5. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 21: (K)
Gegeben seien die Funktionen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$ und $h(x) = \frac{1}{6}(5x + e^{-x})$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass die Funktionen g und h auf dem Intervall $I = [0, 1]$ kontrahierend sind. Bestimmen Sie die jeweilige Kontraktionskonstante κ_g bzw. κ_h und zeigen Sie, dass die Fixpunktiterationen zur Lösung von $g(x) = x$ bzw. $h(x) = x$ gegen denselben Fixpunkt konvergieren.

(b) Formulieren Sie weiter ein Newtonverfahren, um diesen Fixpunkt zu bestimmen, und führen Sie für jedes der drei Verfahren (Fixpunktiteration mit g, mit h und Newtonverfahren) drei Iterationsschritte mit Startwert $x_0 = 1$ aus, um die Verfahren zu vergleichen.

Lösung 21:

(a) Zunächst berechnen wir die Ableitungen $g'(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$ und $h'(x) = \frac{1}{6}(5 - e^{-x})$. Nun schätzen wir diese auf dem Intervall $[0, 1]$ ab, um mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Kontraktionskonstante zu bestimmen. Für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$1 = e^0 \geq e^{-x} \geq e^{-1} > \frac{1}{3}\,.$$

Also ist

$$0 \leq \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) = g'(x) \leq \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{4}{6} \leq \frac{1}{6}(5 - e^{-x}) = h'(x) \leq \frac{7}{9}\,.$$

Damit lässt sich mit dem Mittelwertsatz abschätzen

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y| \quad \text{und} \quad |h(x) - h(y)| \leq \frac{7}{9}|x - y|\,.$$

Für g ist $\kappa_g = \frac{1}{3}$ und für h gilt $\kappa_h = \frac{7}{9}$. In beiden Fällen konvergiert die Fixpunktiteration, wobei wir wegen der kleineren Konstante für g eine schnellere Konvergenz erwarten. Die Fixpunkte sind Lösungen der Gleichungen $x = g(x)$ bzw. $x = h(x)$. Somit ist $2x = x + e^{-x}$ bzw. $6x = 5x + e^{-x}$ und in beiden Fällen erhalten wir die Identität $x = e^{-x}$ sowohl für einen Fixpunkt von g als auch für einen von h.

(b) Die letzte Identität nutzen wir für ein Newtonverfahren. Setze $f(x) = x - e^{-x}$. Dann ist der gesuchte Fixpunkt Nullstelle zu f. Es ist $f'(x) = 1 + e^{-x}$ und wir erhalten die Newton-Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + e^{-x_k}}\,.$$

Wir berechnen die ersten drei Iterierten zu den Verfahren ausgehend von $x_0 = 1$ und bekommen

k	$x_k = g(x_{k-1})$	$x_k = h(x_{k-1})$	$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$
1	0.6839	0.8946	0.5378
2	0.5943	0.8137	0.5670
3	0.5731	0.7519	0.5671
10	0.5671	0.5902	0.5671

Aufgabe 22: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^3 - x_1^3 \\ x_1^3 + x_2^3 - 4 \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung von $f(x_1, x_2) = (0, 0)^\top$ und führen Sie zwei Iterationsschritte des Newtonverfahrens mit Startwert $(1, 1)^\top$ aus.
Hinweis: Die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$ ist $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Lösung 22:

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet in allgemeiner Form

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[f'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} f\left(x^{(k)}\right).$$

Nun wollen wir diese Iterationsvorschrift für die in der Aufgabe gegebene Funktion formulieren. Die Ableitung (Jacobimatrix) von f ist

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Zunächst müssen wir prüfen, ob die Inverse dazu existiert. Wir berechnen die Determinante und erhalten

$$\det f'(x_1, x_2) = -3x_1^2 \cdot 3x_2^2 - 3x_2^2 \cdot 3x_1^2 = -18x_1^2 x_2^2.$$

Also gilt $\det f'(x_1, x_2) \neq 0$ für alle (x_1, x_2) mit $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Mithilfe des Hinweises können wir nun die Inverse angeben:

$$[f'(x_1, x_2)]^{-1} = -\frac{1}{18x_1^2 x_2^2} \begin{pmatrix} 3x_2^2 & -3x_2^2 \\ -3x_1^2 & -3x_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1/x_1^2 & 1/x_1^2 \\ 1/x_2^2 & 1/x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Mit $g(x) := x - [f'(x)]^{-1} f(x)$ lautet die Iterationsvorschrift $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})^\top = g(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, und g lässt sich vereinfachen zu

