

7. Übungsblatt Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 31:

(a) Man berechne folgende Kurvenintegrale längs der Kurve C :

$$(i) \int_C (x_1^2 + x_2) d\ell, \quad C : x(t) = (t, \cosh t)^\top, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$(ii) \int_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} d\ell, \quad C : x(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Hinweis: $\cosh^2(t) = \frac{1}{2} (\cosh(2t) + 1)$.

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$C : x(t) = \left(t, t^2, \frac{4}{3} t^{3/2} \right)^\top, \quad 0 \leq t \leq 1$$

und berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \frac{1}{1 + 4x_1 + 4x_2} d\ell$.

Lösung 31:

(a) (i) Es gilt

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}, \quad \|\dot{x}(t)\|_2 = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \cosh(t).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_C (x_1^2 + x_2) d\ell &= \int_0^1 (t^2 + \cosh t) \cosh t dt = \int_0^1 t^2 \cosh t dt + \int_0^1 \cosh^2 t dt \stackrel{p.I.}{=} [t^2 \sinh t]_0^1 - \int_0^1 2t \sinh t dt + \int_0^1 \cosh^2 t dt \\ &\stackrel{p.I.}{=} [t^2 \sinh t - 2t \cosh t + 2 \sinh t]_0^1 + \int_0^1 \cosh^2 t dt \stackrel{Hinw.}{=} 3 \sinh 1 - 2 \cosh 1 + \int_0^1 \frac{1}{2} (\cosh(2t) + 1) dt \\ &= 3 \sinh 1 - 2 \cosh 1 + \left[\frac{\sinh(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^1 = 3 \sinh 1 - 2 \cosh 1 + \frac{1}{4} \sinh 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\dot{x}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)^\top, \quad \|\dot{x}(t)\|_2 = \sqrt{(1+t^2)(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{2+t^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} d\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t + t^2} \sqrt{2+t^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2t^2} \sqrt{2+t^2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \sqrt{2+t^2} dt = \sqrt{2} \left[\frac{2}{3} (2+t^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left((2+(2\pi)^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} 2^{\frac{3}{2}} \left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{4}{3} \left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\dot{x}(t) = (1, 2t, 2\sqrt{t})^\top, \quad \|\dot{x}(t)\|_2 = \sqrt{1+4t^2+4t} = \sqrt{(1+2t)^2} = 1+2t.$$

Damit berechnen wir die Länge der Kurve:

$$L = \int_0^1 \|\dot{x}(t)\|_2 dt = \int_0^1 (1+2t) dt = [t+t^2]_0^1 = 2.$$

Mit der gleichen Parametrisierung finden wir

$$\int_C \frac{1}{1+4x_1+4x_2} dl = \int_0^1 \frac{1}{1+4t+4t^2} \|\dot{x}(t)\|_2 dt = \int_0^1 \frac{1+2t}{1+4t+4t^2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2} \ln |1+2t| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3.$$

Aufgabe 32: Gegeben ist die Parametrisierung $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$x(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)^\top, \quad t \in [-1, 1].$$

- (a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $C = x([-1, 1])$.
- (b) Parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge.
- (c) Welche Form hat die Kurve C ?

Lösung 32:

(a) Es gilt:

$$\dot{x}(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -2t \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} -4t \\ 2-2t^2 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\|\dot{x}(t)\|_2 = \frac{2\sqrt{t^4+2t^2+1}}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Als Länge ergibt sich also

$$L = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \left[\arctan t \right]_{-1}^1 = \pi.$$

(b) Die Bogenlänge ist gegeben durch:

$$s(t) = \int_{-1}^t \|\dot{x}(\tau)\| d\tau = 2[\arctan(\tau)]_{\tau=-1}^t = 2\arctan(t) + \frac{\pi}{2}.$$

Für die Parametrisierung nach der Bogenlänge benötigen wir die Umkehrfunktion von $s : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Wir lösen die Gleichung $s = s(t) = 2\arctan(t) + \pi/2$ nach t auf:

$$s = 2\arctan(t) + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{s}{2} - \frac{\pi}{4} = \arctan(t) \Leftrightarrow \tan\left(\frac{s}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = t.$$

