12. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 56: Ein Würfel wird dreimal geworfen. Man bestimme die

- Anzahl der möglichen Ergebnisse,
- Anzahl der günstigen Fälle für das Ereignis „Augensumme ist höchstens 5“,
- Anzahl der günstigen Fälle für das Ereignis „Augensumme ist gerade“,

wenn die Reihenfolge der Würfe (**a**) berücksichtigt, (**b**) nicht berücksichtigt wird.

Lösung 56:

(a) **Reihenfolge der Würfe wird berücksichtigt.**

Anzahl der möglichen Ergebnisse: Es gibt $6^3 = 216$ mögliche Fälle.

Augensumme ist höchstens 5: Es gibt 10 Ergebnisse, deren Augensumme ≤ 5 ist,

$$\begin{array}{c|c|c|c} (111) & (112) & (113) & (122) \\ & (121) & (131) & (212) \\ & (211) & (311) & (221) \end{array}$$

Augensumme ist gerade: Die Augensumme ist genau dann gerade, wenn das Ergebnis vom Typ (ggg), (guu), (ugu) oder (uug) ist (g steht für gerade, u für ungerade Augenzahl). Für jeden Typ gibt es $3 \cdot 3 \cdot 3$ Möglichkeiten und somit $4 \cdot 27 = 108$ günstige Fälle.

(b) **Reihenfolge der Würfe wird nicht berücksichtigt.**

Anzahl der möglichen Ergebnisse: Es gibt $\binom{6+3-1}{3} = 56$ mögliche Fälle.

Augensumme ist höchstens 5: Aus der Tabelle von Teil (a) ersieht man, dass es 4 günstige Fälle gibt:

$$(111),\ (112),\ (113),\ (122).$$

Augensumme ist gerade: Ferner gibt es in diesem Fall nur zwei Typen von Ergebnissen, die zu gerader Augensumme führen: (ggg), (guu). Für Typ (ggg) gibt es $\binom{3+3-1}{3} = 10$ Möglichkeiten: Auswahl von 3 Objekten aus drei unterscheidbaren Objekten (nämlich den geraden Zahlen 2,4,6) mit Wiederholung, ohne Reihenfolge. Für Typ (guu) gibt es $3\binom{3+2-1}{2} = 18$ Möglichkeiten: 3 Möglichkeiten für die gerade Zahl und Auswahl von 2 Objekten aus drei unterscheidbaren Objekten (nämlich den ungeraden Zahlen 1,3,5) mit Wiederholung, ohne Reihenfolge. Also gibt es insgesamt 28 günstige Fälle.

Aufgabe 57: (K)

(a) An der Frankfurter Börse wurde eine Gruppe von 70 Wertpapierbesitzern befragt. Es stellte sich heraus, dass 50 von ihnen Aktien und 40 Pfandbriefe besitzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein Wertpapierbesitzer sowohl Aktien als auch Pfandbriefe?

(b) Aus einer zweiten Umfrage unter allen Rechtsanwälten in Frankfurt wurde bekannt, dass 60 % der Anwälte ein Haus und 80 % ein Auto besitzen. 20 % der Anwälte sind Mitglied einer Partei. Von allen Befragten sind 40 % Auto- und Hausbesitzer, 10 % Autobesitzer und Mitglied einer Partei und 15 % Hausbesitzer und Mitglied einer Partei. Außerdem wissen wir, dass auf jeden Rechtsanwalt mindestens eins der Merkmale zutrifft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autobesitzer ein Haus besitzt und Mitglied einer Partei ist.

Lösung 57:

(a) Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

$$\begin{aligned} A &= \text{Befragter besitzt Aktien.} \\ B &= \text{Befragter besitzt Pfandbriefe.} \end{aligned}$$

Da nur diese beiden Arten von Wertpapieren betrachtet werden gilt

$$p(A \cup B) = 1.$$

Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ 1 &= \frac{50}{70} + \frac{40}{70} - p(A \cap B) \\ \frac{70}{70} - \frac{50}{70} - \frac{40}{70} &= -p(A \cap B) \\ p(A \cap B) &= \frac{20}{70}. \end{aligned}$$

Also besitzen 20 der Befragten beide Arten von Wertpapieren.

