10. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 46: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(x) = \left(x_1^2 + x_1x_2,\ \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + ax_3,\ bx_2\right)^\top \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 .$$

Bestimmen Sie den Parameter b in Abhängigkeit von a so, dass F konservativ ist. Berechnen Sie in diesem Fall ein Potential zu F.

Lösung 46: F ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Damit gilt: Die Bedingung $\mathrm{rot}F = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass ein Potential $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ existiert mit $F(x) = \nabla f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten also

$$\mathrm{rot}\, F = \begin{pmatrix} b-a \\ 0-0 \\ x_1 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Bedingung ist erfüllt für $b = a$, also für

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1x_2 \\ x_1^2/2 + x_2 + ax_3 \\ ax_2 \end{pmatrix}$$

und somit gilt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1x_2 \\ x_1^2/2 + x_2 + ax_3 \\ ax_2 \end{pmatrix} .$$

Durch Integration der ersten Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = F_1(x) = x_1^2 + x_1x_2$ ergibt sich für f die Bedingung

$$f(x) = \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2}x_2 + c_1(x_2, x_3). \tag{1}$$

Ableiten nach x_2 und Vergleich mit $F_2(x)$ ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{\partial c_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} \stackrel{!}{=} F_2(x) = \frac{x_1^2}{2} + x_2 + ax_3,$$

d.h.

$$\frac{\partial c_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = x_2 + ax_3 \quad \stackrel{\text{Int.}}{\Rightarrow} \quad c_1(x_2, x_3) = \frac{x_2^2}{2} + ax_2x_3 + c_2(x_3).$$

Einsetzen von $c_1(x_2, x_3)$ in (1) liefert

$$f(x) = \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2}x_2 + \frac{x_2^2}{2} + ax_2x_3 + c_2(x_3).$$

Ableiten nach x_3 und Vergleich mit $F_3(x)$ führt zu

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = ax_2 + c_2'(x_3) \stackrel{!}{=} F_3(x) = ax_2,$$

d.h

$$c_2'(x_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2(x_3) = C.$$

Da wir nur an einem Potential interessiert sind, wählen wir $C = 0$. Insgesamt erhalten wir somit

$$f(x) = \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2}x_2 + \frac{x_2^2}{2} + ax_2x_3.$$

Aufgabe 47:

(a) Geben Sie bei den folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^2$ an, ob sie linear, quasilinear oder keines von beiden sind:

$$\text{(i)}\quad 3x_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_1^2\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + x_1 u(x) = x_1 x_2, \qquad \text{(ii)}\quad u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right)^2 + u(x) = 0,$$

$$\text{(iii)}\quad 2x_2 u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - u(x)^2 = e^{x_1+x_2}.$$

(b) Gegeben seien die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\text{(i)}\quad 2\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + 4\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + 3\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - 5\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + \sin(x_1+x_2)u(x) = \cos(x_1-x_2)\,, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\text{(ii)}\quad x_3\frac{\partial u(x)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + x_1x_2\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} - 2x_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \ln|x_1+x_2| = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie zu jeder der Differentialgleichungen den Hauptteil und geben Sie an, für welche Punkte im $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) die Differentialgleichungen elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind.

Lösung 47:

(a) Die dritte partielle Differentialgleichung ist quasilinear, da die pDGL nur linear von den Ableitungsfunktionen abhängt. Die erste Gleichung hingegen ist linear (und damit auch quasilinear) und die zweite ist weder linear noch quasilinear.

(b) (i) Der Hauptteil ist $2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Man berechnet die Eigenwerte der zugehörigen symmetrischen Matrix A:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Lösungen sind $\lambda = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{17}) > 0$. Also ist die partielle Differentialgleichung elliptisch.

(ii) Hier ist der Hauptteil $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$. Wir erkennen, dass ein Eigenwert von x_1 und x_2 abhängt:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & x_1x_2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(x_1x_2-\lambda) \stackrel{!}{=} 0.$$

Für $x_1x_2 > 0$ ist die pDGL elliptisch, für $x_1x_2 < 0$ hyperbolisch und für $x_1x_2 = 0$ parabolisch.

