noch eine Sechs enthalten.

(b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfen mindestens eine Eins, aber weder eine Fünf noch eine Sechs fällt.

Hinweis: Eine bedingte Wahrscheinlichkeit ist hilfreich.

Lösung zu 1: Zunächst ergibt sich mit dem ersten Hauptsatz der Differentialrechnung und der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{x_1\,\mathrm{e}^{x_1}}\,\mathrm{e}^{x_1 x_2}\,\mathrm{e}^{x_1} = \frac{1}{x_1}\mathrm{e}^{x_1 x_2}\,.$$

Weiterhin erhalten wir mit Substitution, $u = \ln(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{x_1}} \frac{1}{t\ln(t)}\ln(t)\mathrm{e}^{x_2\ln(t)}\,dt\\ &= \int_1^{x_1} \mathrm{e}^{x_2 u}\,du\\ &= \frac{1}{x_2}\mathrm{e}^{x_2 u}\Big|_1^{x_1} = \frac{1}{x_2}(\mathrm{e}^{x_1x_2} - \mathrm{e}^{x_2})\,.\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel in zwei Dimensionen zu $f(k(s))$ mit $k(s) = (s^2, s^{-2})$ folgt insgesamt

$$\begin{aligned}g'(s) &= \frac{d}{ds}(f(s^2, s^{-2}))\\ &= k_1'(s)\frac{\partial f}{\partial x_1}(k(s)) + k_2'(s)\frac{\partial f}{\partial x_2}(k(s))\\ &= \frac{2s}{s^2}\mathrm{e} - \frac{2s^{-3}}{s^{-2}}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{s^2}}) \;=\; \frac{2}{s}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{s^2}}\,.\end{aligned}$$

Lösung zu 2: Mit einem Multiplikator $\lambda(xy)$ ergibt sich eine exakte Differentialgleichung, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(xy\,\lambda(xy)) &= x^2y\lambda'(xy) + x\lambda(xy)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}((x^2 - \frac{x}{y})\lambda(xy)) = y(x^2 - \frac{x}{y})\lambda'(xy) + (2x - \frac{1}{y})\lambda(xy)\end{aligned}$$

bzw.

$$\lambda'(xy) = (1 - \frac{1}{xy})\lambda(xy)$$

gilt.

Wir lösen die separable Differentialgleichung $\lambda'(t) = (1 - \frac{1}{t})\lambda(t)$ durch

$$\ln|\lambda| = \int \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,dt = \int 1 - \frac{1}{t}\,dt = t - \ln|t|\,,$$

und erhalten $\lambda(t) = \frac{1}{t}\mathrm{e}^t$. Damit ergibt sich die exakte Differentialgleichung

$$\mathrm{e}^{xy} + \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{e}^{xy}y' = 0\,.$$

Um das zugehörige Potential zu bestimmen, berechnen wir

$$f(x,y) = \int \mathrm{e}^{xy}\,dx = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{xy} + c(y)\,.$$

Aus

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2})\mathrm{e}^{xy} + c'(y)$$

sehen wir $c'(y) = 0$ bzw $c(y) =$ konstant. Also ist die Lösung der Differentialgleichung implizit durch

$$\frac{1}{y(x)}\mathrm{e}^{xy(x)} = k$$

gegeben und mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ errechnen wir die Konstante $k = \frac{\mathrm{e}^2}{2}$.

Aus $y(1) = 2$ und der Differentialgleichung an der Stelle $x_0 = 1$ ergibt sich

$$2 + (1 - \frac{1}{2})y'(1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad y'(1) = -4\,.$$

Damit gilt für die gesuchte Linearisierung der Lösungskurve

$$y(x) \approx y(1) + y'(1)(x-1) = 2 - 4(x-1) = 6 - 4x\,.$$

Lösung zu 3: Um den Stoke'schen Satz

$$\int_C F\cdot \mathrm{d}\ell = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \mathrm{do}$$

zu nutzen, berechnen wir zunächst

$$\operatorname{rot} F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\\ -3x_1\\ x_1\end{pmatrix}.$$

Für die Oberfläche ergibt sich mit den angegebenen Koordinaten für $a = 1$ und $b = \sqrt{3}$ die Parametrisierung

$$X(r,t) = \begin{pmatrix} r\cos t\\ \sqrt{3}r\sin t\\ r^2\end{pmatrix}$$

mit $r \in [0,1]$. Für t ergibt sich aus $x_1,\, x_2 > 0$ die Bedingung $t > 0$. Außerdem folgt aus $\cos t > \sqrt{3}\sin t$ bzw. $\tan t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ die Bedingung $t < \frac{\pi}{6}$. Also ist

$$S = \left\{\begin{pmatrix} r\cos t\\ \sqrt{3}\,r\sin t\\ r^2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : r\in[0,1], t\in[0,\frac{\pi}{6}]\right\}.$$