(b) Es wurden folgende Wahrscheinlichkeiten angegeben:

$$\begin{array}{lll} p(\text{Anwalt besitzt ein Haus}) & = p(H) & = 0.6 \\ p(\text{Anwalt besitzt ein Auto}) & = p(A) & = 0.8 \\ p(\text{Anwalt ist Mitglied einer Partei}) & = p(M) & = 0.2 \\ & p(A \cap H) & = 0.4 \\ & p(A \cap M) & = 0.1 \\ & p(H \cap M) & = 0.15 \end{array}$$

Gefragt ist hierbei nach $p(A \cap H \cap M)$. Da für alle Elemente der Stichprobe mindestens ein Merkmal zutrifft, ist $p(A \cup H \cup M) = 1$. Für die Vereinigungsmenge gilt

$$\begin{aligned} p(A \cup H \cup M) = {} & p(A) + p(H) + p(M) - p(A \cap H) \\ & -p(H \cap M) - p(M \cap A) + p(A \cap H \cap M). \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$1 = 0.8 + 0.6 + 0.2 - 0.4 - 0.15 - 0.1 + p(A \cap H \cap M)$$

und daraus folgt

$$p(A \cap H \cap M) = 1 - 0.8 - 0.6 - 0.2 + 0.4 + 0.15 + 0.1 = 0.05.$$

Somit sind 5 % der befragten Rechtsanwälte autofahrende, hausbesitzende Parteimitglieder.

Aufgabe 58: Frau A sucht einen Parkplatz. Dazu fährt sie mit ihrem Auto immer um denselben Häuserblock, neben dem es drei Parkplätze gibt. Aus Erfahrung weiß Frau A, dass die vier Wahrscheinlichkeiten, beim ersten Umrunden des Blocks keinen, einen, zwei oder drei freie Parkplätze anzutreffen, jeweils alle gleich sind. Bei jedem weiteren Umrunden des Blocks halbiert sich die Wahrscheinlichkeit, keinen freien Parkplatz zu finden. Dafür erhöhen sich die anderen drei Wahrscheinlichkeiten entsprechend.
Frau A umrundet den Block solange, bis sie einen freien Parkplatz findet, jedoch höchstens drei Mal.

(a) Geben Sie eine Ergebnismenge für dieses Wahrscheinlichkeitsexperiment an.

(b) Geben Sie ein Baumdiagramm für das Wahrscheinlichkeitsexperiment an, aus dem die Wahrscheinlichkeit dafür hervorgeht, dass Frau A spätestens nach dem dritten Umrunden des Häuserblocks einen Parkplatz gefunden hat.

(c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau A an mindestens drei von fünf Tagen beim jeweils ersten Umrunden des Blocks keinen freien Parkplatzes findet?

Lösung 58:

(a) Es gibt viele Möglichkeiten für Ergebnismengen. Am einfachsten ist wohl folgende Ergebnismenge:

$$\Omega = \{\text{„Frau A findet einen Parkplatz“}, \text{„Frau A findet keinen Parkplatz“}\} .$$

Eine etwas genauere Variante ist

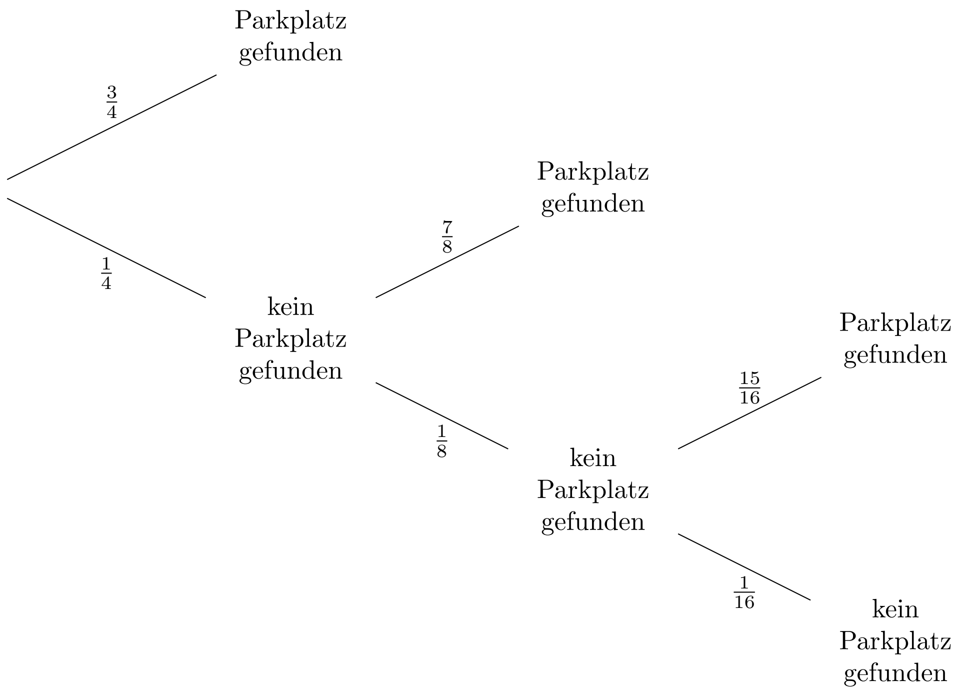
$$\begin{aligned} \Omega = \Big\{ & \text{„Frau A findet beim ersten Umrunden einen Parkplatz“}, \\ & \text{„Frau A findet beim zweiten Umrunden einen Parkplatz“}, \\ & \text{„Frau A findet beim dritten Umrunden einen Parkplatz“}, \\ & \text{„Frau A findet gar keinen Parkplatz“}\Big\} . \end{aligned}$$

