6. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 26: Die Menge

$$B = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ x,y,z > 0 \right\}, \qquad a,b,c > 0,$$

ist der im 1. Oktanten gelegene Teil eines Ellipsoids. Beschreiben Sie B unter Verwendung von

(a) kartesischen Koordinaten x, y, z, wobei y von x und z von x und y abhängt,

(b) Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$,

(c) elliptischen Zylinderkoordinaten $x = a\,u\cos v$, $y = b\,u\sin v$, $z = z$,

(d) Ellipsoidkoordinaten $x = a\,u\cos v\sin w$, $y = b\,u\sin v\sin w$, $z = c\,u\cos w$

und geben Sie die Jacobideterminante der Transformation an. Verwenden Sie eine der obigen Transformationen, um das Volumen von B zu bestimmen.

Lösung 26:

(a) Die Ellipsoidungleichung kann nach z umgestellt werden:

$$\frac{z^2}{c^2} \le 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 0 < z \le c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,.$$

Für x und y gelten dann die Einschränkungen

$$0 < y \le b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad 0 < x \le a\,.$$

Damit ergibt sich

$$B = \left\{ (x,y,z) : 0 < x \le a,\ 0 < y \le b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ 0 < z \le c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right\}.$$

Die Jacobi-Determinante der kartesischen Koordinaten ist $|\Phi'| = 1$.

(b) Einsetzen der Zylinderkoordinaten in die Ellipsoidungleichung ergibt

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

Stellen wir die Gleichung nach z um erhalten wir

$$0 < z \le c\left(1 - r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn für r gilt

$$0 < r \le \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da $x, y, z > 0$ gilt, betrachten wir nur den ersten Oktanten. Somit wissen wir, dass $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Insgesamt ergibt sich

$$B = \left\{ (r,\varphi,z) : 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < r \le \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\ 0 < z \le c\left(1 - r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass bei Zylinderkoordinaten $|\Phi'| = r$ gilt.

(c) Wir setzen

$$x = a\,u\cos v, \quad y = b\,u\sin v, \quad z = z.$$

Dann wird die Ellipsoidbedingung zu

$$\frac{a^2u^2\cos^2 v}{a^2} + \frac{b^2u^2\sin^2 v}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = u^2 + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{c^2} \le 1 - u^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < z \le c\sqrt{1-u^2}\,.$$

Somit liegt u in dem Bereich $0 < u \le 1$. Der Winkel v muss wieder in dem Intervall $0 < v < \frac{\pi}{2}$ sein, da $x, y, z > 0$. Insgesamt gilt

$$B = \left\{(u, v, z) : 0 < v < \frac{\pi}{2},\ 0 < u \le 1,\ 0 < z \le c\sqrt{1-u^2}\right\}.$$

Die Jacobi-Determinante bestimmen wir durch

$$|\Phi'| = \begin{vmatrix} a\cos v & -au\sin v & 0 \\ b\sin v & bu\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abu\,.$$

(d) Wir setzen

$$x = a\,u\cos v\sin w, \quad y = b\,u\sin v\sin w, \quad z = c\,u\cos w.$$

in die Ellipsoidungleichung und erhalten

$$u^2\cos^2 v\sin^2 w + u^2\sin^2 v\sin^2 w + u^2\cos^2 w \le 1 \quad \Rightarrow \quad u^2\sin^2 w + u^2\cos^2 w \le 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < u \le 1\,.$$

Da die Parameter im 1. Oktanten liegen, gilt für die Winkel v, w:

$$0 < v < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < w < \frac{\pi}{2}.$$

Somit ergibt sich

$$B = \left\{(u, v, w) : 0 < u \le 1,\, 0 < v < \frac{\pi}{2},\, 0 < w < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Wir berechnen noch die Jacobi-Determinante

$$|\Phi'| = \begin{vmatrix} a\cos v\sin w & -au\sin v\sin w & au\cos v\cos w \\ b\sin v\sin w & bu\cos v\sin w & bu\sin v\cos w \\ c\cos w & 0 & -cu\sin w \end{vmatrix} = abcu^2\sin w\,.$$

Um das Volumen des Körpers zu berechnen, benutzt man praktischerweise die Ellipsoidkoordinaten aus (d): Damit folgt

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abc\sin(w)u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \\ &= abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin w\,\mathrm{d}w\right)\left(\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u\right) = \frac{\pi}{2}abc[-\cos w]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}abc. \end{aligned}$$

Aufgabe 27: Durch Parametrisierungen mit $x(t) = (\sin t, \cos t)^\top$ und $y(t) = (1+\sin t)\,(\sin t, \cos t)^\top$ für $t \in [0, \pi/2]$ sind zwei Kurven im $\mathbb{R}^2$ gegeben, die im ersten Quadranten ($x_1 > 0,\ x_2 > 0$) ein Gebiet $B \subseteq \mathbb{R}^2$ begrenzen. Berechnen Sie mit einer geeigneten Koordinatentransformation das Integral

$$\int_B \frac{x_1\,x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,dx\,.$$