Die Umkehrfunktion $t : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ der Bogenlänge ist also durch $t(s) = \tan(s/2 - \pi/4)$ gegeben. Damit ergibt sich die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve zu (aus Gründen der Übersichtlichkeit setzen wir in der Rechnung $\varphi = s/2 - \pi/4$)

$$\begin{aligned} z(s) &= x(t(s)) = \left(\frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}, \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \right)^\top \\ &= \left(\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}, \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \right)^\top \\ &= (\cos(2\varphi), \sin(2\varphi))^\top \\ &= \left(\cos\left(s - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \right)^\top, \quad s \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

- (c) Die Kurve C ist gerade der Wertebereich der Funktionen x bzw. z , also $x([-1, 1])$ bzw. $z([0, \pi])$. Mit der Parametrisierung nach der Bogenlänge sieht man leicht, dass es sich bei der Kurve C um den Halbkreis $\{(\cos \varphi, \sin \varphi)^\top : \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ handelt.

Aufgabe 33: (K)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Lemniskatenflügels“, der durch

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2)^2 \leq 2(x_1^2 - x_2^2), x_1 \geq 0\}$$

gegeben ist, und bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \, d\ell$$

über den Rand ∂B des Gebiets.

Hinweis: Verwenden Sie die Koordinatentransformation

$$x_1 = u\sqrt{2\cos(2v)} \cos v, \quad x_2 = u\sqrt{2\cos(2v)} \sin v, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad -\frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{\pi}{4}.$$

Lösung 33:

Durch die Transformation $x = \Phi(u, v) = (u\sqrt{2\cos(2v)} \cos v, u\sqrt{2\cos(2v)} \sin v)^\top$ sind neue (krummlinige) Koordinaten gegeben und das Gebiet lässt sich in diesen Koordinaten durch

$$B = \{x = \Phi(u, v) : 0 \leq u \leq 1 \text{ und } -\pi/4 \leq v \leq \pi/4\}$$

beschreiben.

Wir benötigen die Funktionaldeterminante dieser Transformation mit

$$\begin{aligned} \det(\Phi(u, v)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sqrt{2\cos(2v)} \cos v & \frac{-\sqrt{2}u}{\sqrt{\cos(2v)}} \sin(2v) \cos v - u\sqrt{2\cos(2v)} \sin v \\ \sqrt{2\cos(2v)} \sin v & \frac{-\sqrt{2}u}{\sqrt{\cos(2v)}} \sin(2v) \sin v + u\sqrt{2\cos(2v)} \cos v \end{pmatrix} \\ &= 2u \cos(2v). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Flächeninhalt

$$\iint_B dx = \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2u \cos(2v) \, dv \, du = [u^2]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin(2v) \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Der Rand ist in den ursprünglichen Koordinaten durch

$$\partial B = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2)^2 = 2(x_1^2 - x_2^2), x_1 \geq 0\}$$

gegeben. Für die neuen Koordinaten folgt $u = 1$ und damit lässt sich die Kurve durch

$$\partial B = \{x(v) = (\sqrt{2\cos(2v)} \cos v, \sqrt{2\cos(2v)} \sin v)^\top : -\pi/4 \leq v \leq \pi/4\}$$

parametrisieren. Mit

$$\|x(v)\|_2 = \sqrt{2\cos(2v)(\cos^2 v + \sin^2 v)} = \sqrt{2\cos(2v)}$$

und

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(v)\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\cos(2v)}} \sqrt{(-2\sin(2v)\cos v - 2\cos(2v)\sin v)^2 + (-2\sin(2v)\sin v + 2\cos(2v)\cos v)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\cos(2v)}} \end{aligned}$$

folgt das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \, d\ell = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2\cos(2v)} \frac{2}{\sqrt{2\cos(2v)}} \, dv = \pi.$$

Aufgabe 34: (K)(a) Besitzen die Vektorfelder $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \left(3 \cos(x + y) - 3x \sin(x + y), -3x \sin(x + y) - \frac{2}{y^3} \right)^\top, \quad (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2,$$

$$G(x, y) = (y^2 + 2yx, 2y + x^2)^\top, \quad (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2,$$

Potentiale? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$H(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^3 - axy, 4x^2 \right)^\top, \quad (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass H konservativ ist und berechnen Sie für diesen Fall ein zugehöriges Potential.**Lösung 34:**(a) F : Es ist

