

11. Übungsblatt Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 51: Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung

$$x_1 x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = x_1, \quad x_1, x_2 > 0.$$

Geben Sie unter allen durch $z = u(x_1, x_2)$ gegebenen Lösungsflächen diejenige an, welche die Kurve enthält, die durch $x_1 = 1$ und $2x_2 z = 3$ gegeben ist.

Lösung 51: Das System der charakteristischen Differentialgleichungen ist mit $w(s) := u(k_1(s), k_2(s))$:

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s) k_2(s), \\ k_2'(s) &= -k_2^2(s), \\ w'(s) &= k_1(s). \end{aligned}$$

Integration der 2. Gleichung liefert $k_2(s) = 1/(s + c_2)$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt $k_1(s) = c_1 (s + c_2)$. Mit der dritten Gleichung folgt schließlich $w(s) = (c_1/2) (s + c_2)^2 + c_3$.

Die Integrationskonstanten c_j sind jetzt so zu bestimmen, dass die gegebene Kurve in der Lösungsfläche enthalten ist. Dazu parametrisieren wir die Kurve durch

$$t \mapsto \left(1, t, \frac{3}{2t}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für den Parameterwert $s = 0$, soll $(k_1(s), k_2(s), w(s))$ auf dieser Kurve liegen, somit folgt

$$c_1 c_2 = 1, \quad \frac{1}{c_2} = t, \quad \frac{c_1 c_2^2}{2} + c_3 = \frac{3}{2t}.$$

Auflösen: $c_2 = 1/t$, $c_1 = t$, $c_3 = 1/t$. Einsetzen liefert die Parameterdarstellung der Lösungsfläche

$$(k_1(s, t), k_2(s, t), w(s, t)) = \left(1 + st, \frac{t}{1 + st}, \frac{ts^2}{2} + s + \frac{3}{2t}\right).$$

Die Gleichungen für $x_1 = k_1(s, t)$ und $x_2 = k_2(s, t)$ lassen sich nach s und t auflösen mit $t(x_1, x_2) = x_1 x_2$ und $s(x_1, x_2) = (x_1 - 1)/(x_1 x_2)$. Damit folgt die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x_1, x_2) = w(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)) = \frac{(x_1 - 1)^2}{2x_1 x_2} + \frac{x_1 - 1}{x_1 x_2} + \frac{3}{2x_1 x_2} = \frac{1}{2x_1 x_2} (x_1^2 + 2).$$

Aufgabe 52:

(a) Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion mit $u(x, t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ Lösung der Diffusionsgleichung

$$a \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$ ist.

(b) Es sei $d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Für welche Vektoren $p \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $E(x) = p e^{i d \cdot x}$ Lösung der zeitharmonischen Maxwellgleichungen (mit $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)

$$\operatorname{rot} E - i |d| H = 0, \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} H + i |d| E = 0.$$

Lösung 52: (a) Wir berechnen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \left(+ \frac{|x|^2}{2t^3} - \frac{1}{t^2} \right) e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x, t) &= \frac{-2x_1}{2t^2} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x, t) &= \frac{-2x_2}{2t^2} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x, t) &= \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{x_1^2}{t^3} \right) e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x, t) &= \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{x_2^2}{t^3} \right) e^{-\frac{|x|^2}{2t}}.\end{aligned}$$

Es lässt sich die Bedingung $a = 2$ ablesen, damit die Differentialgleichung erfüllt ist.

(b) Zunächst bestimmen wir die Rotation von E . Es ist

$$\operatorname{rot} E(x) = i \begin{pmatrix} p_3 d_2 - p_2 d_3 \\ p_1 d_3 - p_3 d_1 \\ p_2 d_1 - p_1 d_2 \end{pmatrix} e^{i d \cdot x} = i (d \times p) e^{i d \cdot x}.$$

Also folgt mit der ersten partiellen Differentialgleichung $H(x) = (d \times p) e^{i d \cdot x} / |d|$. Berechnen wir daraus die Rotation des Vektorfelds H , so ergibt sich

$$\operatorname{rot} H(x) = i \frac{(d \times (d \times p))}{|d|} e^{i d \cdot x}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die zweite partielle Differentialgleichung ein und erhalten die Bedingung

$$i |d| p e^{i d \cdot x} = -i \frac{d \times (d \times p)}{|d|} e^{i d \cdot x}.$$

Es gilt der Zusammenhang $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ und somit erhalten wir

$$|d|^2 p = -d \times (d \times p) = -[(d \cdot p)d - (d \cdot d)p] = |d|^2 p - (d \cdot p)d.$$

Dies gilt genau dann, wenn $(d \cdot p)d = 0$ ist bzw. $d \cdot p = 0$ gilt. Die Funktion E ist somit Lösung der Maxwellgleichungen, wenn p senkrecht steht auf der Richtung d .