Man kann aber auch noch komplizierter (und genauer) vorgehen. Sei (a, b, c) das Ereignis, beim ersten Umrunden a, beim zweiten Umrunden b und beim dritten Umrunden c freie Parkplätze vorzufinden. Wenn $a > 0$ ist, dann gibt es kein zweites Umrunden und wir schreiben einfach (a). Analog ist (a, b) definiert. Dann kann man die Ergebnismenge zum Beispiel auch so angeben:

$$\Omega = \big\{(3), (2), (1), (0, 3), (0, 2), (0, 1), (0, 0, 3), (0, 0, 2), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\big\}.$$

Hinweis: Wenn man versucht, die Ergebnismenge in solch einer Form (z.B. mit Zahlen) anzugeben, dann muss man definiert haben, was was bedeuten soll!

(b) Das Baumdiagramm sieht folgendermaßen aus:



Aus dem Diagramm kann man ablesen, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch

$$p = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{15}{16} = \frac{3 \cdot 128 + 7 \cdot 16 + 15}{512} = \frac{511}{512}$$

gegeben ist. Alternativ ist auch die Rechnung

$$p = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512}$$

möglich.

(c) Die Wahrscheinlichkeiten, beim ersten Mal Umrunden des Blocks keinen, einen, zwei oder drei freie Parkplätze zu finden, sind an jedem Tag gleich groß. Also gilt

$$p(\text{„an mind. 3 von 5 Tagen kein freier Parkplatz beim ersten Mal“}) = \frac{\text{Anzahl günstige Ereignisse}}{\text{Anzahl mögliche Ereignisse}}.$$

Die Elementarereignisse sind hier die Elemente von $\{0,1,2,3\}^5$: Am Tag n mit $n = 1, \ldots, 5$ ist kein, sind ein, zwei oder drei Parkplätze frei. Die Anzahl der möglichen Ereignisse ist also $4^5 = 1024$. Es sei nun $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \{0,1,2,3\}^5$, wobei a_n für $n = 1, \ldots, 5$ bedeute, dass am n-ten Tag beim ersten Mal um den Block fahren a_n freie Parkplätze vorhanden sind.

Für ein günstiges Ereignis („kein freier Parkplatz an mindestens drei Tagen") müssen genau drei, genau vier oder genau fünf der Zahlen a_n gleich Null sein, für die anderen Zahlen gibt es 9, 3 bzw. 1 Möglichkeit. Somit ist

$$\text{Anzahl günstige Ereignisse} = \binom{5}{3} \cdot 9 + \binom{5}{4} \cdot 3 + \binom{5}{5} = 90 + 15 + 1 = 106.$$

Damit

$$p(\text{„an mind. 3 von 5 Tagen kein freier Parkplatz beim ersten Mal"}) = \frac{106}{4^5} = \frac{53}{512}.$$

Aufgabe 59: (K)
Eine Urne enthalte 8 weiße, 10 schwarze und 7 rote Kugeln. Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen. Definieren Sie eine Ergebnismenge zu diesem Zufallsexperiment. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass eine weiße und eine schwarze Kugel gezogen wird. Geben Sie außerdem die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, wenn eine weiße im Ergebnis auftritt.

Lösung 59: Dieses Zufallsexperiment lässt sich mit einem der vier kombinatorischen Grundmuster beschreiben, und zwar als Kombination ohne Wiederholung.
Zunächst nummerieren wir alle Kugeln; mit $1 - 8$ die weißen, mit $9 - 18$ die schwarzen und mit $19 - 25$ die roten. Dann lässt sich die Ergebnismenge darstellen als

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in M^2 : \omega_1 < \omega_2\}$$

mit $M = \{1, 2, \ldots, 25\}$. Also ist $N = 25$ und $n = 2$ zu setzen, und wir erhalten

$$\text{card}(\Omega) = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2! \cdot 23!} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12 = 300\,.$$

Mit der solchermaßen definierten Ergebnismenge liegt ein Laplace-Experiment vor, da alle Kombinationen in Ω mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten.
Es sind die Wahrscheinlichkeiten $p(A \cap B)$ und $p(B|A)$ zu bestimmen für die Ereignisse $A := \{\omega \in \Omega : \omega_1 \leq 8\}$ und $B := \{\omega \in \Omega : 9 \leq \omega_2 \leq 18\}$.
Wir zählen die Paare in Ω, bei denen $\omega_1 \leq 8$ und $9 \leq \omega_2 \leq 18$ ist. Dies sind gerade $8 * 10 = 80$ Kombinationen. Somit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \cap B$ zu

$$p(A \cap B) = \frac{80}{300} = \frac{4}{15}.$$

Um die bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, zählen wir die Elemente in A und nutzen die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}\,.$$

