Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

PD Dr. F. Hettlich
Dr. L. Fink

(K) A33	**(K)** A34	$\sum$

Abgabegruppe

Karlsruhe, den 12. Dezember 2025

Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: ....

7. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 31:

(a) Man berechne folgende Kurvenintegrale längs der Kurve C:

(i) $\displaystyle\int_C (x_1^2 + x_2)\,\mathrm{d}\ell, \quad C : x(t) = (t, \cosh t)^\top, \quad 0 \le t \le 1,$

(ii) $\displaystyle\int_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,\mathrm{d}\ell, \quad C : x(t) = (t\cos t, t\sin t, t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Hinweis: $\cosh^2(t) = \frac{1}{2}\left(\cosh(2t) + 1\right)$.

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$C : x(t) = \left(t, t^2, \frac{4}{3}t^{3/2}\right)^\top, \quad 0 \le t \le 1$$

und berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_C \frac{1}{1 + 4x_1 + 4x_2}\,\mathrm{d}\ell$.

Aufgabe 32: Gegeben ist die Parametrisierung $x : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$x(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)^\top, \qquad t \in [-1, 1]\ .$$

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $C = x([-1, 1])$.

(b) Parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge.

(c) Welche Form hat die Kurve C?

Aufgabe 33: (K)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Lemniskatenflügels“ , der durch

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2)^2 \le 2(x_1^2 - x_2^2),\ x_1 \ge 0\right\}$$

gegeben ist, und bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\mathrm{d}\ell$$

über den Rand ∂B des Gebiets.

Hinweis: Verwenden Sie die Koordinatentransformation

$$x_1 = u\sqrt{2\cos(2v)}\,\cos v, \quad x_2 = u\sqrt{2\cos(2v)}\,\sin v, \quad 0 \le u \le 1, \quad -\frac{\pi}{4} \le v \le \frac{\pi}{4}\ .$$

Aufgabe 34: (K)

(a) Besitzen die Vektorfelder $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(3\cos(x+y) - 3x\sin(x+y),\ -3x\sin(x+y) - \frac{2}{y^3}\right)^\top, \qquad (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2, \\ G(x,y) &= \left(y^2 + 2yx,\ 2y + x^2\right)^\top, \qquad (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

Potentiale? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$H(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^3 - axy,\ 4x^2\right)^\top, \qquad (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass H konservativ ist und berechnen Sie für diesen Fall ein zugehöriges Potential.

Aufgabe 35: Das stetige Vektorfeld $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$G(x) = \left(x_3^2,\ e^{x_3},\ x_2 e^{x_3} + 2x_1x_3\right)^\top$$

besitzt Potentiale. Bestimmen Sie eines und berechnen Sie das Integral $J = \int\limits_K G(x) \cdot \mathrm{d}\ell$ entlang einer beliebigen Kurve K, die vom Punkt $(1,0,0)^\top$ zum Punkt $(0,1,0)^\top$ führt.

Abgabe bis Montag, den 22. Dezember 2025, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung.*