8. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 36: Die Oberfläche eines Rotationskörpers R sei mit Hilfe der Funktionen $r, z : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ parametrisiert durch

$$X(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, z(t))^\top, \quad t \in [t_0, t_1],\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

(a) Für die Oberfläche O zeige man die Formel

$$O = 2\pi \int\limits_{t_0}^{t_1} r(t) \cdot \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Es seien $A, a > 0$. Berechnen Sie damit die Oberfläche des Torus

$$r(t) = A + a\cos t, \quad z(t) = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Lösung 36:

(a) Zunächst bestimmen wir die partiellen Ableitungen der Parametrisierung $X(t,\varphi)$:

$$X_t = (r'(t)\cos\varphi,\ r'(t)\sin\varphi,\ z'(t))^\top, \qquad X_\varphi = (-r(t)\sin\varphi,\ r(t)\cos\varphi,\ 0)^\top.$$

Das Kreuzprodukt ergibt

$$X_t \times X_\varphi = \begin{pmatrix} -r(t)z'(t)\cos\varphi \\ -r(t)z'(t)\sin\varphi \\ r(t)r'(t) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die Norm

$$\|X_t \times X_\varphi\| = r(t)\sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Durch Integration erhält man die Oberfläche

$$O = \int_0^{2\pi}\int_{t_0}^{t_1} r(t)\sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} r(t)\sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Für den Torus seien

$$r(t) = A + a\cos t, \qquad z(t) = a\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

mit $A, a > 0$. Die Ableitungen lauten

$$r'(t) = -a\sin t, \qquad z'(t) = a\cos t,$$

und damit

$$\sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = a.$$

Einsetzen in die Flächenformel liefert

$$O_{\text{Torus}} = 2\pi\int_0^{2\pi}(A + a\cos t)\,a\,\mathrm{d}t = 2\pi a\left(\int_0^{2\pi} A\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} a\cos t\,\mathrm{d}t\right) = 2\pi a(2\pi A) = 4\pi^2 Aa.$$

Aufgabe 37: Am Lehrstuhl gibt es eine neue Kaffeemaschine mit variabler Strudeleinspritzung zur Geschmacksverbesserung. Die Filter werden durch

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 = 4(x_1^2 + x_2^2),\ x_1^2 + x_2^2 < 36,\ x_3 \ge 0\right\}$$

beschrieben, durch welche das Wasser je nach Strudelparameter $\alpha \in [0, 2]$ mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$w(x) = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ \alpha x_1 \\ \frac{-1}{1+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$$

fließt. Bestimmen Sie

(a) die Filterfläche $\iint\limits_F 1 \,\mathrm{d}o$ und

(b) den Kaffeefluss $\iint\limits_F w(x) \cdot \,\mathrm{d}o$ in Abhängigkeit von α.

Lösung 37:
Wegen $x_1^2 + x_2^2 < 36$ bietet sich eine Parametrisierung von F in Zylinderkoordinaten an:

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = \sqrt{4r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = 2r, \qquad \varphi \in [0, 2\pi],\ r \in [0, 6].$$

Damit ist $X(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 2r)^\top, \quad \varphi \in [0, 2\pi],\ r \in [0, 6]$, und

$$X_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_r \times X_\varphi = \begin{pmatrix} -2r\cos\varphi \\ -2r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor zeigt nach innen/oben und $\|X_r \times X_\varphi\| = \sqrt{4r^2 + r^2} = \sqrt{5}r$.

(a) Fläche:

$$\iint\limits_F 1 \,\mathrm{d}o = \int\limits_0^6 \int\limits_0^{2\pi} \|X_r \times X_\varphi\| \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int\limits_0^6 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{5}r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int\limits_0^6 2\pi r\sqrt{5} \,\mathrm{d}r = 36\sqrt{5}\pi.$$

(b) Fluss:

$$\begin{aligned}\iint\limits_F w(x) \cdot \,\mathrm{d}o &= \int\limits_0^6 \int\limits_0^{2\pi} w(X(r,\varphi)) \cdot X_r \times X_\varphi \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int\limits_0^6 \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\alpha r\sin\varphi \\ \alpha r\cos\varphi \\ \frac{-1}{1+r^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r\cos\varphi \\ -2r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \\ &= \int\limits_0^6 \int\limits_0^{2\pi} \frac{-r}{1+r^2} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int\limits_0^6 \frac{-2\pi r}{1+r^2} \mathrm{d}r = \left[-\pi\ln(1+r^2)\right]_0^6 = -\pi\ln(37) \approx -11,3.\end{aligned}$$

Der Fluss bewegt sich bzgl. der Orientierung der Fläche nach unten. Das Ergebnis ist unabhängig von α.