Aufgabe 48: (K)
Finden Sie mit dem Charakteristikenverfahren eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + (x_1^2+x_2^2)u(x) \;=\; 0\,, \qquad u(x_1,-x_1^2) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}x_1^2\right)\,, \qquad x_1>0, x_2\in\mathbb{R}.$$

Lösung 48: Das System der charakteristischen Differentialgleichungen ist mit $w(s) := u(k_1(s), k_2(s))$:

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s), \\ k_2'(s) &= k_2(s), \\ w'(s) &= -(k_1(s)^2 + k_2(s)^2)\,w(s). \end{aligned}$$

Es folgt $k_1(s) = c_1\,e^s$, $k_2(s) = c_2\,e^s$ und somit

$$w'(s) = -(c_1^2+c_2^2)\,e^{2s}\,w(s).$$

Durch Separation und Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{w'(s)}{w(s)} = -(c_1^2+c_2^2)\,e^{2s} \quad &\Rightarrow \quad \ln|w(s)| = -(c_1^2+c_2^2)\int e^{2s}\mathrm{d}s \\ &\Rightarrow \quad \ln|w(s)| = -\frac{1}{2}(c_1^2+c_2^2)e^{2s} + \tilde{c}_3 = -\frac{1}{2}(k_1(s)^2+k_2(s)^2) + \tilde{c}_3\,. \end{aligned}$$

Dies liefert die Lösung
$$w(s) = c_3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(k_1(s)^2 + k_2(s)^2\right)\right).$$
Für $s = 0$ sollen die Charakteristiken die Anfangskurve (die Parametrisierung der Raum-Anfangskurve ist gegeben durch $t \mapsto \left(t, -t^2, \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\right)^\top, t > 0$) schneiden. Dies führt auf
$$\begin{aligned}
t &\overset{!}{=} k_1(0) = c_1 && \Rightarrow\ c_1 = t,\\
-t^2 &\overset{!}{=} k_2(0) = c_2 && \Rightarrow\ c_2 = -t^2,\\
\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) &\overset{!}{=} w(0) = c_3 \exp\left(-\frac{1}{2}(t^2+t^4)\right) && \Rightarrow\ c_3 = \exp\left(\frac{1}{2}t^4\right).
\end{aligned}$$
Damit erhalten wir eine Parametrisierung $(x_1(s,t), x_2(s,t), u(s,t))^\top, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$, der Lösungsfläche durch
$$\begin{aligned}
x_1(s,t) &= k_1(s,t) = te^s,\\
x_2(s,t) &= k_2(s,t) = -t^2e^s,\\
u(s,t) &= w(s,t) = \exp\left(\frac{1}{2}t^4\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1(s,t)^2 + x_2(s,t)^2\right)\right).
\end{aligned}$$
Die erste und zweite Gleichung liefern zusammen
$$t = -\frac{x_2}{x_1}.$$
Setzt man jetzt alles ein, erhält man
$$u(x_1,x_2) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{x_2^4}{x_1^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right).$$

Aufgabe 49: Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$\begin{aligned}
x_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + (x_2-1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + (x_2 - x_1) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,\\
u(x_1,x_1) &= x_1 - 1, \quad x_1 \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$
mit dem Charakteristikenverfahren.

Lösung 49: Das charakteristische Differentialgleichungssystem lautet
$$\begin{aligned}
&(1) \qquad k_1'(s) = k_2(s),\\
&(2) \qquad k_2'(s) = k_2(s) - 1,\\
&(3) \qquad w'(s) = -(k_2(s) - k_1(s)).
\end{aligned}$$
Wir betrachten die zweite Gleichung $k_2'(s) = k_2(s) - 1$. Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist c_2e^s. Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mittels Variation der Konstanten. Einsetzen von $c_2(s)e^s$ in die Differentialgleichung liefert
$$c_2'(s)e^s + c_2(s)e^s = c_2(s)e^s - 1.$$
Also,
$$c_2'(s) = -e^{-s} \text{ und somit } c_2(s) = e^{-s}.$$
Damit erhalten wir $k_2(s) = c_2e^s + 1$.
Durch Integrieren von (1) und (3) werden k_1 und w bestimmt:
$$k_1(s) = c_2e^s + s + c_1, \qquad w(s) = \frac{s^2}{2} - s + c_1s + c_3.$$
Für $s = 0$ sollen die Charakteristiken die Anfangskurve (die Parametrisierung der Raum-Anfangskurve ist gegeben durch $t \mapsto (t,t,t-1)^\top, t \in \mathbb{R}$) schneiden. Dies führt auf
$$\begin{aligned}
t &\overset{!}{=} k_1(0) = c_2 + c_1, && \Rightarrow c_1 = 1,\\
t &\overset{!}{=} k_2(0) = c_2 + 1, && \Rightarrow c_2 = t - 1,\\
t - 1 &\overset{!}{=} w(0) = c_3.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine Parametrisierung $(x_1(s,t), x_2(s,t), u(s,t))^\top$, $s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$, der Lösungsfläche durch

