

**Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik III
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt**

Karlsruhe, 23. März 2024

Aufgabe 1

Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$-3x + \frac{x^2}{y(x)} y'(x) = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = \frac{1}{2},$$

in expliziter Form an.

Hinweis: Es existiert ein Euler'scher Multiplikator der Form $\Lambda(x, y) = \ell\left(\frac{x^2}{y}\right)$.

Aufgabe 2

Es sei

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : (6x - y)^2 = 54 - 2y^2\}.$$

Begründen Sie, dass es einen Punkt mit kleinster x -Koordinate in M gibt und berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Aufgabe 3

Wir definieren ein Volumen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ durch:

$$V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < x_1 \right\}.$$

Verifizieren Sie in V für das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 2x_2 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

den Gauß'schen Integralsatz.

Aufgabe 4

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - 4t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0, \quad t > 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle bzgl. x ungeraden und π -periodischen Lösungen der partiellen Differentialgleichung durch einen Separationsansatz.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x, 1) = 3 \sin(6x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Ein Zufallsexperiment habe die Ergebnismenge Ω .

- (a) Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 2(t+1)^2, & -1 < t \leq 0, \\ 2-6t, & 0 < t \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f Dichte einer stetig verteilten Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X .

- (b) Eine weitere Zufallsvariable Y sei definiert durch

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0, & X(\omega) \leq 0, \\ 1, & X(\omega) > 0, \end{cases} \quad \omega \in \Omega.$$

Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y .

- (c) Bestimmen Sie für alle $s \in \mathbb{R}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq s | Y = 0)$ und begründen Sie, dass die Ereignisse $\{X \leq -1/2\}$ und $\{Y = 0\}$ nicht stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu 1: Wir definieren

$$P(x, y) = -3x \ell\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad Q(x, y) = \frac{x^2}{y} \ell\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

und fordern, dass das Integrabilitätskriterium erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \\ \frac{3x^3}{y^2} \ell'\left(\frac{x^2}{y}\right) &\stackrel{!}{=} \frac{2x}{y} \ell\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{2x^3}{y^2} \ell'\left(\frac{x^2}{y}\right) \\ \frac{x^3}{y^2} \ell'\left(\frac{x^2}{y}\right) &\stackrel{!}{=} \frac{2x}{y} \ell\left(\frac{x^2}{y}\right) \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit y/x und substituieren $t = x^2/y$. Dadurch erhalten wir die Differentialgleichung

$$t \ell'(t) = 2 \ell(t).$$

Separation der Variablen und Integration (unter Vernachlässigung der Integrationskonstante) liefert

$$\ln |\ell(t)| = \ln t^2 \quad \implies \quad \ell(t) = t^2.$$

Es folgt $P(x, y) = -3x^5/y^2$ und somit

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx = -\frac{x^6}{2y^2} + c(y).$$

Somit

$$\frac{x^6}{y^3} = Q(x, y) \stackrel{!}{=} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{x^6}{y^3} + c'(y).$$

Es ist also $c'(y) = 0$ und wir wählen $c(y) = 0$. In impliziter Form sind damit Lösungen der exakten Differentialgleichung gegeben durch

$$F(x, y(x)) = -\frac{x^6}{2y(x)^2} = C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1/2$ folgt sofort $C = -2$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also implizit durch die Gleichung

$$2 - \frac{x^6}{2y(x)^2} = 0 \quad \iff \quad y(x)^2 = \frac{x^6}{4}$$

gegeben. Beim Lösen der quadratischen Gleichung kommt aufgrund der Anfangsbedingung nur die Lösung mit positivem Vorzeichen in Frage. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{x^3}{2}, \quad x > 0.$$

Lösung zu 2: Die Problemstellung kann so formuliert werden: Suche das Minimum von $f(x, y) = x$, $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$, unter der Nebenbedingung $g(x, y) = (6x - y)^2 + 2y^2 - 54 = 0$.

Wir betrachten einen Punkt $(x, y)^\top \in M$. Dann gilt

$$y^2 \leq 27 \quad \text{und} \quad (6x - y)^2 \leq 54.$$

Also ist $|y| \leq 3\sqrt{3}$ und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|x| = \frac{1}{6} |6x| \leq \frac{1}{6} |6x - y| + \frac{1}{6} |y| \leq \frac{\sqrt{54} + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

Also sind die Beträge beider Koordinaten beschränkt. Damit haben wir gezeigt, dass die Menge M beschränkt ist. Diese Menge ist auch abgeschlossen, da g ein Polynom und damit stetig ist. Schließlich ist auch die zu minimierende Funktion f stetig. Somit nimmt f auf der kompakten Menge M sein Minimum an, das heißt, es gibt einen Punkt mit kleinster x -Koordinate in M .