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - [f'(x_1, x_2)]^{-1} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1/x_1^2 & 1/x_1^2 \\ 1/x_2^2 & 1/x_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2^3 - x_1^3 \\ x_1^3 + x_2^3 - 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} x_1 + 1/x_1^2 \\ x_2 + 1/x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir bequem die ersten beiden Iterationsschritte durchführen. Wir starten mit $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^\top = (1, 1)^\top$. Also ist $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)^\top = g(1, 1) = (4/3, 4/3)^\top$ und $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)^\top = g(4/3, 4/3) = (91/72, 91/72)^\top$.

Aufgabe 23: Skizzieren Sie den Integrationsbereich D und berechnen Sie die Gebietsintegrale

(i) $\displaystyle\iint_D (x + 3y^2)\,\mathrm{d}(x, y), \quad D = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\right\},$

(ii) $\displaystyle\iint_D 2y\,\mathrm{d}(x, y), \quad D = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ \cos x - 2 \leq y \leq \cos x + 2\right\},$

(iii) $\displaystyle\iint_D (xy + 1)\,\mathrm{d}(x, y), \quad D = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -x \leq y \leq x\right\}.$

Lösung 23: (i) Wir berechnen

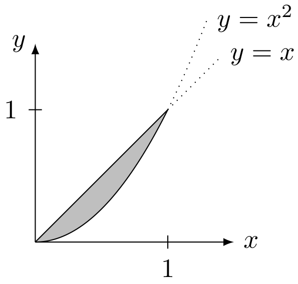
$$\begin{aligned}\iint_D (x + 3y^2)\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (x + 3y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + y^3\right]_{x^2}^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - x^6\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{4}{21}.\end{aligned}$$

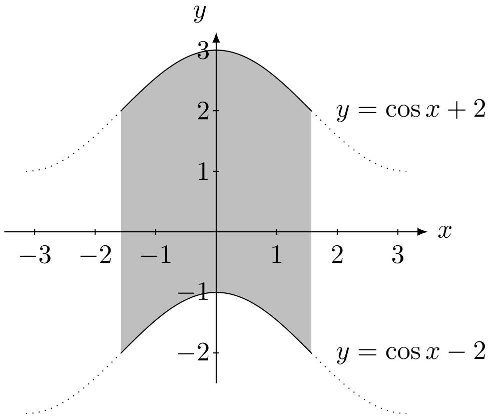
(ii) Es gilt

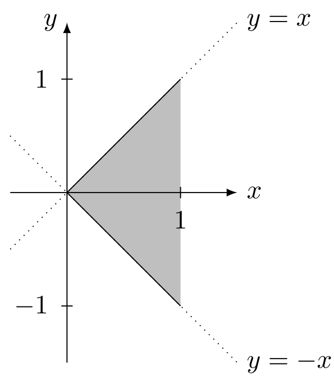
$$\begin{aligned}\iint_D 2y\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos x - 2}^{\cos x + 2} 2y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[y^2\right]_{\cos x - 2}^{\cos x + 2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2 x + 4\cos x + 4\right) - \left(\cos^2 x - 4\cos x + 4\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8\cos x\,\mathrm{d}x = 8\left[\sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 16.\end{aligned}$$

(iii) Das dritte Integral ergibt

$$\iint_D (xy + 1)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_0^1 \int_{-x}^x (xy + 1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 + y\right]_{-x}^x \mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^1 = 1.$$







Aufgabe 24: (K)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = xy$ sowie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$D = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, x^2 + y^2 \leq 2, \, y \leq x^2\right\} .$$

(a) Skizzieren Sie die Menge D.

(b) Berechnen Sie

$$\iint\limits_D f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y)$$

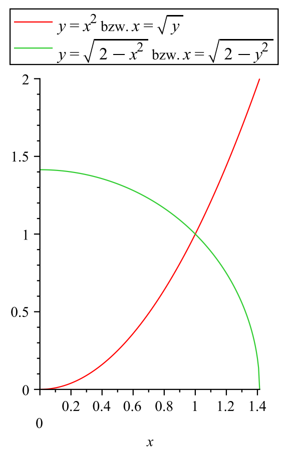
als iteriertes Integral, indem Sie

(i) zunächst über x und anschließend über y integrieren.