$$\begin{aligned} x_1(s,t) &= k_1(s,t) = (t-1)e^s + s + 1, \\ x_2(s,t) &= k_2(s,t) = (t-1)e^s + 1, \\ u(s,t) &= w(s,t) = \frac{s^2}{2} - s + s + (t-1) = \frac{s^2}{2} + (t-1). \end{aligned}$$

Die erste und zweite Gleichung liefern zusammen

$$x_1(s,t) - x_2(s,t) = s.$$

$(t-1)$ kann aus der zweiten Gleichung bestimmt werden

$$t - 1 = \frac{x_2(s,t) - 1}{e^{x_1 - x_2}}.$$

Damit haben wir

$$u(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} + \frac{x_2 - 1}{e^{x_1 - x_2}}.$$

Aufgabe 50: (K)
Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$(x_1 + u(x))\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - u(x) = 0\,.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens diejenige Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung, die die Bedingung $u(t,t) = t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung 50: Wir wenden zur Berechnung von u das Charakteristikenverfahren an. Zu einer Kurve $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ setzen wir $w(s) = u(k(s))$ und erhalten das charakteristische System

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s) + w(s) \\ k_2'(s) &= -(k_2(s))^2 \\ w'(s) &= w(s)\,. \end{aligned}$$

Die zweite Differentialgleichung führt durch Separation und Integration auf

$$-k_2^{-1}(s) = \int \frac{k_2'(s)}{(k_2(s))^2}\,\mathrm{d}s = -\int \mathrm{d}s = -(s + c_2)$$

und somit ergeben sich Lösungen

$$k_2(s) = \frac{1}{s + c_2}\,.$$

Auch die dritte Differentialgleichung ist separabel, und es ergibt sich analog $w(s) = c_3 e^s$.
Es bleibt die erste, inhomogene lineare Differentialgleichung zu lösen. Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zu $h(s) = ce^s$. Durch Variation der Konstanten, d.h. dem Ansatz $k_1(s) = c(s)e^s$, erhalten wir mit $w(s) = c_3 e^s$ die Gleichung $(c'(s) + c(s))e^s = c(s)e^s + c_3 e^s$. Also ist $c'(s) = c_3$ bzw. $c(s) = c_3 s + c_1$. Insgesamt ergibt sich

$$k_1(s) = c_3 s e^s + c_1 e^s\,.$$

Im nächsten Schritt berücksichtigen wir die Anfangsbedingung. Setzen wir einen Schnitt der charakteristischen Kurve mit der Anfangskurve $\gamma(t) = (t, t, t^2)$ bei $s = 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} t &= k_1(0) = c_1 \\ t &= k_2(0) = \frac{1}{c_2} \\ t^2 &= w(0) = c_3\,. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert in Abhängigkeit von s, t die Charakteristiken

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1(s,t) = t^2 s e^s + t e^s = (st + 1)t e^s\,, \\ x_2 &= k_2(s,t) = \frac{1}{s + \frac{1}{t}} = \frac{t}{st + 1} \end{aligned}$$

und die Lösungsfunktion

$$u(k(s,t)) = t^2 e^s \,.$$

Um diese nach x_1, x_2 aufzulösen, beobachten wir identische Faktoren. Eine Multiplikation etwa liefert

$$x_1 x_2 = (st+1)te^s \, \frac{t}{st+1} = t^2 e^s = u(k(s,t))\,,$$

also ist die Lösung gegeben durch $u(x) = x_1 x_2$.