Bemerkung: Funktionen in der Form wie E stellen ebene Wellen dar mit einer Wellenfront senkrecht zur Richtung d und der sogenannten Polarisierungsrichtung $p/|p|$.

Aufgabe 53: Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x, y) = v(x)w(y)$ Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$2y \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - (1 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + 4yu(x, y) = 0.$$

Lösung 53: Eingesetzt in die Differentialgleichung $2y \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - (1 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + 4yu(x, y) = 0$ erhält man

$$2yv''(x)w(y) - (1 + y^2)v(x)w'(y) + 4yv(x)w(y) = 0.$$

Für $v(x), w(y), y \neq 0$ ergibt sich also die Bedingung

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + 2 = \frac{(1 + y^2)w'(y)}{2yw(y)}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von y abhängt, sind beide Seiten konstant gleich k , d.h.

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + 2 = k = \frac{(1 + y^2)w'(y)}{2yw(y)}.$$

Damit ergeben sich zur Bestimmung von v und w die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v''(x) - (k - 2)v(x) = 0 \quad \text{und} \quad w'(y) = \frac{2kyw(y)}{1 + y^2}.$$

Bei der Differentialgleichung für v handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die Differentialgleichung für w ist separabel. Die allgemeinen Lösungen für $k \neq 2$ lauten

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{k-2}x} + c_2 e^{-\sqrt{k-2}x} \quad \text{und} \quad w(y) = c_3 (1+y^2)^k.$$

Man erhält für $k > 2$ so die Lösungen

$$u(x, y) = \left(a e^{\sqrt{k-2}x} + b e^{-\sqrt{k-2}x} \right) (1+y^2)^k \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

der partiellen Differentialgleichung bzw. für $k < 2$ unter Verwendung der Eulerschen Formel

$$u(x, y) = \left(a \sin(\sqrt{2-k}x) + b \cos(\sqrt{2-k}x) \right) (1+y^2)^k \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 54: (K)

Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = 0$$

mit den Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0$, $u(x_1, 1) = \sin^3(\pi x_1) \cosh(3\pi) - 2 \sin(2\pi x_1)$ für $x_1 \in [0, 1]$ und $u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0$ für $x_2 \in [0, 1]$ mit Hilfe eines Separationsansatzes.

Hinweis: Es gilt $\sin^3(z) = \frac{3}{4} \sin(z) - \frac{1}{4} \sin(3z)$.

Lösung 54:

Der Separationsansatz der Form $u(x_1, x_2) = V(x_1)W(x_2)$ führt auf

$$V''(x_1)W(x_2) + V(x_1)W''(x_2) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{V''(x_1)}{V(x_1)} = -\frac{W''(x_2)}{W(x_2)}$$

wenn $V(x_1) \neq 0$ und $W(x_2) \neq 0$ sind. Es folgt, dass diese Identität nur erfüllt werden kann, wenn beide Seiten konstant sind. Damit ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$V''(x_1) = kV(x_1) \quad \text{und} \quad W''(x_2) = -kW(x_2)$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$V(x_1) = a_1 \exp(\sqrt{k}x_1) + a_2 \exp(-\sqrt{k}x_1), \quad W(x_2) = a_3 \exp(\sqrt{-k}x_2) + a_4 \exp(-\sqrt{-k}x_2).$$

Aus den Randbedingungen $u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0$ folgt $V(0) = V(1) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} V(0) &= (a_1 + a_2) = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 \\ V(1) &= a_1 \exp(\sqrt{k}) - a_1 \exp(-\sqrt{k}) = 0 \Rightarrow \exp(\sqrt{k}) = \exp(-\sqrt{k}) \Rightarrow \exp(2\sqrt{k}) = 1 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{k} = 2\pi i n \Rightarrow k = -\pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aus der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0$ folgt $W'(0) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} W'(x_2) &= \sqrt{-k}a_3 \exp(\sqrt{-k}x_2) - \sqrt{-k}a_4 \exp(-\sqrt{-k}x_2) \\ W'(0) &= \sqrt{-k}a_3 - \sqrt{-k}a_4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a_3 = a_4 \end{aligned}$$