Lösung 27: Die beiden Kurven $x(t)$ und $y(t)$ verlaufen in derselben Richtung $(\sin t, \cos t)$, das Gebiet B liegt also zwischen zwei Strahlen im ersten Quadranten. Daher bietet sich die Koordinatentransformation

$$\Phi(r, \varphi) = (x_1, x_2) = (r\sin\varphi,\, r\cos\varphi) \qquad r \in (\,1,\ 1+\sin\varphi),\ \ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

an. Wir setzen

$$D := \left\{ (r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 1 < r < (1+\sin\varphi),\ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

Durch Transformation auf Polarkoordinaten ist dann

$$\iint\limits_B \frac{x_1\, x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\, \mathrm{d}(x_1, x_2) = \iint\limits_D \frac{r^2\, \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}} \underbrace{|\Phi'(r,\varphi)|}_{=r}\, \mathrm{d}(r,\varphi) = \iint\limits_D r^2\, \sin\varphi\cos\varphi\, \mathrm{d}(r,\varphi).$$

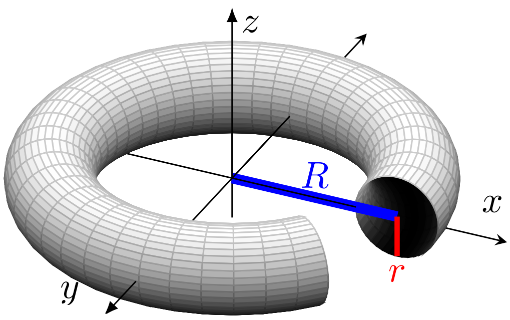
Dies schreiben wir als iteriertes Integral und rechnen aus:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D r^2\, \sin\varphi \cos\varphi\, \mathrm{d}(r,\varphi) &= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_1^{1+\sin\varphi} r^2\, \sin\varphi\cos\varphi\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{1+\sin\varphi} \sin\varphi\cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\, \cos\varphi\, \left((1+\sin\varphi)^3 - 1\right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \left(3\sin^2\varphi\, \cos\varphi + 3\sin^3\varphi\, \cos\varphi + \sin^4\varphi\, \cos\varphi\right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{3}\left[\sin^3\varphi + \frac{3}{4}\, \sin^4\varphi + \frac{1}{5}\, \sin^5\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{13}{20}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 28: (K)
Berechnen Sie das Volumen des Torus T mit Radius R und Radius des Querschnitts r mit Hilfe folgender Koordinaten

$$\Psi(s,\theta,\phi) = ((R + rs\cos\theta)\cos\phi, (R + rs\cos\theta)\sin\phi, rs\sin\theta)^\top$$

mit $0 \le s \le 1$, $0 \le \theta, \phi \le 2\pi$.



Lösung 28: Die Jacobi-Matrix der Abbildung Ψ lautet

$$\Psi'(s,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -rs\sin\theta\cos\phi & -(R + rs\cos\theta)\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & -rs\sin\theta\sin\phi & (R + rs\cos\theta)\cos\phi \\ r\sin\theta & rs\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Determinante entwickeln wir nach der dritten Spalte:

$$\det\Psi'(s,\theta,\phi) = -(R + rs\cos\theta)\sin\phi \cdot C_{13} + (R + rs\cos\theta)\cos\phi \cdot C_{23},$$

wobei

$$C_{13} = \det\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi & -rs\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta & rs\cos\theta \end{pmatrix} = r^2 s\sin\phi$$

und

$$C_{23} = (-1)\det\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -rs\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta & rs\cos\theta \end{pmatrix} = -r^2 s\cos\phi.$$

Durch Einsetzen und Vereinfachen (unter Verwendung von $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$) erhalten wir

$$\det \Psi'(s,\theta,\phi) = -r^2 s\,(R + rs\cos\theta),$$

und damit

$$|\det \Psi'(s,\theta,\phi)| = r^2 s\,(R + rs\cos\theta).$$

Für das Volumen des Torus T ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\iiint_T \mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\det\Psi'(s,\theta,\phi)|\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s = r^2\int_0^1 s\int_0^{2\pi}(R + rs\cos\theta)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\\ &= 2\pi r^2\int_0^1 s\Big[R\theta + rs\sin\theta\Big]_0^{2\pi}\mathrm{d}s = 4\pi^2 r^2 R\int_0^1 s\,\mathrm{d}s = 2\pi^2 r^2 R.\end{aligned}$$

Aufgabe 29: (K)
Der Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ wird von den Kurven

$$x_2 = \frac{1}{x_1}, \qquad x_2 = \frac{2}{x_1}, \qquad x_2 = 2x_1 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 3x_1 \quad \text{jeweils für} \;\; x_1 > 0$$