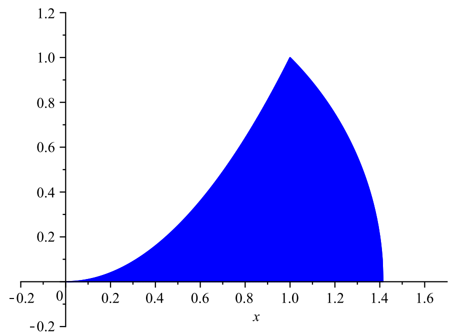
(ii) zunächst über y und anschließend über x integrieren.

Lösung 24:

(a) **Funktionen:**



Eingeschlossenes Gebiet:



(b) (i) Die Menge D lässt sich folgendermaßen darstellen (vgl. Skizze):

$$D = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq y \leq 1, \, \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{2 - y^2}\right\}.$$

Da f integrierbar ist, können wir den Satz von Fubini anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) &= \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(2 - y^2\right) y - y^2 \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[y^2 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

(ii) Die Menge D lässt sich auch auf folgende Weise darstellen (vgl. Skizze):

$$D = \underbrace{\left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x^2\right\}}_{=:D_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le \sqrt{2},\, 0 \le y \le \sqrt{2-x^2}\right\}}_{=:D_2}.$$

Wir können wieder Fubini anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} xy\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{x^2} \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{\sqrt{2-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^5\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x\left(2-x^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{12}x^6\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{12} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 25:
Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^{1/2}\int_0^1 \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \qquad \text{und} \qquad \int_0^1\int_0^{1/2} \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1.$$

Darf der Satz von Fubini hier angewendet werden?

Lösung 25:
Wir beginnen mit dem ersten Integral und betrachten zunächst das innere Integral für ein festes $x_2 \in (0,1)$. Mittels partieller Integration, wobei wir als Stammfunktion $2x_1 - 4x_2$ und als Ableitung $(x_1+2x_2)^{-3}$ wählen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_1 &= \left[-\frac{2x_1 - 4x_2}{2(x_1+2x_2)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{2(x_1+2x_2)^2}\,\mathrm{d}x_1 \\
&= -\left(\frac{1-2x_2}{(1+2x_2)^2} + \frac{2x_2}{4x_2^2}\right) + \left[-\frac{1}{(x_1+2x_2)}\right]_0^1 \\
&= -\left(\frac{1-2x_2}{(1+2x_2)^2} + \frac{1}{2x_2}\right) - \left(\frac{1}{(1+2x_2)} - \frac{1}{2x_2}\right) = -\frac{2}{(1+2x_2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir den Wert des iterierten Integrals bestimmen:

$$\int_0^{1/2}\int_0^1 \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_0^{1/2} -\frac{2}{(1+2x_2)^2}\,\mathrm{d}x_2 = \left[\frac{1}{(1+2x_2)}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\,.$$

Nun kommen wir zum zweiten Integral und gehen genauso vor wie beim ersten. Wir betrachten das innere Integral für ein festes $x_1 \in (0,1)$. Mittels partieller Integration erhalten wir hier:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_2 &= \left[-\frac{2x_1 - 4x_2}{4(x_1+2x_2)^2}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{4}{4(x_1+2x_2)^2}\,\mathrm{d}x_2 \\
&= -\left(\frac{x_1-1}{2(x_1+1)^2} - \frac{x_1}{2x_1^2}\right) + \left[\frac{1}{2(x_1+2x_2)}\right]_0^{1/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-1}{(x_1+1)^2} - \frac{1}{x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{1}{(x_1+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir wieder den Wert des iterierten Integrals berechnen:

$$\int_0^1\int_0^{1/2} \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1+2x_2)^3}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \frac{1}{(x_1+1)^2}\,\mathrm{d}x_1 = \left[-\frac{1}{(x_1+1)}\right]_{x_1=0}^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

Offensichtlich kommen unterschiedliche Ergebnisse heraus, je nachdem, nach welcher Variable man zuerst integriert. Der Satz von Fubini darf hier also nicht angewendet werden, da die Singularität (Polstelle) der Funktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 - 4x_2}{(x_1 + 2x_2)^3} , \qquad x \neq (0,0)$$

für $(x_1, x_2) \to (0,0)$ so „stark“ ist, dass f nicht integrierbar auf dem Rechteck $(0,1) \times (0, \frac{1}{2})$ ist. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Fubini nicht erfüllt.