Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

PD Dr. F. Hettlich
Dr. L. Fink

(K) A21	(K) A24	Σ

Abgabegruppe

Karlsruhe, den 28. November 2025

Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: ....

5. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 21: (K)

Gegeben seien die Funktionen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$ und $h(x) = \frac{1}{6}(5x + e^{-x})$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass die Funktionen g und h auf dem Intervall $I = [0,1]$ kontrahierend sind. Bestimmen Sie die jeweilige Kontraktionskonstante κ_g bzw. κ_h und zeigen Sie, dass die Fixpunktiterationen zur Lösung von $g(x) = x$ bzw. $h(x) = x$ gegen denselben Fixpunkt konvergieren.

(b) Formulieren Sie weiter ein Newtonverfahren, um diesen Fixpunkt zu bestimmen, und führen Sie für jedes der drei Verfahren (Fixpunktiteration mit g, mit h und Newtonverfahren) drei Iterationsschritte mit Startwert $x_0 = 1$ aus, um die Verfahren zu vergleichen.

Aufgabe 22: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^3 - x_1^3 \\ x_1^3 + x_2^3 - 4 \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung von $f(x_1, x_2) = (0,0)^\top$ und führen Sie zwei Iterationsschritte des Newtonverfahrens mit Startwert $(1,1)^\top$ aus.

Hinweis: Die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$ ist $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Aufgabe 23: Skizzieren Sie den Integrationsbereich D und berechnen Sie die Gebietsintegrale

(i) $\iint_D (x + 3y^2)\,\mathrm{d}(x,y), \quad D = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\right\},$

(ii) $\iint_D 2y\,\mathrm{d}(x,y), \quad D = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : -\pi/2 \le x \le \pi/2,\ \cos x - 2 \le y \le \cos x + 2\right\},$

(iii) $\iint_D (xy + 1)\,\mathrm{d}(x,y), \quad D = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x\right\}.$

Aufgabe 24: (K)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = xy$ sowie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$D = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 2,\ y \le x^2\right\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge D.

(b) Berechnen Sie

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

als iteriertes Integral, indem Sie

(i) zunächst über x und anschließend über y integrieren.

(ii) zunächst über y und anschließend über x integrieren.

Aufgabe 25:

Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^{1/2}\int_0^1 \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \qquad \text{und} \qquad \int_0^1\int_0^{1/2} \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1.$$

Darf der Satz von Fubini hier angewendet werden?

Abgabe bis Montag, den 8. Dezember 2025, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung*.