Kandidaten für M bestimmen wir mit der Lagrange'schen Multiplikatoren-Regel. Die Gradient der Nebenbedingungsfunktion ist null, wenn

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 12(6x - y) \\ -2(6x - y) + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72x - 12y \\ -12x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Addiere die zweite Zeile zweimal zur ersten, um $x = 0$ zu erhalten. Einsetzen liefert dann $y = 0$. Der Punkt $(0, 0)^\top$ liegt aber nicht in M . Somit ist die Multiplikatoren-Regel für alle $(x, y)^\top \in M$ anwendbar.

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x, y, \lambda) = x + \lambda((6x - y)^2 + 2y^2 - 54).$$

Kritische Punkte erfüllen nach der Multiplikatoren-Regel das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + \lambda(72x - 12y) &= 0, \\ \lambda(-12x + 6y) &= 0, \\ (6x - y)^2 + 2y^2 - 54 &= 0. \end{aligned}$$

Es ist $\lambda \neq 0$, da sich sonst in der ersten Gleichung ein Widerspruch ergibt. Somit gilt nach der zweiten Gleichung $2x = y$. Dies setzen wir in die dritte Gleichung ein und erhalten

$$(6x - 2x)^2 + 2(2x)^2 = 54 \quad \iff \quad (16 + 8)x^2 = 54 \quad \iff \quad x^2 = \frac{9}{4}$$

Die x -Koordinaten der Kandidaten sind also $x = \pm 3/2$ und die entsprechenden y -Koordinaten $y = \pm 3$. Einer dieser Punkte ist die Minimalstelle, der andere die Maximalstelle von f . Da wir nach dem Punkt mit der kleinsten x -Koordinate suchen, ist der gesuchte Punkt $(x, y)^\top = (-3/2, -3)^\top$.

Lösung zu 3: Der Gauß'sche Integralsatz lautet

$$\iiint_V \operatorname{div} F(x) dx = \iint_{\partial V} F(x) \cdot d\mathbf{o}.$$

Wir berechnen zunächst das Oberflächenintegral. Es ist $\partial V = B \cup D \cup M$, wobei

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0, x_1 \geq 0\}, \\ D &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 = x_3, x_1 \geq 0\}, \\ M &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq x_1\}. \end{aligned}$$

Die Fläche B parametrisieren wir durch $X_B(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)^\top$ mit $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und erhalten

$$\partial_r X_B(r, \varphi) \times \partial_\varphi X_B(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Da der Normalenvektor aus V herauszeigen soll, muss er auf B nach unten zeigen. Wir müssen also bei der Berechnung des Integrals mit dieser Parametrisierung das Vorzeichen ändern. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint_B F(x) \cdot d\mathbf{o} &= \iint_{[0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]} \begin{pmatrix} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ 0 \\ r^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d(r, \varphi) \\ &= - \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

Ganz analog parametrisieren wir D durch $X_D(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r \cos \varphi)^\top$ mit $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und erhalten

$$\partial_r X_D(r, \varphi) \times \partial_\varphi X_D(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Diesmal stimmt die Orientierung (3. Koordinate positiv) und wir erhalten für das Integral

$$\iint_D F(x) \cdot d\mathbf{o} = \iint_{[0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]} \begin{pmatrix} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ r^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} d(r, \varphi) = 0.$$

Schließlich parametrisieren wir M durch $X_M(t, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, t \cos \varphi)^\top$ mit $t \in [0, 1]$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Es gilt

$$\partial_t X_M(t, \varphi) \times \partial_\varphi X_M(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ -t \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^2 \varphi \\ -\cos \varphi \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt zur x_3 -Achse, also nach V hinein, sodass wir wieder die Orientierung

ändern müssen. Es ist

$$\begin{aligned} \iint_M F(x) \cdot d\mathbf{o} &= \iint_{[0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \varphi \\ 2t \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d(r, \varphi) \\ &= \int_{t=0}^1 \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^3 \varphi \sin \varphi + 2t \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi dr \\ &= \left[\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral kann man über eine partielle Integration schnell berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{3} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{3} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

Für das Gebietsintegral berechnen wir zunächst $\operatorname{div} F(x) = x_2 + 2x_3$. Das Volumen V können wir über Zylinderkoordinaten beschreiben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} : r \in [0, 1], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 < z < r \cos \varphi \right\}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} F(x) dx &= \iiint_V (x_2 + 2x_3) dx = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{z=0}^{r \cos \varphi} (r \sin \varphi + 2z) r dz d\varphi dr \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} r^3 (\sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi dr \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Dies entspricht genau der Summe der Werte der drei Oberflächenintegrale, was in Gauß'schen Integralsatz in diesem Fall verifiziert.

