1. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1:
(a) Zeigen Sie die Normeigenschaften für die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$.

(b) Ist durch die Definition $\|x\| = |x_1|$ für $x \in \mathbb{R}^2$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ gegeben?

Lösung 1:

(a) Seien x, $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty &= \max_{j=1,\ldots,n} |x_j + y_j| \\
&\leq \max_{j=1,\ldots,n} (|x_j| + |y_j|) \leq \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| + \max_{j=1,\ldots,n} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \\
\|\lambda\, x\|_\infty &= \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda\, x_j| = \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda|\, |x_j| = |\lambda| \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| = |\lambda|\, \|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Für die Definitheit betrachten wir $x \neq 0$. Dann ist eine Komponente $x_{j_0} \neq 0$, $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Somit gilt:

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| \;\geq\; |x_{j_0}| > 0.$$

(b) Die Dreiecksungleichung und die Homogenität sind zwar erfüllt, nicht aber die Definitheit. Betrachte zum Beispiel $x = (0,1)^\top$. Dann ist $x \neq 0$, aber $\|x\| = 0$. Somit ist durch die Definition keine Norm gegeben.

Aufgabe 2: (K) Welche der folgenden Mengen sind beschränkt, offen, abgeschlossen oder kompakt? Begründen Sie ihre Antworten!
(a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1,\, 0 < x_2 < x_1^2\}$,

(b) $M_2 = K[0,1] \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0,\, x_2 \geqslant 0\}$,

(c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\, x_2 = \sin(x_1)\}$.

Lösung 2:
Zu M_1: beschränkt, offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt.

Begründung:
M_1 ist beschränkt, denn mit $x \in M_1$ gilt zunächst insbesondere $|x_1| \leq 1$ und aus der zweiten Ungleichungskette folgt somit auch $|x_2| \leq 1$. Also ist etwa $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$ für alle $x \in M_1$, d.h. M_1 ist beschränkt.
Definieren wir die Funktionen $f_1(x) = -x_1$, $f_2(x) = x_1 - 1$, $f_3(x) = -x_2$ und $f_4(x) = x_2 - x_1^2$, so ist die Menge $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_j(x) < 0\}$ wie in Lemma 1.10 gegeben und somit ist M_1 offen.
Weiter folgt mit Lemma 1.10, dass $\overline{M_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_j(x) \leq 0\} \neq M_1$ ist. Also ergibt sich mit Satz 1.9 (ii), dass M_1 nicht abgeschlossen ist. Insbesondere ist M_1 damit auch nicht kompakt.

Zu M_2: beschränkt, nicht offen, abgeschlossen, kompakt.

Begründung:
Die Einheitskreisscheibe $K[0,1] = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen. Somit ist insbesondere auch der Durchschnitt M_2 beschränkt.
Weiterhin ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ abgeschlossen (Lemma 1.10). Nach Satz 1.9.(iv) ist daher auch der Durchschnitt M_2 abgeschlossen. Insgesamt ist die Menge kompakt.
Mit $0 \in M_2$ und $K(0,\varepsilon) \setminus M_2 \neq \emptyset$ für jeden Wert $\varepsilon > 0$ sehen wir, M_2 nicht offen.

Zu M_3: unbeschränkt, nicht offen, abgeschlossen, nicht kompakt.

Begründung:
Die Menge ist unbeschränkt, da etwa $x^{(n)} = (n\pi, 0) \in M_3$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\|x^{(n)}\|_\infty \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Insbesondere ist die Menge somit nicht kompakt.

Die Menge ist nicht offen. Zum Beispiel liegt $0 \in M_3$, aber mit $(-\varepsilon/2, 0)^\top \in K(0, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ und $(-\varepsilon/2, 0)^\top \notin M_3$ sehen wir $K(0, \varepsilon) \setminus M_3 \neq \emptyset$.
Die Menge ist abgeschlossen, denn wenn $(x^{(k)})_k \in \mathbb{N} \subseteq M_3$ eine konvergente Folge ist mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \hat{x}$ so folgt $\hat{x}_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)} \geq 0$ und

$$\hat{x}_2 = \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \sin(x_1^{(k)}) = \sin\left(\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)}\right) = \sin(\hat{x}_1)\,,$$

da die Sinusfunktion stetig ist. Also gilt $\hat{x} \in M_3$.

Aufgabe 3: (K)

(a) Berechnen Sie die Jacobimatrix zu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x - \ln(1+y^2) \\ \tan e^{-y^2} \\ \sinh(xy^2) \end{pmatrix}, \quad (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Bestimmen Sie den Gradienten, die Hessematrix und den Laplace-Operator, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, zu der Funktion $u : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \ln \|x\|_2$.

