

3. Übungsblatt

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 11: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x(y(x))^2 + y(x) - xy'(x) = 0, \quad y(1) = 2.$$

Geben Sie dabei die Lösung in impliziter und expliziter Form an.

Hinweis: Es gibt einen Eulerschen Multiplikator, der nur von y abhängt.

Lösung 11: Wir definieren zunächst

$$p(x, y) = xy^2 + y \quad \text{und} \quad q(x, y) = -x.$$

Die Differentialgleichung ist nicht exakt, wie man leicht nachrechnet. Wir bestimmen den Eulerschen Multiplikator $\Lambda = \Lambda(y)$ und definieren dazu

$$\tilde{p}(x, y) = \Lambda(y)(xy^2 + y), \quad \tilde{q}(x, y) = -\Lambda(y)x.$$

und berechnen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}(x, y) = \Lambda'(y)(xy^2 + y) + \Lambda(y)(2xy + 1), \quad \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x}(x, y) = -\Lambda(y).$$

Damit Λ Eulerschen Multiplikator ist, muss die Integrabilitätsbedingung erfüllt sein, d.h. es muss gelten:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}(x, y) = \Lambda'(y)(xy^2 + y) + \Lambda(y)(2xy + 1) \stackrel{!}{=} -\Lambda(y) = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x}(x, y).$$

Durch Sortieren der Terme erhalten wir

$$\Lambda'(y)y(xy + 1) = \Lambda(y)(-2)(xy + 1).$$

Division durch $xy + 1 \neq 0$ und y liefert

$$\Lambda'(y) = -\frac{2}{y}\Lambda(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Lambda'(y)}{\Lambda(y)} = -\frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln |\Lambda(y)| = \ln y^{-2} + C.$$

Wir wählen $C = 0$ (da wir nur an einer Stammfunktion bzw. einem Eulerschen Multiplikator interessiert sind) und erhalten somit $\Lambda(y) = y^{-2}$. Damit ergibt sich die neue Differentialgleichung durch Multiplikation der alten mit $\Lambda(x, y)$ zu

$$x + \frac{1}{y(x)} - \frac{x}{y^2(x)}y'(x) = 0.$$

Das Potential f erhält man nun aus den beiden Bedingungen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x + \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Integration der ersten Bedingung liefert

$$f(x, y) = \int \left(x + \frac{1}{y} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + c(y),$$

partielle Differentiation nach y ergibt

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + c'(y).$$

Gleichsetzen mit der zweiten Bedingung liefert

$$-\frac{x}{y^2} + c'(y) \stackrel{!}{=} -\frac{x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad c'(y) = 0, \quad \text{also} \quad c(y) = c \in \mathbb{R}.$$

Wir wählen $c = 0$ und erhalten die Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form

$$f(x, y(x)) = C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y(x)} = C,$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Der Anfangswert $y(1) = 2$ liefert mit

$$f(1, y(1)) = f(1, 2) = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

die Konstante $C = 1$ und damit die spezielle Lösung

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y(x)} = 1$$

in impliziter Form. Die explizite Form der Lösung erhält man durch Auflösen dieser Gleichung nach $y(x)$ als

$$y(x) = \frac{2x}{2 - x^2}.$$

Aufgabe 12: Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$e^{-x^2} + \left(\frac{1}{y(x)} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1 \right) y'(x) = 0$$

in impliziter Form.

Hinweis: Es gibt einen Eulerschen Multiplikator, der nur von y abhängt.

Lösung 12:

Wir definieren zunächst

$$p(x, y) = e^{-x^2} \quad \text{und} \quad q(x, y) = \frac{1}{y} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1.$$

Die Differentialgleichung ist nicht exakt, wie man leicht nachrechnet. Wir bestimmen den Eulerschen Multiplikator $\Lambda = \Lambda(y)$ und definieren dazu

$$\tilde{p}(x, y) = e^{-x^2} \Lambda(y), \quad \tilde{q}(x, y) = \left(\frac{1}{y} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1 \right) \Lambda(y).$$

