

9. Übungsblatt Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 41: Für ein festes $r \in (0, 1)$ betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2)$ auf dem Kreisring

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : r \leq \|x\|_2 \leq 1\},$$

wobei ν den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂D bezeichne. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) \, ds$$

einerseits direkt und andererseits mit Hilfe der ersten Greenschen Formel.

Lösung 41:

Direkte Rechnung: Es ist

$$\nabla f(x) = \frac{(x_1, x_2)^\top}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Wir berechnen die Richtungsableitung in Normalenrichtung. Für die Berechnung spalten wir das Kurvenintegral in einen Teil über den äußeren und einen Teil über den inneren Kreisrand auf. Für den äußeren Kreisrand benutzen wir die Parametrisierung des Einheitskreises

$$x(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Der Tangentialvektor ist durch $\dot{x}(\varphi) = (\dot{x}_1(\varphi), \dot{x}_2(\varphi))^\top$ und der nach außen gerichtete (vom Ursprung wegzeigende) Normalenvektor durch $n(\varphi) = (\dot{x}_2(\varphi), -\dot{x}_1(\varphi))^\top$ gegeben. Durch Normierung erhalten wir den äußeren Normaleneinheitsvektor

$$\nu(\varphi) = \frac{n(\varphi)}{\|\dot{x}(\varphi)\|_2} = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top.$$

Somit ergibt sich für das Kurvenintegral über den äußeren Kreisrand

$$\int_{\|x\|_2=1} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) \, ds = \int_0^{2\pi} \nabla f(x(\varphi)) \cdot \nu(\varphi) \|\dot{x}(\varphi)\|_2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \, d\varphi = 2\pi.$$

Den inneren Kreisrand parametrisieren wir durch $x(\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^\top$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Der Normalenvektor muss wieder vom Inneren des Kreisrings „weg“ zeigen, d.h. in Richtung Ursprung, weshalb wir $n(\varphi) = (-\dot{x}_2(\varphi), \dot{x}_1(\varphi))^\top$ verwenden. Dann ist

$$\int_{\|x\|_2=r} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix} r \, d\varphi = -2\pi.$$

Insgesamt ist also

$$\int_{\|x\|_2=\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) \, ds = 0.$$

Berechnung mit 1. Greenscher Formel: Man kann die erste Green'sche Formel

$$\iint_D (\nabla g(x) \nabla f(x) + g(x) \Delta f(x)) \, dx = \int_{\partial D} g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} \, ds$$

mit $g \equiv 1$ anwenden. Da

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left[\frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

und $\nabla g \equiv 0$, folgt sofort

$$\int_{\partial D} g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} ds = \iint_D (\nabla g(x) \nabla f(x) + g(x) \Delta f(x)) dx = 0.$$

Aufgabe 42: Seien

$$f(x) = \frac{x_1^2}{16} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad g(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 4)^2,$$

und $K \subseteq \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 2. Berechnen Sie das folgende Integral

$$\frac{1}{16} \iint_K g(x) \Delta f(x) dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die zweite Green'sche Identität.

Lösung 42: Nach der zweiten Green'schen Identität gilt

$$\iint_K g(x) \Delta f(x) dx = \int_{\partial K} [g(x) (\nabla f(x) \cdot \nu(x)) - f(x) (\nabla g(x) \cdot \nu(x))] dl + \iint_K f(x) \Delta g(x) dx.$$

Auf dem Rand ∂K gilt $x_1^2 + x_2^2 = 4$, also verschwindet g auf ∂K und es folgt

$$\int_{\partial K} \underbrace{g(x)}_{=0} (\nabla f(x) \cdot \nu(x)) dl = 0.$$

Da $\nabla g(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 4)(4x_1, 4x_2)^\top$, verschwindet $(\nabla g(x) \cdot \nu(x))$ auf dem Rand ∂K ebenfalls, und somit ist auch

$$\int_{\partial K} f(x) \underbrace{(\nabla g(x) \cdot \nu(x))}_{=0} dl = 0.$$

Es bleibt nur noch das letzte Integral mit f und $\Delta g(x) = \operatorname{div}(\nabla g(x)) = 16(x_1^2 + x_2^2 - 2)$. Dieses berechnen wir mit Hilfe von Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \iint_K f(x) \Delta g(x) dx &= \frac{1}{16} \iint_K x_1^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (x_1^2 + x_2^2 - 2) dx \\ &= \frac{1}{16} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi r (r^2 - 2) r d\varphi dr \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^2 (r^6 - 2r^4) dr \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2}(\varphi + \cos \varphi \sin \varphi) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{7} r^7 - \frac{2}{5} r^5 \right]_0^2 = \frac{12}{35} \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 43: (K)