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = -3 \sin(x + y) - 3x \cos(x + y)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) = -3 \sin(x + y) - 3x \cos(x + y),$$

also $\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$. Somit besitzt F auf \mathbb{R}^2 ein Potential, also eine Funktion f mit $\nabla f = F$.Um f zu bestimmen, kann man etwa die erste Komponente F_1 von F bezüglich der ersten Variable x integrieren:

$$f(x, y) = \int (3 \cos(x + y) - 3x \sin(x + y)) dx = 3x \cos(x + y) + c(y).$$

Dabei muss berücksichtigt werden, dass die Integrationskonstante von y abhängen kann. Dieser Ausdruck, partiell nach y differenziert, liefert die zweite Komponente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x \sin(x + y) + c'(y) \stackrel{!}{=} -3x \sin(x + y) - \frac{2}{y^3}.$$

Damit ergibt sich $c'(y) = -\frac{2}{y^3}$, und somit ist $c(y) = \frac{1}{y^2} + d$ mit einer Integrationskonstante d , die wir gleich Null wählen können, da wir nur ein mögliches Potential bestimmen möchten. Als Funktion f erhalten wir somit

$$f(x, y) = 3x \cos(x + y) + \frac{1}{y^2}.$$

 G : Besäße G ein Potential g , so müsste nach dem Satz von Schwarz gelten:

$$\frac{\partial}{\partial y} G_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} G_2(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es ist jedoch

$$\frac{\partial}{\partial y} G_1(x, y) = 2x + 2y \neq 2x = \frac{\partial}{\partial x} G_2(x, y)$$

für $y \neq 0$. Demnach kann es ein solches Potential nicht geben.(b) Damit es ein Potential h zu H gibt, muss analog zu Aufgabenteil (a) gelten:

$$\frac{\partial}{\partial y} H_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} H_2(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

also

$$-ax = 8x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn $a = -8$, also

$$H(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^3 + 8xy, 4x^2 \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ist. Durch Integration von H_2 über y ergibt sich aus $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = H_2(x, y) = 4x^2$ für h die Form

$$h(x, y) = 4x^2y + c(x).$$

Ableiten nach x und Vergleich mit $H_1(x, y) = \frac{1}{2}x^3 + 8xy$ liefert

$$c'(x) = \frac{1}{2}x^3,$$

also etwa $c(x) = \frac{1}{8}x^4$. Damit erhalten wir als Potential schließlich

$$h(x, y) = 4x^2y + \frac{1}{8}x^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 35: Das stetige Vektorfeld $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$G(x) = (x_3^2, e^{x_3}, x_2e^{x_3} + 2x_1x_3)^\top$$

besitzt Potentiale. Bestimmen Sie eines und berechnen Sie das Integral $J = \int_K G(x) \cdot d\ell$ entlang einer beliebigen Kurve K , die vom Punkt $(1, 0, 0)^\top$ zum Punkt $(0, 1, 0)^\top$ führt.

Lösung 35:

Wir bestimmen ein Potential g zu G , wobei wir uns auf die durch den Hinweis im Aufgabentext gegebene Gewissheit stützen, dass ein solches tatsächlich existiert.

Integration der ersten Komponente von G über x_1 liefert die Form

$$g(x) = x_1x_3^2 + c(x_2, x_3)$$

mit einem Term $c(x_2, x_3)$, der nur von den Variablen x_2 und x_3 abhängt. Partielle Ableitung dieses Ausdrucks nach x_2 ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_2}g(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}c(x_2, x_3) \stackrel{!}{=} G_2(x) = e^{x_3},$$

also

$$c(x_2, x_3) = x_2e^{x_3} + d(x_3)$$

mit einem Ausdruck $d(x_3)$, der nur noch von x_3 abhängen kann, da $c(x_2, x_3)$ nicht von x_1 abhängt. Setzen wir diese Form von $c(x_2, x_3)$ in die oben bestimmte Form von $g(x)$ ein, sind wir also bei

$$g(x) = x_1x_3^2 + x_2e^{x_3} + d(x_3)$$

angelangt. Anschließende partielle Ableitung nach x_3 führt auf

$$\frac{\partial}{\partial x_3}g(x) = 2x_1x_3 + x_2e^{x_3} + d'(x_3) \stackrel{!}{=} G_3(x) = x_2e^{x_3} + 2x_1x_3,$$

also

$$d'(x_3) = 0 \quad \iff \quad d(x_3) = k = \text{const.}$$

Mit der Wahl $k = 0$ ergibt sich also etwa

$$g(x) = x_1x_3^2 + x_2e^{x_3}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Das Integral J errechnet sich nun zu

$$\int_K G(x) \cdot d\ell = g(0, 1, 0) - g(1, 0, 0) = 1 - 0 = 1$$

unabhängig von der konkreten Form der Verbindungskurve K .