

4. Übungsblatt Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 16: Berechnen Sie alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2$,

(b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = -\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$.

Handelt es sich dabei um lokale Minima oder Maxima?

Lösung 16:

- (a) Ein innerer Punkt der Definitionsmenge von f kann höchstens dann eine Extremstelle sein, wenn der Gradient von f in diesem Punkt verschwindet. Wir berechnen

$$\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x(4e^{x^2+y^2} - 1) \\ y(4e^{x^2+y^2} - 1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen $2x(4e^{x^2+y^2} - 1) = 0$ und $2y(4e^{x^2+y^2} - 1) = 0$ sind nur dann erfüllt, falls $x = 0$ und $y = 0$ gilt. Die Bedingung $\nabla f(x, y) = (0, 0)^\top$ liefert daher als einzigen kritischen Punkt $(x_0, y_0)^\top = (0, 0)^\top$.

Um zu überprüfen, ob es sich bei einem kritischen Punkt um eine Minimal- bzw. Maximalstelle handelt, kann man die Hesse-Matrix von f an diesem Punkt auf positive bzw. negative Definitheit untersuchen. Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 4e^{x^2+y^2} - 1 + 8x^2e^{x^2+y^2} & 8xye^{x^2+y^2} \\ 8xye^{x^2+y^2} & 4e^{x^2+y^2} - 1 + 8y^2e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv definit, da der doppelte Eigenwert $\lambda = 6 > 0$ vorliegt. Damit besitzt f in $(x_0, y_0)^\top = (0, 0)^\top$ ein lokales Minimum.

- (b) Wir berechnen den Gradienten und schauen an welcher Stelle dieser verschwindet,

$$\nabla f(x, y) = \frac{-2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen direkt, dass die Bedingung $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)^\top$ als einzigen kritischen Punkt $(x_0, y_0, z_0)^\top = (0, 0, 0)^\top$ liefert. Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x, y, z) = \frac{-2}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} -x^2 + y^2 + z^2 + 1 & -2xy & -2xz \\ -2xy & x^2 - y^2 + z^2 + 1 & -2yz \\ -2xz & -2yz & x^2 + y^2 - z^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ definit, da der dreifache Eigenwert $\lambda = -2 < 0$ vorliegt. Damit besitzt f in $(x_0, y_0, z_0)^\top = (0, 0, 0)^\top$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 17: (K)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^3 - 9y.$$

- (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und Extremwerte von f . Begründen Sie dabei, dass es sich tatsächlich um solche handelt und dass es keine weiteren gibt.

(b) Hat f auch globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 17:

(a) Die Menge \mathbb{R}^2 ist offen. Somit ist jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt. Ein innerer Punkt der Definitionsmenge von f kann höchstens dann eine Extremstelle sein, wenn der Gradient von f in diesem Punkt verschwindet. Nun gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x \\ 3y^2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x(x-2) \\ 3(y^2-3) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die obere dieser beiden Gleichungen ist äquivalent zu: $x = 0$ oder $x = 2$, die untere zu: $y = -\sqrt{3}$ oder $y = \sqrt{3}$. An einer Extremalstelle müssen beide Aussagen gelten, womit wir die vier kritischen Punkte

$$(0, -\sqrt{3})^\top, \quad (0, \sqrt{3})^\top, \quad (2, -\sqrt{3})^\top, \quad (2, \sqrt{3})^\top$$

identifizieren. Um zu überprüfen, ob es sich bei einem solchen um eine Minimal- bzw. Maximalstelle handelt, kann man die Hesse-Matrix von f an diesem Punkt auf positive bzw. negative Definitheit untersuchen. Sie lautet

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x-1) & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} H_f(0, -\sqrt{3}) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{3} \end{pmatrix}, & H_f(0, \sqrt{3}) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ H_f(2, -\sqrt{3}) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{3} \end{pmatrix}, & H_f(2, \sqrt{3}) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix $H_f(0, -\sqrt{3})$ ist negativ definit, da die Eigenwerte $\lambda_1 = -6$ und $\lambda_2 = -6\sqrt{3}$ beide negativ sind. Somit handelt es sich bei $(0, -\sqrt{3})^\top$ um eine lokale Maximalstelle mit Wert $f(0, -\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$.

Die Matrix $H_f(2, \sqrt{3})$ ist positiv definit, da die Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 6\sqrt{3}$ beide positiv sind. Somit handelt es sich bei $(2, \sqrt{3})^\top$ um eine lokale Minimalstelle mit Wert $f(2, \sqrt{3}) = -4 - 6\sqrt{3}$.

Die Matrizen $H_f(0, \sqrt{3})$ und $H_f(2, -\sqrt{3})$ besitzen sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert und sind somit indefinit. Bei $(0, \sqrt{3})^\top$ und $(2, -\sqrt{3})^\top$ liegen keine Extremstellen vor.