So sind mit

$$W_n(x_2) = \tilde{d}_n (\exp(\pi n x_2) + \exp(-\pi n x_2)) = 2\tilde{d}_n \cosh(\pi n x_2)$$

und

$$V_n(x_1) = \tilde{c}_n (\exp(i\pi n x_1) - \exp(-i\pi n x_1)) = 2i\tilde{c}_n \sin(\pi n x_1)$$

die zugehörigen Lösungen durch

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x_1) \cosh(\pi n x_2)$$

gegeben.

Die Koeffizienten c_n sind noch aus der Bedingung $u(x_1, 1) = \sin^3(\pi x_1) \cosh(3\pi) - 2 \sin(2\pi x_1)$ zu bestimmen, d.h.

$$\begin{aligned} u(x_1, 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x_1) \cosh(\pi n) \stackrel{!}{=} \sin^3(\pi x_1) \cosh(3\pi) - 2 \sin(2\pi x_1) \\ &= \frac{3}{4} \sin(\pi x_1) \cosh(3\pi) - \frac{1}{4} \sin(3\pi x_1) \cosh(3\pi) - 2 \sin(2\pi x_1). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $c_1 = (3 \cosh(3\pi))/(4 \cosh(\pi))$, $c_2 = -2/\cosh(2\pi)$, $c_3 = -1/4$ und $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$. Damit ergibt sich insgesamt die Lösung

$$u(x_1, x_2) = \frac{3 \cosh(3\pi)}{4 \cosh(\pi)} \sin(\pi x_1) \cosh(\pi x_2) - \frac{2}{\cosh(2\pi)} \sin(2\pi x_1) \cosh(2\pi x_2) - \frac{1}{4} \sin(3\pi x_1) \cosh(3\pi x_2).$$

Aufgabe 55: (K)

Gegeben ist das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \text{in } (0, 1) \times (0, \infty)$$

mit $u(0, t) = 0 = u(1, t)$ für $t > 0$ und

$$u(x, 0) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes eine auf $[0, 1] \times [0, \infty)$ beschränkte Lösung des Problems.

Lösung 55: Wir machen einen Separationsansatz $u(x, t) = v(t)w(x)$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung führt auf

$$v'w - vw'' - vw' = 0.$$

Damit gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{v'}{v} = c = \frac{w'' + w'}{w}.$$

Aus der ersten dieser beiden Differentialgleichungen erhalten wir die allgemeine Lösung

$$v(t) = ke^{ct}$$

mit einer weiteren Konstanten $k \in \mathbb{R}$. Mit der Bedingung, dass u auch für $t \rightarrow \infty$ beschränkt ist, folgt $c \leq 0$. Nun betrachten wir die zweite Differentialgleichung für w . Aus

$$w'' + w' - cw = 0$$

errechnen wir mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 + \lambda - c = 0$ die Nullstellen

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + c}.$$

Für $c < -\frac{1}{4}$ folgt

$$w(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \left(\sqrt{\left| \frac{1}{4} + c \right|} x \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\left| \frac{1}{4} + c \right|} x \right) \right)$$

Aus der Bedingung $kw(x) = u(x, 0) \stackrel{!}{=} e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\pi x)$ folgt $c_1 = 0$, $kc_2 = 1$ und $\sqrt{\left| \frac{1}{4} + c \right|} = \pi$. Da mit diesen Parametern auch $u(0, t) = u(1, t) = 0$ für alle Zeiten $t > 0$ gilt berechnen wir noch aus $\sqrt{\left| \frac{1}{4} + c \right|} = \pi$ die Konstante $c = -\frac{1}{4} - \pi^2$ und erhalten die Lösung

$$u(x, t) = e^{-(\frac{1}{4} + \pi^2)t} e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\pi x).$$

Für $0 \geq c \geq -\frac{1}{4}$ ist die Funktion w eine Linearkombination reellwertiger Exponentialfunktionen. Die Anfangsbedingung ist dadurch nicht erfüllbar.