

2. Übungsblatt Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 6:

(a) Berechnen Sie $(f^T g)'$ und $(f \circ g)'$ für

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ 2x_2^3 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \sin(x_1) \\ \cos(x_1) + x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie $(f \circ g)'$ zunächst direkt und dann mit Hilfe der Kettenregel für

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cosh(x_2) \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösung 6:

(a) Die Ableitungen ergeben sich zu

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & 6x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g'(x) = \begin{pmatrix} x_2 \cos(x_1) & \sin(x_1) \\ -\sin(x_1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel bekommen wir

$$\begin{aligned} (f^T g)'(x) &= f(x)^T g'(x) + g(x)^T f'(x) \\ &= (x_1 x_2 \cos(x_1) + x_2^3 \cos(x_1) - 2x_2^3 \sin(x_1) + x_2 \sin(x_1), \\ &\quad 8x_2^3 + 3x_2^2 \sin(x_1) + x_1 \sin(x_1) + 6x_2^2 \cos(x_1)). \end{aligned}$$

Für die Verkettung nehmen wir die Kettenregel und erhalten

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cos(x_1) + 2x_2 \\ 0 & 6(\cos(x_1) + x_2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \cos(x_1) & \sin(x_1) \\ -\sin(x_1) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \cos(x_1) - 2 \sin(x_1)(\cos(x_1) + x_2) & \sin(x_1) + 2(\cos(x_1) + x_2) \\ -6 \sin(x_1)(\cos(x_1) + x_2)^2 & 6(\cos(x_1) + x_2)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Zur direkten Berechnung stellen wir $(f \circ g)$ auf und leiten dann ab:

$$f(g(x)) = \begin{pmatrix} x_1 \cosh(x_2) + 1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (f \circ g)'(x) = \begin{pmatrix} \cosh(x_2) & x_1 \sinh(x_2) \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Kettenregel benötigen wir die Ableitung der einzelnen Funktionen:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}, \quad g'(x) = \begin{pmatrix} \cosh(x_2) & x_1 \sinh(x_2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir die Kettenregel benutzen und erhalten dasselbe Ergebnis wie oben:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(x_2) & x_1 \sinh(x_2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x_2) & x_1 \sinh(x_2) \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: (K)

(a) Berechnen Sie die Gradienten der Funktion F , die gegeben ist durch

$$F : \mathbb{R}_{\geq 1}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(t^2 y \pi)}{t} dt.$$

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) und der Kettenregel den Wert $f'(2)$ der Funktion

$$f(s) = \int_1^{\sqrt{s}} \frac{\cos(t^2 s^2 \pi)}{t} dt, \quad s \geq 1.$$

Lösung 7:

(a) Um die partielle Ableitung nach x zu berechnen, definieren wir für beliebiges, aber festes y die Funktion

$$f(z) := \int_1^z \frac{\cos(t^2 y \pi)}{t} dt, \quad z \geq 1.$$

Ihre Ableitung an der Stelle z ist nach dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich $\frac{1}{z} \cos(z^2 y \pi)$, sodass nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = f'(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}^2 y \pi)}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \cos(xy \pi)$$

ist.

Für die Berechnung der partiellen Ableitung von F nach y vertauschen wir die Reihenfolge von Differentiation und Integration. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos(t^2 y \pi)}{t} \right) dt = \int_1^{\sqrt{x}} -\pi t \sin(t^2 y \pi) dt \\ &= \left[\frac{1}{2y} \cos(t^2 y \pi) \right]_1^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2y} (\cos(xy \pi) - \cos(y \pi)). \end{aligned}$$

(b) Es ist $f(s) = (F \circ \phi)(s)$ mit $\phi(s) = (s, s^2)^\top$ und $\phi'(s) = (1, 2s)^\top$. Also ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(s) &= (F \circ \phi)'(s) = F'(\phi(s)) \phi'(s) \\ &= \left(\frac{1}{2s} \cos(s^3 \pi), \frac{1}{2s^2} (\cos(s^3 \pi) - \cos(s^2 \pi)) \right) (1, 2s)^\top = \frac{3}{2s} \cos(s^3 \pi) - \frac{1}{s} \cos(s^2 \pi) \end{aligned}$$

und damit $f'(2) = \frac{3}{4} \cos(8\pi) - \frac{1}{2} \cos(4\pi) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 8:

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion G , die gegeben ist durch

$$G: \mathbb{R}_{>0}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = \int_z^y \frac{\sin(xt)}{t} dt.$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil (a) und der Kettenregel die Ableitung von

$$g(s) = \int_{1/s}^{s^2} \frac{\sin(st)}{t} dt, \quad s > 0.$$

Lösung 8:

(a) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für die partiellen Ableitungen nach y bzw. z

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\sin(xy)}{y}, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{\sin(xz)}{z}.$$

Für die partielle Ableitung nach x kann man Differentiation und Integration vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) &= \int_z^y \cos(xt) dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x} \right]_z^y \\ &= \frac{\sin(xy) - \sin(xz)}{x}. \end{aligned}$$

Damit ist der Gradient

$$\nabla G(x, y, z) = \left(\frac{\sin(xy) - \sin(xz)}{x}, \frac{\sin(xy)}{y}, -\frac{\sin(xz)}{z} \right)^\top.$$

(b) Es gilt

$$g(s) = G(s, s^2, 1/s)$$

und daher nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(s) &= G'(s, s^2, 1/s) (1, 2s, -1/s^2)^\top \\ &= \frac{\sin(s^3) - \sin(1)}{s} + \frac{2\sin(s^3)}{s} + \frac{\sin(1)}{s} = \frac{3\sin(s^3)}{s}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9: (K)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x_2(e^{x_1} - x_2^2)$.