(b) Die Funktion f hat weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum. Um dies zu beweisen, definieren wir die Folgen $a_n := (0, n)^\top$ und $b_n := (0, -n)^\top$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge

$$f(a_n) = n^3 - 9n = n^3 \left(1 - \frac{9}{n^2}\right)$$

nach oben und die Folge

$$f(b_n) = ((-n)^3 - 9(-n)) = -n^3 \left(1 - \frac{9}{n^2}\right)$$

nach unten unbeschränkt. Damit ist also nachgewiesen, dass f sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist und folglich keine globalen Extremstellen aufweist.

Aufgabe 18: In der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 - x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0\}$$

gibt es genau einen Punkt, der den geringsten Abstand vom Ursprung hat. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Lösung 18: Wir minimieren die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = xy^2 - x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0.$$

Die Lagrangefunktion lautet $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy^2 - x^2 + 2x - y^2 - 1)$. Mögliche Punkte für das Minimum (kritische Punkte) sind alle Punkte mit $\nabla g(x, y) = 0$ oder $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$.

$\nabla g(x, y) = 0$: Wir berechnen

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 2x + 2 \\ 2xy - 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $2(x-1)y = 0$, also $y = 0$ oder $x = 1$. Aus der ersten Gleichung folgt damit $x = 1$ bzw. $y = 0$. Da der Punkt $(x, y) = (1, 0)$ in der Menge M liegt, handelt es sich hierbei um einen kritischen Punkt.

$\nabla L(x, y, \lambda) = 0$: Wir berechnen

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + \lambda(y^2 - 2x + 2) \\ 2y + \lambda(2xy - 2y) \\ xy^2 - x^2 + 2x - y^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $2y(1 + \lambda(x-1)) = 0$, also $y = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{x-1}$ mit $x \neq 1$.

Fall 1: $y = 0$. Die dritte Gleichung liefert $-x^2 + 2x - 1 = 0$, also $-(x-1)^2 = 0$, d.h. $x = 1$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir $2 = 0$, also einen Widerspruch. Dieser Fall führt also nicht zu einem kritischen Punkt.

Fall 2: $\lambda = -\frac{1}{x-1}$ mit $x \neq 1$. Die erste Gleichung liefert dann

$$2x - \frac{1}{x-1}(y^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) = y^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 = y^2 + 2 \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 - 2.$$

Dies setzen wir in die dritte Gleichung ein und erhalten

$$xy^2 - x^2 + 2x - y^2 - 1 = x(2x^2 - 2) - x^2 + 2x - (2x^2 - 2) - 1 = 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Wir sehen, dass $x = 1$ eine Lösung ist und können eine Polynomdivision mit $(x-1)$ durchführen. Diese führt auf $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(2x^2 - x - 1) = (x-1)(x-1)(2x+1) = 0$. Wir erhalten also die beiden Lösungen $x = 1$ und $x = -1/2$. Jedoch haben wir $x = 1$ schon in Fall 1 ausgeschlossen. Für $x = -1/2$ erhalten wir mit $y^2 = 2x^2 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$ einen Widerspruch, also keinen kritischen Punkt.

Insgesamt ist der einzige kritische Punkt $(x, y) = (1, 0)$. Dies ist daher der gesuchte Punkt der Menge M , der den geringsten Abstand vom Ursprung hat.

Aufgabe 19: Ermitteln Sie die Extremstellen und Extremwerte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Lösung 19: Mit dem Ziel, die Lagrangesche Multiplikatorenregel anwenden zu können, berechnen wir zunächst die Gradienten der beiden Funktionen g_1 und g_2 , die die Randbedingungen definieren:

$$\nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Die Lagrangesche Multiplikatorenregel lässt sich an allen Punkten $(x, y, z)^\top$ anwenden, an denen $\nabla g_1(x, y, z)$ und $\nabla g_2(x, y, z)$ linear unabhängig sind. Es sind dies die Punkte $(x, y, z)^\top$, an denen nicht $x = y = z$ gilt, also zumindest zwei der drei Koordinaten unterschiedliche Werte aufweisen.

Der einzige Punkt, dessen drei Koordinaten gleich sind und gleichzeitig die erste Nebenbedingung erfüllen, ist $(0, 0, 0)^\top$. Dieser erfüllt jedoch nicht die zweite Nebenbedingung, sodass wir die Lagrangesche Multiplikatorenregel in diesem Fall an allen zugelassenen Punkten anwenden können.

Die Lagrangefunktion für diese Extremwertaufgabe hat die Form

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) = 5x + y - 3z + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Laut der Lagrangeschen Multiplikatorenregel gibt es zu jeder Extremstelle $(x, y, z)^\top$ von f unter den gegebenen Nebenbedingungen Zahlen λ_1 und λ_2 (Lagrangesche Multiplikatoren) mit der Eigenschaft

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0)^\top.$$

Dies führt auf die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \quad (1)$$

$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \quad (2)$$

$$-3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0 \quad (3)$$

$$x + y + z = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad (5)$$

die wir im Folgenden nach den fünf Unbekannten $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ auflösen.