Die Integrabilitätsbedingung lautet somit

$$\frac{\partial \tilde{p}(x, y)}{\partial y} = p(x, y) \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial y} + \Lambda(y) \underbrace{\frac{\partial p(x, y)}{\partial y}}_{=0} \stackrel{!}{=} q(x, y) \underbrace{\frac{\partial \Lambda(y)}{\partial x}}_{=0} + \Lambda(y) \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{q}(x, y)}{\partial x}.$$

Wegen dem Hauptsatz der Integralrechnung ist

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = \frac{1}{y} e^{-x^2},$$

also finden wir

$$e^{-x^2} \Lambda'(y) = \frac{\Lambda(y)}{y} e^{-x^2}.$$

Die Differentialgleichung für Λ ist also

$$\frac{\Lambda'(y)}{\Lambda(y)} = \frac{1}{y}.$$

Wie wir in HMII gelernt haben hat die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung die Form $\Lambda(y) = \alpha y$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir wählen einfach mal $\alpha = 1$ (alle anderen $\alpha \neq 0$ funktionieren auch). Dann ist also die Differentialgleichung

$$y(x) e^{-x^2} + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt + y(x) \right) y'(x) = 0$$

exakt und wir müssen eine Stammfunktion (Potential) $f(x, y)$ finden mit

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y e^{-x^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \int_0^x e^{-t^2} dt + y.$$

Wenn wir die erste Gleichung bzgl. x integrieren finden wir

$$f(x, y) = y \int_0^x e^{-t^2} dt + c(y)$$

mit einer Integrationskonstanten $c(y)$, die im Allgemeinen von y abhängt. Partielles Ableiten nach y liefert

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \int_0^x e^{-t^2} dt + c'(y) \stackrel{!}{=} \tilde{q}(x, y) = \int_0^x e^{-t^2} dt + y.$$

Also ist $c'(y) = y$, oder $c(y) = y^2/2 + \alpha$ (wir wählen wieder $\alpha = 0$), also

$$f(x, y) = y \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{y^2}{2}.$$

Alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung sind also implizit durch die Lösungen der Gleichung

$$f(x, y(x)) = C, \quad \text{d.h.} \quad y(x) \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{(y(x))^2}{2} = C$$

gegeben, mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13: (K)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$1 + xy(x) + x^2 y'(x) = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1,$$

in expliziter Form.

Hinweis: Es gibt einen Eulerschen Multiplikator, der nur vom Produkt xy abhängt.

Lösung 13: Wir definieren zunächst

$$p(x, y) = 1 + xy \quad \text{und} \quad q(x, y) = x^2.$$

Die Differentialgleichung ist nicht exakt, wie man leicht nachrechnet. Wir bestimmen den Eulerschen Multiplikator $\Lambda(x, y) = \Lambda(xy)$ und definieren dazu

$$\tilde{p}(x, y) = (1 + xy) \Lambda(xy), \quad \tilde{q}(x, y) = x^2 \Lambda(xy).$$

Die Integrabilitätsbedingung lautet somit

$$x \Lambda(xy) + x(1 + xy) \Lambda'(xy) = \frac{\partial \tilde{p}(x, y)}{\partial y} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \tilde{q}(x, y)}{\partial x} = 2x \Lambda xy + x^2 y \Lambda'(xy).$$

Dies liefert

$$x \Lambda(xy) = x \Lambda'(xy) \quad \xrightarrow{t=xy} \quad \Lambda(t) = \Lambda'(t).$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist $\Lambda(t) = e^t$, also erhalten wir $\Lambda(x, y) = e^{xy}$. Somit gilt

$$\tilde{p}(x, y) = (1 + xy) e^{xy}, \quad \tilde{q}(x, y) = x^2 e^{xy}.$$

Wir integrieren \tilde{p} bezüglich x und erhalten

$$f(x, y) = \int \tilde{p}(x, y) dx = x e^{xy} + c(y).$$

Damit $\nabla f = (\tilde{p}, \tilde{q})^\top$ gilt, ist noch die Forderung

$$x^2 e^{xy} + c'(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \tilde{q}(x, y) = x^2 e^{xy}$$

zu erfüllen. Es muss also

$$c'(y) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad c(y) = \hat{c}$$

gelten. Wir wählen $c(y) = 0$. Lösungen der Differentialgleichung sind somit impliziert durch die Formel $f(x, y(x)) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$ gegeben, also

$$x e^{xy(x)} = C.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ liefert $C = e$. Daher ist

$$x e^{xy(x)} = e, \quad \text{d.h.} \quad y(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x}, \quad x > 0.$$