Gegeben sei das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x_1, x_2, x_3) = (-x_3 x_2, -2x_3(x_1 + 2x_2), 3x_3 + 1)^\top$ und die Fläche $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$. Verifizieren Sie den Satz von Stokes,

$$\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x) do = \int_{\partial S} F(x) \cdot \tau(x) ds,$$

indem Sie die Gleichheit der beiden Seite nachrechnen.

Lösung 43:

Linke Seite: Eine Parametrisierung der Fläche S ist gegeben durch

$$X(\varphi, x_3) = (\cos \varphi, \sin \varphi, x_3)^\top, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq x_3 \leq 1.$$

Für den Normalenvektor ergibt sich

$$(X_\varphi \times X_{x_3})(\varphi, x_3) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wir sehen, dass dieser nach außen zeigt. Die Rotation von F ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x_1, x_2, x_3) &= \operatorname{rot}(-x_3 x_2, -2x_3(x_1 + 2x_2), 3x_3 + 1)^\top = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)^\top \\ &= (0 + 2(x_1 + 2x_2), -x_2 - 0, -2x_3 + x_3)^\top = (2(x_1 + 2x_2), -x_2, -x_3)^\top. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x) \, d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \operatorname{rot} F(X(\varphi, x_3)) \cdot (X_\varphi \times X_{x_3})(\varphi, x_3) \, d\varphi \, dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2(\cos \varphi + 2 \sin \varphi) \\ -\sin \varphi \\ -x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \, d\varphi \, dx_3 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2 \sin(2\varphi) \, d\varphi \, dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi + \cos(2\varphi) + 2 \sin(2\varphi) \, d\varphi \, dx_3 = \int_0^1 1 \, dx_3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi + \cos(2\varphi) + 2 \sin(2\varphi) \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \pi. \end{aligned}$$

Rechte Seite: Wir haben eine untere und eine obere Randkurve, die gegeben sind durch

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\} \quad \text{und} \quad C_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}.$$

Damit der Normalenvektor nach außen zeigt, orientieren wir die untere Randkurve C_1 so, dass sie entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die obere Randkurve C_2 wird im Uhrzeigersinn durchlaufen. Parametrisierungen der Randkurven sind gegeben durch

$$X_{C_1}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^\top \quad \text{und} \quad X_{C_2}(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^\top, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F(x) \cdot \tau(x) \, ds &= \int_0^{2\pi} F(X_{C_1}(t)) \cdot \dot{X}_{C_1}(t) \, dt + \int_0^{2\pi} F(X_{C_2}(t)) \cdot \dot{X}_{C_2}(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -0 \sin t \\ -2 \cdot 0(\cos t + 2 \sin t) \\ 3 \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -2(\cos t - 2 \sin t) \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} -\sin^2 t + 2 \cos^2 t - 4 \sin t \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \cos(2t) - 2 \sin 2t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 44: Gegeben sei das Geschwindigkeitsfeld $f(x, y, z) = \left(x^2 y^2, -z, y^2 + \frac{1}{x-z}\right)^\top$ einer turbulenten Strömung, sowie die Schnittfläche S des Zylinders Z mit der Ebene E , wobei

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - z = 1 \right\}.$$

Verifizieren Sie den Satz von Stokes anhand dieses Beispiels, indem Sie

(a) das Integral über alle Wirbelstärken $\iint_S \operatorname{rot} f \cdot \nu \, d\sigma$, sowie

(b) die Zirkulation $\int_{\partial S} f \cdot d\ell$ berechnen.