Die Anzahl der Kombinationen in A erhalten wir wie folgt: Wenn $\omega_1 = 1$ ist, gibt es 24 Möglichkeiten für ω_2. Wenn $\omega_1 = 2$ ist, bleiben für ω_2 nur noch 23 Varianten, da $\omega_1 < \omega_2$ gilt. Fährt man so fort, ergibt sich

$$\text{card}(A) = 24 + 23 + \cdots + (25 - 8) = \sum_{j=1}^{8} (25 - j) = 8 \cdot 25 - \sum_{j=1}^{8} j = 200 - \frac{8(8+1)}{2} = 164.$$

Also ist

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{164}{300} = \frac{41}{75}\,,$$

und wir erhalten

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{4 \cdot 75}{15 \cdot 41} = \frac{20}{41}\,.$$

Aufgabe 60: Die Herstellung eines Produkts läuft über drei parallele Fertigungsstraßen. Alle fertigen (intakten sowie nicht intakten) Teile werden in einem Lager gesammelt. Für die drei Straßen gelten folgende Werte:

Straße 1:	750 Teile/Stunde,	80% sind einwandfrei,
Straße 2:	800 Teile/Stunde,	85% sind einwandfrei,
Straße 3:	1000 Teile/Stunde,	65% sind einwandfrei.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig (nach einer Stunde) aus dem Lager genommenes intaktes Bauteil der ersten Fertigungsstraße entstammt.

Lösung 60: Wir betrachten die Fertigung der Bauteile innerhalb von einer Stunde. Innerhalb dieser Stunde werden $750 + 800 + 1000 = 2550$ Teile produziert. Die Bauteile können wir uns mit den Nummern 1 bis 2550 durchnummeriert denken. Für die Grundmenge Ω können wir dann $\Omega = \{1, \ldots, 2550\}$ ansetzen. Dabei sollen die Teile von Fertigungsstraße 1 die Nummern 1 bis 750 tragen, die Teile von Fertigungsstraße 2 die Nummern 751 bis 1550 und die von Fertigungsstraße 3 die Nummern 1551 bis 2550.

Folgende Ereignisse sind also für uns interessant:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in \{1, \ldots, 750\}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ stammt von Fertigungsstraße 1}\}, \\
A_2 &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in \{751, \ldots, 1550\}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ stammt von Fertigungsstraße 2}\}, \\
A_3 &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in \{1551, \ldots, 2550\}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ stammt von Fertigungsstraße 3}\}.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, aus der Gesamtmenge Ω zufällig das Bauteil ω zu ziehen, sei

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{2550},$$

d.h. die Bauteile sind für den Stichprobennehmer (zunächst) nicht unterscheidbar. Damit erhalten wir

$$P(A_1) = \frac{750}{2550}, \quad P(A_2) = \frac{800}{2550}, \quad P(A_3) = \frac{1000}{2550}.$$

Weiter wissen wir, dass 80% der Elemente/Bauteile in A_1 intakt sind. Das sind 600 Stück. Ohne Einschränkung können wir daher annehmen, dass dies die Nummern 1 bis 600 sind. Bei den Bauteilen aus A_2 sind 85% intakt (680 Stück), also wieder ohne Einschränkung die Nummern 751 bis 1430, und genauso seien bei A_3 die Nummern 1551 bis 2200 intakt (65% von 1000).

Des Weiteren interessiert uns das Ereignis

$$B = \{\omega \in \Omega : \omega \in \{1, \ldots, 600\} \cup \{751, \ldots, 1430\} \cup \{1551, \ldots, 2200\}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ intakt}\}.$$

Die (im Geiste durchgeführte) Nummerierung der intakten Teile in A_1, A_2 und A_3 haben wir nur vorgenommen, um das Ereignis B formal sauber zu definieren. Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ lässt sich nämlich auch ohne diese mühselige Unterscheidung der Bauteile mithilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen. Nach dieser gilt:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) \\
&= 0,8 \cdot \frac{750}{2550} + 0,85 \cdot \frac{800}{2550} + 0,65 \cdot \frac{1000}{2550} = \frac{193}{255}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A_1|B)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gezogenes intaktes Teil aus A_1 stammt, unter Verwendung des Satzes von Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{0,8 \cdot \frac{750}{2550}}{\frac{193}{255}} = \frac{60}{193} \approx 0,31.$$