Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

PD Dr. F. Hettlich
Dr. L. Fink

(K) A28	**(K)** A29	Σ

Abgabegruppe

Karlsruhe, den 5. Dezember 2025

Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: ....

6. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 26: Die Menge

$$B = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x, y, z > 0 \right\}, \qquad a, b, c > 0,$$

ist der im 1. Oktanten gelegene Teil eines Ellipsoids. Beschreiben Sie B unter Verwendung von

(a) kartesischen Koordinaten x, y, z, wobei y von x und z von x und y abhängt,

(b) Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$,

(c) elliptischen Zylinderkoordinaten $x = a\,u\cos v$, $y = b\,u\sin v$, $z = z$,

(d) Ellipsoidkoordinaten $x = a\,u\cos v\sin w$, $y = b\,u\sin v\sin w$, $z = c\,u\cos w$

und geben Sie die Jacobideterminante der Transformation an. Verwenden Sie eine der obigen Transformationen, um das Volumen von B zu bestimmen.

Aufgabe 27: Durch Parametrisierungen mit $x(t) = (\sin t, \cos t)^\top$ und $y(t) = (1 + \sin t)\,(\sin t, \cos t)^\top$ für $t \in [0, \pi/2]$ sind zwei Kurven im $\mathbb{R}^2$ gegeben, die im ersten Quadranten ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) ein Gebiet $B \subseteq \mathbb{R}^2$ begrenzen. Berechnen Sie mit einer geeigneten Koordinatentransformation das Integral

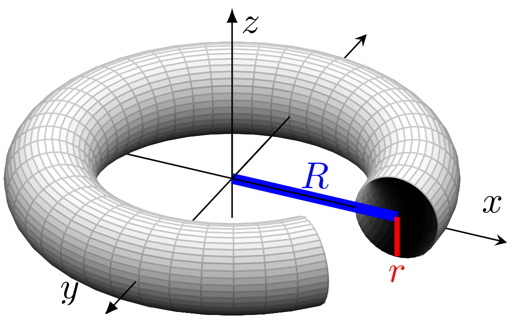
$$\int_B \frac{x_1\,x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,dx\,.$$

Aufgabe 28: (K)

Berechnen Sie das Volumen des Torus T mit Radius R und Radius des Querschnitts r mit Hilfe folgender Koordinaten

$$\Psi(s, \theta, \phi) = ((R + rs\cos\theta)\cos\phi, (R + rs\cos\theta)\sin\phi, rs\sin\theta)^\top$$

mit $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$.



Aufgabe 29: (K)

Der Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ wird von den Kurven

$$x_2 = \frac{1}{x_1}, \qquad x_2 = \frac{2}{x_1}, \qquad x_2 = 2x_1 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 3x_1 \quad \text{jeweils für } x_1 > 0$$

berandet. Skizzieren Sie den Integrationsbereich B und berechnen Sie

(a) den Flächeninhalt von B,

(b) das Integral $J = \iint\limits_B \frac{2x_2}{x_1} dx$.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $u = x_1\, x_2,\ v = x_2/x_1$ für $x_1, x_2 > 0$.

Aufgabe 30: Aus dem Zylinder $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$ im $\mathbb{R}^3$ wird durch die x_1x_2-Ebene und die Fläche $x_3 = e^{x_1^2+x_2^2}$ ein Körper herausgeschnitten. Welche Masse hat dieser Körper und wo liegt sein Schwerpunkt, wenn seine Dichte durch $\rho(x) = x_2^2$ gegeben ist?

Hinweis: Die Masse M und der Schwerpunkt $\bar{x}$ sind gegeben durch

$$M = \iiint\limits_V \rho(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \bar{x}_i = \frac{1}{M} \iiint\limits_V x_i \rho(x)\,\mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, 3.$$

Abgabe bis Montag, den 15. Dezember 2025, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung.*