Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

PD Dr. F. Hettlich
Dr. L. Fink

(K) A7	(K) A9	Σ

Abgabegruppe

Karlsruhe, den 7. November 2025

Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: ....

2. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 6:

(a) Berechnen Sie $(f^T g)'$ und $(f \circ g)'$ für

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ 2x_2^3 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \sin(x_1) \\ \cos(x_1) + x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie $(f \circ g)'$ zunächst direkt und dann mit Hilfe der Kettenregel für

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cosh(x_2) \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7: (K)

(a) Berechnen Sie die Gradienten der Funktion F, die gegeben ist durch

$$F : \mathbb{R}^2_{\geq 1} \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(t^2 y \pi)}{t} \, \mathrm{d}t \,.$$

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) und der Kettenregel den Wert $f'(2)$ der Funktion

$$f(s) = \int_1^{\sqrt{s}} \frac{\cos(t^2 s^2 \pi)}{t} \, \mathrm{d}t, \qquad s \geq 1 \,.$$

Aufgabe 8:

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion G, die gegeben ist durch

$$G : \mathbb{R}^3_{>0} \to \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = \int_z^y \frac{\sin(xt)}{t} \, \mathrm{d}t \,.$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil (a) und der Kettenregel die Ableitung von

$$g(s) = \int_{1/s}^{s^2} \frac{\sin(st)}{t} \, \mathrm{d}t, \qquad s > 0 \,.$$

Aufgabe 9: (K)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x_2(\mathrm{e}^{x_1} - x_2^2)$.

(a) Zeichnen Sie die Menge aller Nullstellen von f, die gegeben ist durch $M_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die Linearisierung von f im Punkt $(0,1)^\top$, sowie das Taylorpolynom zweiten Grades von f im Punkt $(0,1)^\top$, das gegeben ist durch

$$T_2^f\left((x_1,x_2);(0,1)\right) = f(0,1) + f'(0,1)\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}^\top H_f(0,1)\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10:

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind:

(i) $2x\cos y - x^2 \sin y\, y' = 0$,

(ii) $\mathrm{e}^x\, y - (\mathrm{e}^x + 2y)y' = 0$,

(b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(2x\sin(xy) + x^2 y\cos(xy)) + (x^3\cos(xy))y' = 0$$

exakt ist. Vereinfachen Sie die Differentialgleichung, in dem Sie sie mit $\frac{1}{x}$ durchmultiplizieren. Ist die resultierende Differentialgleichung immer noch exakt?

Abgabe bis Montag, den 17. November 2025, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung*.