Lösung 44:

(a) Die Fläche S kann in folgender Weise durch X parametrisiert werden:

$$X : [0, 3] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, X(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r \cos \varphi - 1)^\top.$$

Weiter berechnet man:

$$X_r(r, \varphi) \times X_\varphi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

sowie $(\operatorname{rot} f)(x, y, z) = \left(2y + 1, -\frac{1}{(x-z)^2}, -2x^2y\right)^\top$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} f \cdot \nu \, d\sigma &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2r \sin \varphi + 1 \\ -1 \\ -2r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} d\varphi \, dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (-2r^2 \sin \varphi - r - 2r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi \, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (-r) d\varphi \, dr = -9\pi. \end{aligned}$$

(b) Die Randkurve ∂F kann in folgender Weise durch C parametrisiert werden:

$$C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, C(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 3 \cos t - 1)^\top.$$

Damit ist $\dot{C}(t) = 3(-\sin t, \cos t, -\sin t)^\top$ und weiter

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} f \cdot d\ell &= 3 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 81 \cos^2 t \sin^2 t \\ 1 - 3 \cos t \\ 9 \sin^2 t + 1 \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (-81 \sin^3 t \cos^2 t + \cos t - 3 \cos^2 t - 9 \sin^3 t - \sin t) dt \\ &= -9 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = -9\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 45: (K)

Wir definieren den Zylinder $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4, |x_3| \leq 2\}$ sowie die Fläche

$$S := \partial Z \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 \leq 1, x_2 > 0\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x) \, d\sigma$$

mit $F(x) = (x_1 x_3^2, x_1 x_2 x_3, -x_1^2 x_3)^\top$, $x \in \mathbb{R}^3$, und dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor ν_S unter Verwendung des Satzes von Stokes.

Hinweis: $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos(4x)) dx$.

Lösung 45:

Laut dem Satz von Stokes, der

$$\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x) \, d\sigma = \int_{\partial S} F(x) \cdot d\ell$$

lautet, lässt sich das vorgegebene Flächenintegral berechnen, indem man das entsprechende Kurvenintegral über den Rand von S berechnet.

Man kann sich S wie eine zylinderförmige geschlossene Konservendose mit Radius 2 und Höhe 4 vorstellen, in deren Mantelfläche auf halber Höhe mit einem zylinderförmigen Werkzeug vom Radius 1 ein Loch hineingestanz wurde. Der Rand dieses Lochs ist der Rand ∂S von S . In Zeichen lautet seine Darstellung

$$\partial S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 4, x_1^2 + x_3^2 = 1, x_2 > 0\}.$$

Über eine Parametrisierung des \mathbb{R}^3 in Zylinderkoordinaten bezüglich der x_2 -Achse, also

$$x_1 = r \sin \varphi, \quad x_2 = z, \quad x_3 = r \cos \varphi, \quad 0 \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R},$$

übersetzen sich diese Bedingungen zu

$$\begin{aligned} & (r \sin \varphi)^2 + z^2 = 4, \quad (r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2 = 1, \quad z > 0, \\ \Leftrightarrow & \quad z^2 = 4 - r^2 \sin^2 \varphi, \quad r = 1, \quad z > 0, \\ \Leftrightarrow & \quad z = \sqrt{4 - \sin^2 \varphi}, \quad r = 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$x(\varphi) := \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \sqrt{4 - \sin^2 \varphi} \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

eine Parametrisierung von ∂S .

Die Fläche S ist nach Voraussetzung so orientiert, dass der Normalenvektor nach außen zeigt. Durchläuft man ihren Rand ∂S gemäß obiger Parametrisierung, liegt S rechterhand, was einer negativen Orientierung des Randes entspricht. Um die im Satz von Stokes vorausgesetzte positive Orientierung von Rand zu Fläche zu erhalten, kehren wir das Vorzeichen des unten folgenden Kurvenintegrals um.

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x) \, d\sigma &= \int_{\partial S} F(x) \cdot d\ell = - \int_0^{2\pi} F(x(\varphi)) \cdot \dot{x}(\varphi) \, d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{4 - \sin^2 \varphi} \\ - \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{4 - \sin^2 \varphi}} \\ - \sin \varphi \end{pmatrix} \, d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ &= - \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (1 - \cos(2\varphi))(1 + \cos(2\varphi)) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} 1 - \cos(4\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{8} \left[\varphi - \frac{1}{4} \sin(4\varphi) \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$