Aufgabe 38: (K)
Gegeben seien das Vektorfeld $f(x,y,z) = (x,y,1)^\top$ und der Körper

$$K = \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq x + y + 3\right\}.$$

(a) Geben Sie Parametrisierungen der glatten Teilflächen F_1, F_2 und F_3 an, die K beranden.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_K \operatorname{div} f(x) \,\mathrm{d}x$ sowie den Fluss durch die Flächen F_1, F_2 und F_3 ohne Verwendung des Integralsatzes von Gauß.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie der Körper K aussieht.

Lösung 38: K ist der Ausschnitt eines Zylinders mit Radius $\sqrt{2}$. Die Bodenfläche F_1 ist gegeben durch den Schnitt der Ebene $z = 0$ mit dem Zylinder, die Mantelfläche bezeichnen wir mit F_2 und die Dachfläche F_3 ist der Schnitt des Zylinders mit der Ebene $z = x + y + 3$.

(a) <u>Parametrisierung der Bodenfläche F_1 :</u>

$$X :\ [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad X(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)^\top.$$

Die äußere Normalenrichtung zu F_1 ist

$$-X_r(r,\varphi) \times X_\varphi(r,\varphi) = -\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Parametrisierung der Mantelfläche F_2 :

$$Y:\ D \to \mathbb{R}^3, \quad Y(\varphi, z) = (\sqrt{2}\cos\varphi,\ \sqrt{2}\sin\varphi,\ z)^\top,$$

wobei $D = \left\{(\varphi, z)^\top \in \mathbb{R}^2:\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le \sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) + 3\right\}$. Die äußere Normalenrichtung zu F_2 ist

$$Y_\varphi(\varphi, z) \times Y_z(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Parametrisierung der Dachfläche F_3 :

$$Z:\ [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad Z(r, \varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ r(\cos\varphi + \sin\varphi) + 3)^\top.$$

Die äußere Normalenrichtung zu F_3 ist

$$Z_r(r, \varphi) \times Z_\varphi(r, \varphi) = -\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi + \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ r(\cos\varphi - \sin\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ r \end{pmatrix}.$$

(b) Fluss durch F_1 nach außen:

$$\iint_{F_1} f(x) \cdot \mathrm{d}o = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\varphi = -2\pi.$$

Fluss durch F_2 nach außen:

$$\begin{aligned}\iint_{F_2} f(x) \cdot \mathrm{d}o &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)+3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\int_0^{2\pi} z\Big|_0^{\sqrt{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)+3} \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{2\pi} 3\,\mathrm{d}\varphi = 12\pi.\end{aligned}$$

Fluss durch F_3 nach außen:

$$\begin{aligned}\iint_{F_3} f(x) \cdot \mathrm{d}o &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} -r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi + r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\varphi = 2\pi.\end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten und mit $\operatorname{div} f(x, y, z) = 2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\iiint_K \operatorname{div} f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{r(\cos\varphi+\sin\varphi)+3} 2r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + 3r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 3r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 12\pi.\end{aligned}$$

Daran sieht man, dass $\iiint_K \operatorname{div} f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z)$ dem (Gesamt-)Fluss von f durch die Flächen F_1, F_2, F_3 nach außen entspricht (Satz von Gauß).

Aufgabe 39: (K)
Mit $R_2 > R_1 > 0$ definieren wir die Halbkugelschale

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad R_1 \leq \|x\|_2 \leq R_2, \quad x_3 > 0\}.$$

Verifizieren Sie für K und das Vektorfeld $F(x) := (x_2, -x_1, \|x\|_2)^\top$, $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ den Gauß'schen Satz:

$$\iint_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x)\, \mathrm{d}o = \iiint_K \operatorname{div} F(x)\, \mathrm{d}x,$$

indem Sie die Gleichheit der beiden Seiten nachrechnen. Wie üblich steht $\|\cdot\|_2$ für die euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$.

