

(K) A54	(K) A55	Σ

Abgabegruppe
--------------

PD Dr. F. Hettlich  
 Dr. L. Fink

Karlsruhe, den 23. Januar 2026

Matr.-Nr.: ..... Matr.-Nr.: ..... Matr.-Nr.: .....

## 11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik III für MACH, CIW, BIW, MWT und MIT

**Aufgabe 51:** Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung

$$x_1 x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = x_1, \quad x_1, x_2 > 0.$$

Geben Sie unter allen durch  $z = u(x_1, x_2)$  gegebenen Lösungsflächen diejenige an, welche die Kurve enthält, die durch  $x_1 = 1$  und  $2x_2 z = 3$  gegeben ist.

**Aufgabe 52:**

(a) Bestimmen Sie eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , sodass die Funktion mit  $u(x, t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$  Lösung der Diffusionsgleichung

$$a \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

für  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $t > 0$  ist.

(b) Es sei  $d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Für welche Vektoren  $p \in \mathbb{R}^3$  ist das Vektorfeld  $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $E(x) = p e^{i \cdot d \cdot x}$  Lösung der zeitharmonischen Maxwellgleichungen (mit  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )

$$\operatorname{rot} E - i |d| H = 0, \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} H + i |d| E = 0.$$

**Aufgabe 53:** Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes  $u(x, y) = v(x)w(y)$  Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$2y \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - (1 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + 4yu(x, y) = 0.$$

**Aufgabe 54: (K)**

Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = 0$$

mit den Randbedingungen  $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0$ ,  $u(x_1, 1) = \sin^3(\pi x_1) \cosh(3\pi) - 2 \sin(2\pi x_1)$  für  $x_1 \in [0, 1]$  und  $u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0$  für  $x_2 \in [0, 1]$  mit Hilfe eines Separationsansatzes.

*Hinweis:* Es gilt  $\sin^3(z) = \frac{3}{4} \sin(z) - \frac{1}{4} \sin(3z)$ .

**Aufgabe 55: (K)**

Gegeben ist das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \text{in } (0, 1) \times (0, \infty)$$

mit  $u(0, t) = 0 = u(1, t)$  für  $t > 0$  und

$$u(x, 0) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes eine auf  $[0, 1] \times [0, \infty)$  beschränkte Lösung des Problems.

**Abgabe** bis Montag, den 2. Februar 2026, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (Geb. 20.30). Weitere Informationen zur Abgabe finden Sie im Ilias-Kurs unter *Übung*.