Lösung zu 4: (a) Mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ erhalten wir die Gleichung

$$v''(x)w(t) - 4t v(x)w'(t) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = 4t \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite der Gleichung nur von x , die rechte nur von t abhängig sind, sind beide konstant. Wir schreiben diese Konstante als $-4k^2$ mit einer möglicherweise komplexen Zahl k und erhalten die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v''(x) + 4k^2 v(x) = 0, \quad t w'(t) + k^2 w(t) = 0.$$

Die Gleichung für v ist eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Exponentialansatz und der Transformation zur Lösung in reeller Form erhalten wir ihre allgemeine Lösung als

$$v(x) = a \cos(2kx) + b \sin(2kx),$$

bzw. $v(x) = a + bx$ für $k = 0$. Da die Lösungen π -periodisch sein sollen, muss $k \in \mathbb{N}_0$ sein (und für $k = 0$ auch $b = 0$), und da sie ungerade sein sollen, folgt $a = 0$. Somit haben wir die Funktionen der Form

$$v(x) = b_k \sin(2kx), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Gleichung für w ist eine Euler'sche Differentialgleichung 1. Ordnung, d.h. wir wählen den Ansatz $w(t) = t^\lambda$ (alternativ kann sie über Separation gelöst werden). Es folgt $\lambda = -k^2$, d.h. wir haben die Funktion

$$w(t) = \frac{1}{t^{k^2}}.$$

Insgesamt sind alle bzgl. x ungeraden und π -periodischen Lösungen der partiellen Differentialgleichung gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{t^{k^2}} \sin(2kx)$$

mit einer Koeffizienten-Folge (b_k) , so dass die Reihe konvergiert.

(b) Setzen wir in der Reihe aus Teil (a) $t = 1$ ein, so erhalten wir die Fourier-Reihe

$$u(x, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2kx).$$

Aus der Anfangsvorgabe folgt somit $b_3 = 3$ und $b_k = 0$ für alle $k \neq 3$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist hiermit

$$u(x, t) = \frac{3}{t^9} \sin(6x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 1.$$

Lösung zu 5: (a) Die Funktion f nimmt nur nicht-negative Werte an. Setze $F(s) = \int_{-\infty}^s f(t) dt$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s < -1: & F(s) = 0, \\ -1 \leq s < 0: & F(s) = \int_{-1}^s 2(t+1)^2 dt = \frac{2}{3}(s+1)^3, \\ 0 \leq s < \frac{1}{3}: & F(s) = \int_{-1}^0 2(t+1)^2 dt + \int_0^s (2-6t) dt = \frac{2}{3} + 2s - 3s^2, \\ \frac{1}{3} \leq s: & F(s) = \int_{-1}^0 2(t+1)^2 dt + \int_0^{1/3} (2-6t) dt + \int_{1/3}^s 0 dt = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{9} = 1. \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 1$, und damit ist f die Dichte einer stetig verteilten Zufallsvariable X . Die Verteilungsfunktion ist F .

Für den Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \int_{-1}^0 2t(t+1)^2 dt + \int_0^{1/3} t(2-6t) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{4t^3}{3} + t^2 \right]_{-1}^0 + [t^2 - 2t^3]_0^{1/3} = 0 - \frac{1}{6} + \frac{1}{27} - 0 = -\frac{7}{54}. \end{aligned}$$

(b) Es sei $G(t) = P(Y \leq t)$ die Verteilungsfunktion von Y . Dann gilt

$$\begin{aligned} t < 0: & G(t) = P(Y < 0) = 0, \\ 0 \leq t < 1: & G(t) = P(Y < 1) = P(Y = 0) = P(X \leq 0) = F(0) = \frac{2}{3}, \\ 1 \leq t: & G(t) = 1. \end{aligned}$$

(c) Wir betrachten die Ereignisse

$$\begin{aligned} A_s &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq s \text{ und } Y(\omega) = 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq s \text{ und } X(\omega) \leq 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \min\{0, s\}\}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} s \leq 0: & A_s = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq s\}, P(A_s) = F(s), \\ 0 < s: & A_s = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 0\}, P(A_s) = F(0) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist also

$$P(X \leq s | Y = 0) = \frac{P(A_s)}{P(Y = 0)} = \frac{P(A_s)}{F(0)} = \frac{3}{2} P(A_s) = \begin{cases} 0, & s < -1, \\ (s+1)^3, & -1 \leq s \leq 0, \\ 1, & 0 < s. \end{cases}$$

Es gilt

$$P\left(X \leq -\frac{1}{2} | Y = 0\right) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^3 = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{12} = F\left(-\frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}\right).$$

Die Ereignisse sind also nicht stochastisch unabhängig.