Zunächst beobachtet man, dass $\lambda_2 \neq 0$ sein muss, da sonst die Bedingungen (1)–(3) unabhängig von λ_1 verletzt wären. Durch einfaches Umstellen dieser Gleichungen, können wir also x, y, z in Abhängigkeit von λ_1 und λ_2 ausdrücken und erhalten

$$x = \frac{-5 - \lambda_1}{2\lambda_2}, \quad y = \frac{-1 - \lambda_1}{2\lambda_2}, \quad z = \frac{3 - \lambda_1}{2\lambda_2}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (4) ein und multiplizieren mit $2\lambda_2$ durch, ergibt sich

$$\lambda_1 = -1, \quad \text{also} \quad x = -\frac{2}{\lambda_2}, \quad y = 0, \quad z = \frac{2}{\lambda_2}.$$

Dies setzen wir anschließend in (5) ein und erhalten nach Auflösen

$$|\lambda_2| = 2\sqrt{2}, \quad \text{also} \quad \lambda_2 = -2\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = 2\sqrt{2}.$$

Die Probe zeigt, dass beide Werte für λ_2 zusammen mit den bisherigen Ergebnissen auf Lösungstupel $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ der Gleichungen (1)–(5) führen, nämlich

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -2\sqrt{2} \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 2\sqrt{2} \right).$$

Dazu gehören die Funktionswerte

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} \quad \text{bzw.} \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}.$$

Die Menge

$$M := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad g_2(x, y, z) = 0\}$$

der erlaubten Punkte, auf die wir f einschränken können, ist als Schnittmenge zweier abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen und aufgrund der zweiten Nebenbedingung auch beschränkt also kompakt. Da f stetig ist, existiert zwingend ein Maximum und ein Minimum. Diese können aufgrund der Lagrangeschen Multiplikatorenregel höchstens an den beiden oben errechneten Punkten liegen, womit diese als Maximalstelle bzw. Minimalstelle erkannt sind.

Aufgabe 20: (K)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel Minimum und Maximum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2$$

auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $z = x$.

Lösung 20: Bestimmt werden sollen die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2$ unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{und} \quad g_2(x, y, z) = x - z.$$

Um die Lagrangesche Multiplikatorenregel anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte die Restriktionsgradienten ∇g_i linear unabhängig sein, d.h.

$$c_1 \nabla g_1(x, y, z) + c_2 \nabla g_2(x, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Wir betrachten das LGS

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2y & 0 \\ 2z & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Nebenbedingung $x = z$ ergibt es sich

$$\begin{aligned} 2xc_1 + c_2 &= 0, \\ 2yc_1 + 0 \cdot c_2 &= 0, \\ 2xc_1 - c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Addieren der ersten und zweiten Gleichung liefert $4xc_1 = 0$. Das LGS besitzt also nur für den Fall $x = 0, y = 0, z = 0$ nichttriviale Lösungen (d.h. $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$), was der ersten Nebenbedingung widerspricht. Damit gilt für alle Extremalkandidaten, dass ∇g_1 und ∇g_2 linear unabhängig sind.

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z),$$

und die notwendige Bedingung für Extrema lautet $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0, 0)^\top$. Diese führt auf die Gleichungen

$$2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \tag{1}$$

$$2\lambda_1 y = 0 \tag{2}$$

$$2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{4}$$

$$x - z = 0, \tag{5}$$

die wir nach den fünf Unbekannten $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ auflösen. Aus der Gleichung (2) folgt entweder $\lambda_1 = 0$ oder $y = 0$.

Fall $\lambda_1 = 0$: Die Gleichung (3) liefert dann $\lambda_2 = 0$ und aus Gleichung (1) erhält man $x = 0$. Eingesetzt in (5) ergibt sich $z = 0$ und Gleichung (4) liefert $y = \pm 1$. Somit ergeben sich die zwei kritischen Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fall $y = 0$: Mit $x = z$ (Gleichung (5)) folgt aus der 4. Gleichung $2x^2 = 1$, also $x = z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es ergeben sich somit die zwei kritischen Punkte

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Funktion f ist stetig und die Menge die sich aus den Nebenbedingungen g_1 und g_2 ergibt ist eine Ellipse und damit kompakt. Es werden also Maximum und Minimum von f auf dieser Menge angenommen.

Wegen $f(P_{1,2}) = 0$ und $f(P_{3,4}) = \frac{1}{2}$ liegen die Minima in den Punkten P_1 und P_2 und die Maxima in den Punkten P_3 und P_4 .