Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

PD Dr. F. Hettlich
Dr. L. Fink

(K) A43	(K) A45	Σ

Abgabegruppe

Karlsruhe, den 9. Januar 2026

Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: .... Matr.-Nr.: ....

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 41: Für ein festes $r \in (0,1)$ betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ auf dem Kreisring

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : r \leq \|x\|_2 \leq 1\},$$

wobei ν den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂D bezeichne. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x)\,\mathrm{d}s$$

einerseits direkt und andererseits mit Hilfe der ersten Greenschen Formel.

Aufgabe 42: Seien

$$f(x) = \frac{x_1^2}{16}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad g(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 4)^2,$$

und $K \subseteq \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 2. Berechnen Sie das folgende Integral

$$\frac{1}{16}\iint\limits_K g(x)\,\Delta f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die zweite Green'sche Identität.

Aufgabe 43: (K)

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x_1, x_2, x_3) = (-x_3x_2, -2x_3(x_1 + 2x_2), 3x_3 + 1)^\top$ und die Fläche $S = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}$. Verifizieren Sie den Satz von Stokes,

$$\iint_S \mathrm{rot}F(x) \cdot \nu_S(x)\,\mathrm{d}o = \int_{\partial S} F(x) \cdot \tau(x)\,\mathrm{d}s,$$

indem Sie die Gleichheit der beiden Seite nachrechnen.

Aufgabe 44: Gegeben sei das Geschwindigkeitsfeld $f(x,y,z) = \left(x^2y^2, -z, y^2 + \frac{1}{x-z}\right)^\top$ einer turbulenten Strömung, sowie die Schnittfläche S des Zylinders Z mit der Ebene E, wobei

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 9 \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ x - z = 1 \right\}.$$

Verifizieren Sie den Satz von Stokes anhand dieses Beispiels, indem Sie

(a) das Integral über alle Wirbelstärken $\iint\limits_S \mathrm{rot} f \cdot \nu\,\mathrm{d}o$, sowie

(b) die Zirkulation $\int\limits_{\partial S} f \cdot \mathrm{d}\ell$ berechnen.

Aufgabe 45: (K)

Wir definieren den Zylinder $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \; |x_3| \leq 2\}$ sowie die Fläche

$$S := \partial Z \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_3^2 \leq 1, \; x_2 > 0\} .$$

Berechnen Sie

$$\int_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x) \, \mathrm{d}o$$

mit $F(x) = (x_1 x_3^2, \, x_1 x_2 x_3, \, -x_1^2 x_3)^\top, \; x \in \mathbb{R}^3$, und dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor ν_S unter Verwendung des Satzes von Stokes.

Hinweis: $\int \sin^2(x) \cos^2(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int (1 - \cos(4x)) \mathrm{d}x$.

Abgabe bis Montag, den 19. Januar 2026, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung*.