

(K) A38	(K) A39	Σ

Abgabegruppe

PD Dr. F. Hettlich
 Dr. L. Fink

Karlsruhe, den 19. Dezember 2025

Matr.-Nr.: Matr.-Nr.: Matr.-Nr.:

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 36: Die Oberfläche eines Rotationskörpers R sei mit Hilfe der Funktionen $r, z : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisiert durch

$$X(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, z(t))^T, \quad t \in [t_0, t_1], \varphi \in [0, 2\pi].$$

(a) Für die Oberfläche O zeige man die Formel

$$O = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} r(t) \cdot \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

(b) Es seien $A, a > 0$. Berechnen Sie damit die Oberfläche des Torus

$$r(t) = A + a \cos t, \quad z(t) = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aufgabe 37: Am Lehrstuhl gibt es eine neue Kaffeemaschine mit variabler Strudeleinspritzung zur Geschmacksverbesserung. Die Filter werden durch

$$F = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 = 4(x_1^2 + x_2^2), x_1^2 + x_2^2 < 36, x_3 \geq 0\}$$

beschrieben, durch welche das Wasser je nach Strudelparameter $\alpha \in [0, 2]$ mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$w(x) = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ \alpha x_1 \\ \frac{-1}{1+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$$

fließt. Bestimmen Sie

- (a) die Filterfläche $\iint_F 1 \, d\sigma$ und
- (b) den Kaffeefluss $\iint_F w(x) \cdot d\sigma$ in Abhängigkeit von α .

Aufgabe 38: (K)

Gegeben seien das Vektorfeld $f(x, y, z) = (x, y, 1)^T$ und der Körper

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq x + y + 3\}.$$

- (a) Geben Sie Parametrisierungen der glatten Teilflächen F_1, F_2 und F_3 an, die K beranden.
- (b) Berechnen Sie $\int_K \operatorname{div} f(x) \, dx$ sowie den Fluss durch die Flächen F_1, F_2 und F_3 ohne Verwendung des Integralsatzes von Gauß.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie der Körper K aussieht.

Aufgabe 39: (K)

Mit $R_2 > R_1 > 0$ definieren wir die Halbkugelschale

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 : R_1 \leq \|x\|_2 \leq R_2, x_3 > 0\}.$$

Verifizieren Sie für K und das Vektorfeld $F(x) := (x_2, -x_1, \|x\|_2)^\top$, $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ den Gauß'schen Satz:

$$\iint_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x) \, d\sigma = \iiint_K \operatorname{div} F(x) \, dx,$$

indem Sie die Gleichheit der beiden Seiten nachrechnen. Wie üblich steht $\|\cdot\|_2$ für die euklidische Norm in \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 40: Die Oberfläche M sei definiert durch

$$M = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y \leq \pi, z = \sin(x) \sin(y)\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von M .

(b) Bestimmen Sie den Fluss

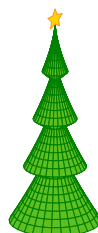
$$\int_M F(x) \cdot \nu(x) \, d\sigma,$$

wobei die dritte Komponente des Normalenvektors ν negativ sein soll und das Vektorfeld F durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(x) \cos(y) \\ -\sin(y) \cos(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sei.

Wir wünschen Ihnen schöne Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!



Abgabe bis Montag, den 12. Januar 2026, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung*.