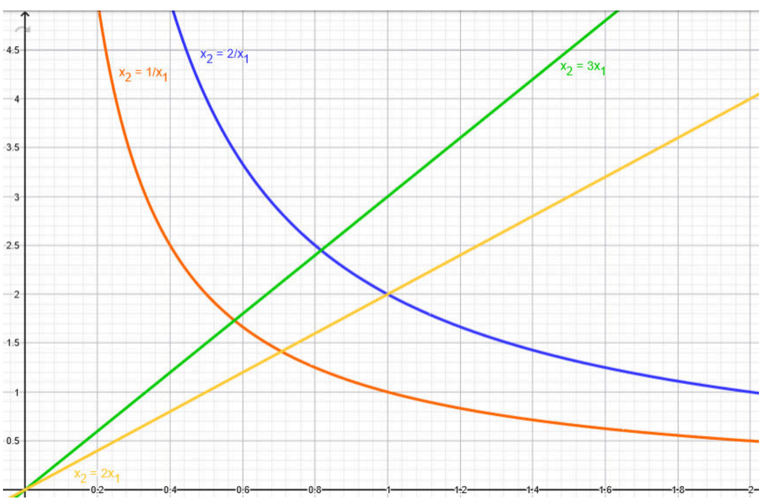
berandet. Skizzieren Sie den Integrationsbereich B und berechnen Sie

(a) den Flächeninhalt von B,

(b) das Integral $J = \iint\limits_B \frac{2x_2}{x_1} dx$.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $u = x_1\,x_2,\;\; v = x_2/x_1$ für $x_1, x_2 > 0$.

Lösung 29: Skizze:



In uv-Koordinaten lauten die berandenden Kurven $u = 1$, $u = 2$, $v = 2$ sowie $v = 3$. Mit $x_1 = \sqrt{u/v}$ und $x_2 = \sqrt{uv}$ folgt für die Jacobi-Determinante:

$$\det\left(\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,v} > 0.$$

Damit folgt

(a) für den Flächeninhalt:

$$\iint\limits_B \mathrm{d}x = \int_1^2\int_2^3 \left|\det\left(\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right)\right| \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_1^2\int_2^3 \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,[\ln v]_2^3 = \frac{1}{2}\,\ln\frac{3}{2}\,.$$

(b) für das gegebene Integral:

$$\iint\limits_B \frac{2\,x_2}{x_1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2\int_2^3 2v\left|\det\left(\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right)\right|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_1^2\int_2^3 2\,v\,\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_1^2\int_2^3 \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 1.$$

Aufgabe 30: Aus dem Zylinder $x_1^2+x_2^2\le 4$ im $\mathbb{R}^3$ wird durch die x_1x_2-Ebene und die Fläche $x_3=e^{x_1^2+x_2^2}$ ein Körper herausgeschnitten. Welche Masse hat dieser Körper und wo liegt sein Schwerpunkt, wenn seine Dichte durch $\rho(x)=x_2^2$ gegeben ist?
Hinweis: Die Masse M und der Schwerpunkt $\bar{x}$ sind gegeben durch

$$M=\iiint\limits_V \rho(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{pmatrix} \text{ mit } \bar{x}_i=\frac{1}{M}\iiint\limits_V x_i\rho(x)\,\mathrm{d}x, \quad i=1,2,3.$$

Lösung 30:
Mit Zylinderkoordinaten $(x_1,x_2,x_3)^\top=(r\,\cos\phi, r\,\sin\phi, z)^\top$ und $r\in[0,2]$, $\phi\in[0,2\pi]$ und $z\in\left[0,e^{r^2}\right]$ folgt für die Masse M

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_V \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^2 r^3\int_0^{e^{r^2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^2 r^3\,[z]_0^{e^{r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\\
&= \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^2 r^3e^{r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \overset{x=r^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^4 xe^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\phi \overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,[xe^x-e^x]_0^4\,\mathrm{d}\phi\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\left(3e^4+1\right)\,\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2}\left(3e^4+1\right)\left[\frac{1}{2}\phi-\frac{1}{4}\sin 2\phi\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}\left(3e^4+1\right).
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schwerpunktes $\bar{x}$ gehen wir analog vor und erhalten für $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$:

$$\bar{x}_1=\frac{1}{M}\iiint_V x_1\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{M}\int_0^2 r^4\int_0^{e^{r^2}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin^2\phi\mathrm{d}\phi}_{=\left[\frac{1}{3}\sin^3\phi\right]_0^{2\pi}=0}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r=0$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{M}\iiint_V x_2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{M}\int_0^2 r^4\int_0^{e^{r^2}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^3\phi d\phi}_{=\left[-\cos\phi+\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{2\pi}=0}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r=0.$$

Damit ist $\bar{x}_1=\bar{x}_2=0$ (Bemerkung: Man kann für dieses Ergebnis auch mit der Rotationssymmetrie des Körpers argumentieren.) Die x_3-Koordinate des Schwerpunkts ergibt sich durch

$$\begin{aligned}
\bar{x}_3 &= \frac{1}{M}\iiint_V x_3\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^2 r^3\int_0^{e^{r^2}} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^2 r^3\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{e^{r^2}}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^2 r^3\frac{e^{2r^2}}{2}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \overset{x=r^2}{=} \frac{1}{4M}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\int_0^4 xe^{2x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\phi\\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{4M}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^4-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^4\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi(7e^8+1)}{16M}=\frac{7e^8+1}{8\,(3e^4+1)}.
\end{aligned}$$