

(K) A48	(K) A50	Σ

Abgabegruppe

PD Dr. F. Hettlich
 Dr. L. Fink

Karlsruhe, den 16. Januar 2026

Matr.-Nr.: Matr.-Nr.: Matr.-Nr.:

10. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

Aufgabe 46: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(x) = \left(x_1^2 + x_1 x_2, \frac{1}{2} x_1^2 + x_2 + a x_3, b x_2 \right)^\top \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie den Parameter b in Abhängigkeit von a so, dass F konservativ ist. Berechnen Sie in diesem Fall ein Potential zu F .

Aufgabe 47:

(a) Geben Sie bei den folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im \mathbb{R}^2 an, ob sie linear, quasilinear oder keines von beiden sind:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 3x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_1^2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + x_1 u(x) = x_1 x_2, & \text{(ii)} \quad & u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right)^2 + u(x) = 0, \\ \text{(iii)} \quad & 2x_2 u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - u(x)^2 = e^{x_1 + x_2}. \end{aligned}$$

(b) Gegeben seien die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + 4 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + 3 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - 5 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + \sin(x_1 + x_2) u(x) = \cos(x_1 - x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \text{(ii)} \quad & x_3 \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} - 2x_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \ln|x_1 + x_2| = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zu jeder der Differentialgleichungen den Hauptteil und geben Sie an, für welche Punkte im \mathbb{R}^2 (bzw. \mathbb{R}^3) die Differentialgleichungen elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind.

Aufgabe 48: (K)

Finden Sie mit dem Charakteristikenverfahren eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + (x_1^2 + x_2^2) u(x) = 0, \quad u(x_1, -x_1^2) = \exp\left(-\frac{1}{2} x_1^2\right), \quad x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 49: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + (x_2 - 1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + (x_2 - x_1) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u(x_1, x_1) &= x_1 - 1, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mit dem Charakteristikenverfahren.

Aufgabe 50: (K)

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$(x_1 + u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - u(x) = 0.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens diejenige Lösung $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung, die die Bedingung $u(t, t) = t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Abgabe bis Montag, den 26. Januar 2026, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung*.