Lösung 39:
Wir parametrisieren K mit Kugelkoordinaten, also

$$\Psi(r, \varphi, \vartheta) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \, \sin\vartheta \\ \sin\varphi \, \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad r \in (R_1, R_2),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \vartheta \in [0, \pi/2].$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus drei Teilflächen: den Halbsphären mit Radius R_1 bzw. R_2 und einem Kreisring in der Ebene $x_3 = 0$. Diese bezeichnen wir (in dieser Reihenfolge) mit S_j, $j = 1, 2, 3$.
Zunächst berechnen wir das Integral über S_1. Es ist

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}(R_1, \varphi, \vartheta) \times \frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}(R_1, \varphi, \vartheta) = R_1^2 \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\varphi \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} = -R_1 \sin\vartheta \, \Psi(R_1, \varphi, \vartheta).$$

ein Normalenvektor, der zum Ursprung hin zeigt, und somit einen äußeren Normalenvektor auf der inneren Sphäre darstellt. Es folgt

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F(x) \cdot \nu(x)\, \mathrm{d}o &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} R_1 \, \sin\varphi \, \sin\vartheta \\ -R_1 \, \cos\varphi \, \sin\vartheta \\ R_1 \end{pmatrix} \cdot (-R_1) \sin\vartheta \begin{pmatrix} R_1 \, \cos\varphi \, \sin\vartheta \\ R_1 \, \sin\varphi \, \sin\vartheta \\ R_1 \, \cos\vartheta \end{pmatrix} \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -R_1^3 \, \sin\vartheta \, \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = -2\pi R_1^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = -\pi \, R_1^3. \end{aligned}$$

Das Integral über S_2 berechnet sich analog, lediglich die Richtung der äußeren Normale ändert sich – und mit ihr das Vorzeichen des Flusses:

$$\iint_{S_2} F(x) \cdot \nu(x)\, \mathrm{d}o = \pi \, R_2^3.$$

Einen Normalenvektor auf S_3 erhalten wir mit

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\left(r, \varphi, \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{\partial\Psi}{\partial r}\left(r, \varphi, \frac{\pi}{2}\right) = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix},$$

und dieser hat bereits die passende Orientierung. Somit ist

$$\iint_{S_3} F(x) \cdot \nu(x)\, \mathrm{d}o = -\int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = -2\pi \left[\frac{1}{3} r^3\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{2\pi}{3} \left(R_1^3 - R_2^3\right).$$

Also gilt insgesamt

$$\iint_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x)\, \mathrm{d}o = -\pi R_1^3 + \pi R_2^3 + \frac{2\pi}{3} \left(R_1^3 - R_2^3\right) = \frac{\pi}{3} \left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Wir kommen nun zum Volumenintegral. Zunächst ist

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x) + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x) + \frac{\partial}{\partial x_3} F_3(x) = \frac{x_3}{\|x\|_2} = \frac{r \cos\vartheta}{r} = \cos\vartheta.$$

Durch Transformation auf Kugelkoordinaten erhält man also

$$\begin{aligned}\iiint\limits_K \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{R_1}^{R_2} \cos\vartheta\, r^2\ \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2\,\mathrm{d}r \int\limits_0^{\pi/2} \sin\vartheta\ \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{R_1}^{R_2}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right),\end{aligned}$$

was mit dem oben errechneten Ergebnis übereinstimmt.

Aufgabe 40: Die Oberfläche M sei definiert durch

$$M = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi,\ z = \sin(x)\sin(y)\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von M.

(b) Bestimmen Sie den Fluss

$$\int_M F(x)\cdot\nu(x)\mathrm{d}o,$$

wobei die dritte Komponente des Normalenvektors ν negativ sein soll und das Vektorfeld F durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix}\sin(x)\cos(y)\\ -\sin(y)\cos(x)\\ 1\end{pmatrix}$$

gegeben sei.

Lösung 40:

(a) Wir lesen direkt aus der Definiton der Menge M die Parametrisierung

$$X(u,v) = \begin{pmatrix}u\\ v\\ \sin(u)\sin(v)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \in D = \{(u,v)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant v \leqslant \pi,\ 0 \leqslant u \leqslant v\}$$

ab.

(b) Wir bestimmen die partiellen Ableitungen der Parametrisierung X bezüglich u und v

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \cos(u)\sin(v)\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ \sin(u)\cos(v)\end{pmatrix}$$

ab und bestimmen die Normalenrichtung

$$\frac{\partial X}{\partial u}\times\frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \cos(u)\sin(v)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\ 1\\ \sin(u)\cos(v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos(u)\sin(v)\\ -\sin(u)\cos(v)\\ 1\end{pmatrix}.$$

Da die dritte Komponente negativ sein soll, berechnen wir weiter

$$\begin{aligned}\int_M F(x)\cdot\nu(x)\mathrm{d}o &= \int_B F(X(u,v))\cdot\Big(-\frac{\partial X}{\partial u}\times\frac{\partial X}{\partial v}\Big)\mathrm{d}(u,v) \\ &= \int_0^\pi\int_0^v \begin{pmatrix}\sin(u)\cos(v)\\ -\sin(v)\cos(u)\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(u)\sin(v)\\ \sin(u)\cos(v)\\ -1\end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\int_0^\pi\int_0^v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$