

1	2	3	4	5	Σ

Abgabegruppe

Karlsruhe, den 31. Oktober 2025

Matr.-Nr.: Matr.-Nr.: Matr.-Nr.:

1. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 1:

- (a) Zeigen Sie die Normeigenschaften für die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ im \mathbb{R}^n .
- (b) Ist durch die Definition $\|x\| = |x_1|$ für $x \in \mathbb{R}^2$ eine Norm auf dem \mathbb{R}^2 gegeben?

Aufgabe 2: (K) Welche der folgenden Mengen sind beschränkt, offen, abgeschlossen oder kompakt? Begründen Sie ihre Antworten!

- (a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < x_1^2\}$,
- (b) $M_2 = K[0, 1] \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$,
- (c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 = \sin(x_1)\}$.

Aufgabe 3: (K)

- (a) Berechnen Sie die Jacobimatrix zu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x - \ln(1 + y^2) \\ \tan e^{-y^2} \\ \sinh(xy^2) \end{pmatrix}, \quad (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Bestimmen Sie den Gradienten, die Hessematrix und den Laplace-Operator, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, zu der Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \ln \|x\|_2$.

Aufgabe 4:

Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^n}{x_1^2 + x_2^6}, & (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x \neq (0, 0)^\top$. Überlegen Sie sich mit der Definition der partiellen Ableitung, ob f in $(0, 0)^\top$ partiell differenzierbar ist. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist f stetig partiell differenzierbar?

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x_1^2 x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$, sowie ein Vektor $d = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

- (a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial d}(x)$ mit Hilfe von Definition 1.15.
- (b) Bestimmen Sie nun die Richtungsableitung, indem Sie den Gradienten ∇f berechnen und Satz 1.16 verwenden.

Abgabe bis Montag den 10.11.2025, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung*.