Lösung 3: Zu (a): Die Jacobimatrix ist

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\frac{2y}{1+y^2} \\ 0 & -\frac{2ye^{-y^2}}{\cos^2(e^{-y^2})} \\ y^2\cosh(xy^2) & 2xy\cosh(xy^2) \end{pmatrix}.$$

Zu (b): Mit $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ folgt der Gradient

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\|x\|_2}\frac{2x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\|x\|_2}\frac{2x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|_2^2}\,x\,.$$

Weiter berechnen wir die Hessematrix

$$H_u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\ \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Für den Laplace-Operator ergibt sich somit

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{2}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1^2+2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0\,.$$

Aufgabe 4:
Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2\,x_2^n}{x_1^2+x_2^6}, & (x_1,x_2)^\top \in \mathbb{R}^2\backslash(0,0)\,, \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x \neq (0,0)^\top$. Überlegen Sie sich mit der Definition der partiellen Ableitung, ob f in $(0,0)^\top$ partiell differenzierbar ist. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist f stetig partiell differenzierbar?

Lösung 4:

Für $x \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= 2\frac{x_1\, x_2^{n+6}}{(x_1^2+x_2^6)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= \frac{n x_1^4 x_2^{n-1} + (n-6)x_1^2 x_2^{n+5}}{(x_1^2+x_2^6)^2}.\end{aligned}$$

Im Ursprung betrachten wir die Definition der partiellen Ableitung und erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{f(\epsilon,0)-f(0,0)}{\epsilon}\right) = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{f(0,\epsilon)-f(0,0)}{\epsilon}\right) = 0,$$

d.h. f ist in $(0,0)^\top$ partiell differenzierbar.
Für $n \geq 4$ ist f sogar stetig partiell differenzierbar; denn aus $2x_1x_2^3 \leq x_1^2+x_2^6$ (2. binomische Formel), $x_2^6 \leq x_1^2+x_2^6$ und $x_1^2 \leq x_1^2+x_2^6$ folgt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\right| = 2\left|\frac{x_1 x_2^{n+6}}{(x_1^2+x_2^6)^2}\right| = 2|x_2|^{n-3}\frac{|x_1|\,|x_2|^9}{(x_1^2+x_2^6)^2} = 2|x_2|^{n-3}\frac{|x_1|\,|x_2|^3|x_2|^6}{(x_1^2+x_2^6)^2} \leq |x_2|^{n-3} \to 0, \quad x\to 0,$$

und

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0)\right| = |x_2|^{n-1}\frac{n x_1^4 + (n-6)x_1^2 x_2^6}{(x_1^2+x_2^6)^2} \leq \left(n + \frac{n-6}{4}\right)|x_2|^{n-1} \to 0, \quad x\to 0.$$

(Die Richtungsableitung $\partial f/\partial x_2$ ist sogar für $n \geq 2$ noch stetig).
Für $n \leq 3$ ist die partielle Ableitung nach x_1 unstetig. Wählen wir z.B. die Folge $x_m = (1/m^3, 1/m)$, so erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_m) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{n-3}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Also ist $\lim_{m\to\infty}\partial f/\partial x_1 \neq 0$ und damit unstetig für $n = 1, 2, 3$.

Aufgabe 5:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x_1^2 x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$, sowie ein Vektor $d = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial d}(x)$ mit Hilfe von Definition 1.15.

(b) Bestimmen Sie nun die Richtungsableitung, indem Sie den Gradienten ∇f berechnen und Satz 1.16 verwenden.

Lösung 5:

(a) Nach Definition 1.15 ist der folgende Grenzwert zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial d} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((x_1+h\,\cos\varphi)^2(x_2+h\,\sin\varphi) - x_1^2x_2\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((x_1+h\,\cos\varphi)^2\left[x_2+h\,\sin\varphi - x_2\right] + (x_1+h\,\cos\varphi)^2x_2 - x_1^2x_2\right)\\ &= \lim_{h\to 0}(x_1+h\,\cos\varphi)^2\sin\varphi + \lim_{h\to 0}\frac{(x_1+h\,\cos\varphi)^2x_2 - x_1^2x_2}{h}\\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} x_1^2\,\sin\varphi + \lim_{h\to 0}2(x_1+h\,\cos\varphi)\cos\varphi\, x_2\\ &= x_1^2\,\sin\varphi + 2\,x_1x_2\,\cos\varphi.\end{aligned}$$

Dieser Limes existiert für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und für alle d, d.h. f ist in ganz $\mathbb{R}^2$ in alle Richtungen differenzierbar.

(b) Da die Funktion f auf ihrem ganzen Definitionsbereich partiell differenzierbar und ihr Gradient stetig ist, lässt sich die Richtungsableitung von f nach Satz 1.16 folgendermaßen leicht ausrechnen:

$$\nabla f(x) = (2x_1x_2, x_1^2)^\top, \qquad d\cdot\nabla f(x) = 2\,x_1x_2\,\cos\varphi + x_1^2\,\sin\varphi.$$

Die Ergebnisse aus (a) und (b) stimmen überein.