- (a) Zeichnen Sie die Menge aller Nullstellen von f , die gegeben ist durch $M_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}$.
 (b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .
 (c) Bestimmen Sie die Linearisierung von f im Punkt $(0, 1)^\top$, sowie das Taylorpolynom zweiten Grades von f im Punkt $(0, 1)^\top$, das gegeben ist durch

$$T_2^f((x_1, x_2); (0, 1)) = f(0, 1) + f'(0, 1) \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}^\top H_f(0, 1) \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

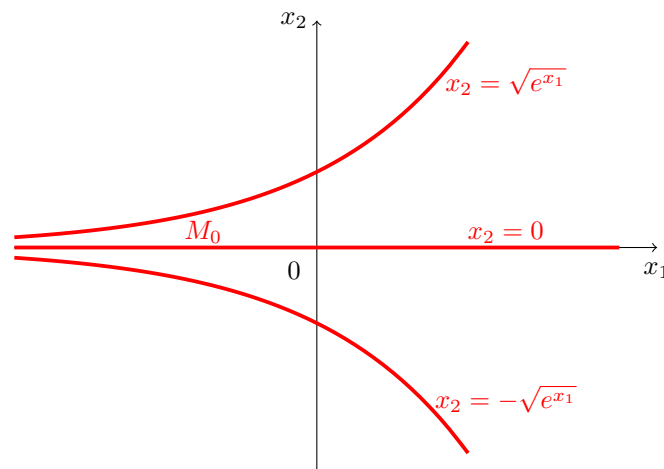
Lösung 9: (a) Wir bestimmen zunächst die Menge aller Nullstellen. Sei hierzu $x = (x_1, x_2)^\top \in M$ mit $f(x) = 0$, d.h.

$$0 = f(x) = x_2(e^{x_1} - x_2^2).$$

$f(x)$ ist genau dann null, wenn der erste oder der zweite Faktor gleich null ist, d.h. wenn $x_2 = 0$ oder wenn $e^{x_1} = x_2^2$. Letzteres ist erfüllt, wenn $x_2 = +\sqrt{e^{x_1}}$ oder $x_2 = -\sqrt{e^{x_1}}$. Damit erhalten wir

$$M_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \{-\sqrt{e^{x_1}}, 0, +\sqrt{e^{x_1}}\} \right\}.$$

Skizze der Menge:



(b) Differenzieren ergibt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1} \\ e^{x_1} - 3x_2^2 \end{pmatrix}, \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1} & e^{x_1} \\ e^{x_1} & -6x_2 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt $(\nabla f(0, 1))^\top = f'(0, 1) = (1, -2)$ und $H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Die Linearisierung l von f im Punkt $(0, 1)^\top$ ist daher gegeben durch

$$l(x) = f(0, 1) + (\nabla f(0, 1))^\top \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = 0 + (1, -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = x_1 - 2(x_2 - 1).$$

Für das Taylorpolynom zweiten Grades von f erhalten wir

$$\begin{aligned} T_2^f((x); (1, 1)) &= 0 + (1, -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 - 2(x_2 - 1) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 - 6(x_2 - 1) \end{pmatrix} \\ &= x_1 - 2x_2 + 2 + \frac{1}{2} [x_1^2 + x_1x_2 - x_1 + x_1x_2 - 6x_2^2 + 6x_2 - x_1 + 6x_2 - 6] \\ &= x_1 - 2x_2 + 2 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_1x_2 - x_1 - 3x_2^2 + 6x_2 - 3 \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 - 3x_2^2 + x_1x_2 + 4x_2 - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 10:

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind:

(i) $2x \cos y - x^2 \sin y y' = 0,$

(ii) $e^x y - (e^x + 2y)y' = 0,$

(b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)) + (x^3 \cos(xy))y' = 0$$

exakt ist. Vereinfachen Sie die Differentialgleichung, in dem Sie sie mit $\frac{1}{x}$ durchmultiplizieren. Ist die resultierende Differentialgleichung immer noch exakt?

Lösung 10:

(a) (i) Es ist $p(x, y) = 2x \cos(x)$ und $q(x, y) = -x^2 \sin(y)$. Wir berechnen

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = -2x \sin(y), \quad \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = -2x \sin(y).$$

Also ist die Differentialgleichung exakt.

(ii) Es ist $p(x, y) = e^x y$ und $q(x, y) = -(e^x + 2y)$. Wir berechnen

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = e^x, \quad \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = -e^x,$$

also ist die Differentialgleichung nicht exakt.

(b) Es ist

$$p(x, y) = 2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy), \quad q(x, y) = x^3 \cos(xy).$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = 2x^2 \cos(xy) + x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy) = 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy)$$

und

$$\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy).$$

Also ist die Differentialgleichung exakt. Multiplikation mit $\frac{1}{x}$ liefert die Differentialgleichung

$$2 \sin(xy) + xy \cos(xy) + (x^2 \cos(xy))y' = 0.$$

Nun ist

$$p(x, y) = 2 \sin(xy) + xy \cos(xy), \quad q(x, y) = x^2 \cos(xy).$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = 2x \cos(xy) + x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) = 3x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

und

$$\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy).$$

Also ist die Differentialgleichung nicht exakt.