Aufgabe 14: (K)

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$x e^{xy} - y + 1 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 1)$ eine Funktion $y = \varphi(x)$ mit der Eigenschaft $\varphi(0) = 1$ implizit definiert ist. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades dieser Funktion φ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung 14: Wir verwenden den Satz über implizite Funktionen.

Die Funktion $f(x, y) := x e^{xy} - y + 1$ ist unendlich oft stetig differenzierbar.

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^{xy} - 1, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -1 \neq 0.$$

Somit sind alle Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen in der Version im Skript mit $k = \infty$ erfüllt. In einem Intervall I um $x = 0$ existiert also eine eindeutige Funktion φ mit $\varphi(0) = 1$ und

$$x e^{x\varphi(x)} - \varphi(x) + 1 = 0, \quad x \in I.$$

Diese ist überdies unendlich oft differenzierbar.

Einmaliges bzw. zweimaliges Ableiten der letzten Gleichung nach x liefert

$$e^{x\varphi(x)} (1 + x\varphi(x) + x^2\varphi'(x)) - \varphi'(x) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} e^{x\varphi(x)} (\varphi(x) + 3x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x)) \\ + (\varphi(x) + x\varphi'(x)) e^{x\varphi(x)} (1 + x\varphi(x) + x^2\varphi'(x)) - \varphi''(x) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion φ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ hat die Gestalt

$$T_2(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Nach Aufgabenstellung ist $\varphi(x_0) = 1$. Durch Einsetzen von $x_0 = 0$ in (1) erhalten wir $\varphi'(x_0) = 1$ und durch Einsetzen von $x_0 = 0$ in (2) erhalten wir desweiteren $\varphi''(x_0) = 2$. Also folgt

$$T_2(x) = 1 + x + x^2.$$

Aufgabe 15: Weisen Sie nach, dass sich die Gleichung

$$e^{x_2} (x_1^2 + x_2^2) - \sqrt{1 + x_2^2} = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(1, 0)^\top$ lokal nach x_2 auflösen lässt, d.h. $x_2 = \varphi(x_1)$ mit einer geeigneten Funktion φ . Leiten Sie anschließend implizit nach x_1 ab und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente T an φ im Punkt $x_1 = 1$.

Lösung 15:

Setze zunächst $f(x_1, x_2) = e^{x_2} (x_1^2 + x_2^2) - \sqrt{1 + x_2^2}$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_2} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_2) - \frac{x_2}{\sqrt{1 + x_2^2}}.$$

Damit folgt $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 0) = 1 \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 1.30) lässt sich die Kurve also in einer Umgebung von $(1, 0)^\top$ durch $x_2 = \varphi(x_1)$ darstellen.

Die Tangente an φ im Punkt $(1, 0)^\top$ ist gegeben durch die Gleichung

$$T(x_1) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x_1 - 1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Um $\varphi'(1)$ zu berechnen, leiten wir die Gleichung

$$e^{\varphi(x_1)} (x_1^2 + \varphi(x_1)^2) - \sqrt{1 + \varphi(x_1)^2} = 0$$

nach x_1 ab und erhalten unter Beachtung von Produkt- und Kettenregel

$$\varphi'(x_1)e^{\varphi(x_1)} (x_1^2 + \varphi(x_1)^2) + e^{\varphi(x_1)} (2x_1 + 2\varphi(x_1)\varphi'(x_1)) - \frac{\varphi(x_1)\varphi'(x_1)}{\sqrt{1 + \varphi(x_1)^2}} = 0.$$

Einsetzen von $x = 1$ und auflösen nach $\varphi'(1)$ liefert $\varphi'(1) = -2$, da $\varphi(1) = 0$. Damit folgt für die Gleichung der Tangente

$$T(x_1) = 0 - 2(x_1 - 1) = -2x_1 + 2, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$