Weiter bestimmen wir die Tangentialvektoren

$$X_r(r,t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sqrt{3}\,\sin t\\ 2r\end{pmatrix}, \qquad X_t(r,t) = \begin{pmatrix}-r\sin t\\ \sqrt{3}\,r\cos t\\ 0\end{pmatrix}$$

und den Normalenvektor

$$X_r \times X_t = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}\, r^2 \cos t \\ -2\, r^2 \sin t \\ \sqrt{3}\, r \end{pmatrix}.$$

Mit dem Integranden

$$\operatorname{rot}(F) \cdot (X_r \times X_t) = -2(\sqrt{3})^2 r^3 \sin t \cos t + 6 r^3 \cos t \sin t + \sqrt{3}\, r^2 \cos t = \sqrt{3}\, r^2 \cos t$$

in den Koordinaten r, t ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot \mathrm{d}\ell &= \int_S \operatorname{rot}(F) \cdot \mathrm{d}o \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 \cos t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}r \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 r^2 \sin t |_{t=0}^{\frac{\pi}{6}} \, \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Lösung zu 4: Es handelt sich um eine quasi-lineare Differentialgleichung, und es bietet sich das Charakteristiken-Verfahren zum Lösen des Problems an. Bezeichnen wir mit k_1, k_2, w die Charakteristik, so erhalten wir das System

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= 1 \\ k_2'(s) &= \frac{k_2(s)}{k_1(s)} \\ w(s) &= -2 k_2(s) \, \tan(k_1(s)\, k_2(s))\, w(s). \end{aligned}$$

Integration liefert die Lösuingen der ersten Differentialgleichung $k_1(s) = s + c_1$ und für k_2 ergibt aus der separablen DGL

$$\ln(|k_2(s)|) = \int \frac{k_2'(s)}{k_2(s)}\, ds = \int \frac{1}{s + c_1}\, ds = \ln(s + c_1) + \tilde{c}_2 ,$$

bzw.

$$k_2(s) = c_2(s + c_1).$$

Einsetzen in die dritte DGL und Separation liefert

$$\begin{aligned} \ln|w(s)| = \int \frac{w'(s)}{w(s)}\, ds &= -2 \int c_2(s + c_1) \tan(c_2(s + c_1)^2)\, ds \\ &= -\int \tan(v)\, dv \\ &= \ln(\cos(v)) + \tilde{c}_3 \end{aligned}$$

mit der Substitution $v = c_2(s + c_1)^2$. Wir erhalten $w(s) = c_3 \cos(c_2(s + c_1)^2)$.

Als nächstes parametrisieren wir die Anfangskurve durch (t^2, t) für $t > 0$ und bestimmen die Integrationskonstanten in Abhängigkeit des Parameters t aus $t^2 = k_1(0) = c_1$, $t = k_2(0) = c_2 c_1$, also $c_2 = \frac{1}{t}$, und aus

$$t \cos(t^3) = w(0) = c_3 \cos\left(\frac{1}{t}(t^2)^2\right)$$

mit $c_3 = t$. Insgesamt ergibt sich in Abhängigkeit der beiden Parameter s, t

$$\begin{aligned} k_1(s,t) &= s + t^2 \\ k_2(s,t) &= \frac{1}{t}(s + t^2) \\ w(s,t) &= t \cos\left(\frac{1}{t}(s + t^2)^2\right). \end{aligned}$$

Transformation zurück in kartesische Koordinaten liefert aus $x_1 = s + t^2$ und $x_2 = \frac{1}{t}(s + t^2) = \frac{1}{t} x_1$ bzw. $t = \frac{x_1}{x_2}$ die Lösung

$$u(x) = \frac{x_1}{x_2} \cos(x_1 x_2).$$

Lösung zu 5: zu (a) Insgesamt ergibt sich unter der Bedingung ein Laplace Experiment mit 16 unterschiedlichen Würfen $\widetilde{\Omega} = \{(w_1, w_2) : w_j \in \{1, ..., 4\}\}$ und den möglichen Differenzen $\{0, 1, 2, 3\}$. Für die Verteilung der Zufallsvariable erhalten wir

$$P(X = 0) = \frac{4}{16}, \quad P(X = 1) = \frac{6}{16}, \quad P(X = 2) = \frac{4}{16}, \quad \text{und} \quad P(X = 3) = \frac{2}{16}.$$

Damit erhalten wir den Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{j=0}^{3} j\, P(X = j) = \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{4}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} = \frac{5}{4}.$$

zu (b) Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \Omega &= \{w = (w_1, \ldots, w_n) : w_j \in \{1, \ldots 6\}\}, \\ A &= \{w \in \Omega : w_j \notin \{5, 6\},\ j = 1, \ldots, n\}, \\ B &= \{w \in \Omega : \text{es gibt } j \in \{1, \ldots n\} \text{ mit } w_j = 1\} \end{aligned}$$

ist die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ gesucht. Dazu lässt sich mit

$$P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A)$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ nutzen.

Zunächst bestimmen wir

$$P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

da jeder Wurf ein Laplace Experiment ist und somit $\frac{4}{6}$ die Wahrscheinlichkeit für $w_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist. Weiter berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ aus der Gegenwahrscheinlichkeit (bei keinem der betrachteten Würfe tritt eine Eins auf) zu

$$P(B|A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Insgesamt ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A) = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$