13. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 61: Auf jedem Aufgabenblatt befinden sich fünf voneinander unabhängige Aufgaben. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Aufgabe lösbar ist, sei $\frac{4}{5}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(a) Genau k Aufgaben sind lösbar ($k = 0, 1, \ldots, 5$).

(b) Mindestens k Aufgaben sind lösbar ($k = 0, 1, \ldots, 5$).

Im Wintersemester gibt es 13 voneinander unabhängige Aufgabenblätter. Berechnen Sie unter Verwendung der obigen Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(c) Auf jedem Blatt sind mindestens 3 Aufgaben lösbar.

(d) Auf mindestens 10 Blättern ist mindestens eine Aufgabe lösbar.

(e) Mindestens 20% (80%) aller Aufgaben sind lösbar.

Hinweis: Es darf ein Taschenrechner verwendet werden.

Lösung 61:

(a) Jede Aufgabe ist ein Einzelexperiment eines Bernoulliexperiments mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 4/5$. Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer ist

$$p(k) = \binom{5}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{5-k} .$$

Damit ergibt sich

k	0	1	2	3	4	5
p(k)	0,00032	0,00640	0,05120	0,20480	0,40960	0,32768

(b) Die Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer ist

$$P(k) = \sum_{n=k}^{5} p(n) .$$

Damit ergibt sich

k	0	1	2	3	4	5
P(k)	1	0,99968	0,99328	0,94208	0,73728	0,32768

Anmerkung: Die Einträge $P(k)$ der Tabelle in (b) erhält man übrigens, indem man in der Tabelle aus (a) die Einträge $p(k)$ von der k-ten bis zur 5. Spalte addiert. Beispiel: $P(4) = 0,40960 + 0,32768 = 0,73728$.

(c) Jetzt ist jedes Aufgabenblatt ein Einzelexperiment eines Bernoulliexperiments mit Trefferwahrscheinlichkeit $P(3)$ aus Teil (b). Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $P(3)^{13} \approx 0,4604$.

(d) Die Trefferwahrscheinlichkeit ist jetzt $P(1)$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\sum_{k=10}^{13} \binom{13}{k} [P(1)]^k [1 - P(1)]^{13-k} \geq 9,34 \cdot 10^{-9} + 7,95 \cdot 10^{-6} + 0,0041 + 0,9958 > 0,9999.$$

(e) Bernoulliexperiment mit $65 = 13 \cdot 5$ Einzelexperimenten und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 4/5$. „Mindestens 20% (bzw. 80%) aller Aufgaben lösbar“ bedeutet mindestens $65 \cdot 0,2 = 13$ (bzw. $65 \cdot 0,8 = 52$) Treffer. Es ist

$$\sum_{k=13}^{65} \binom{65}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{65-k} \approx 1$$

bzw.

$$\sum_{k=52}^{65} \binom{65}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{65-k} \approx 0,5735.$$

Aufgabe 62: (K)
Eine Lieferung von 25 Geräten, die durch ihre Seriennummer unterschieden werden, enthält 4 defekte Geräte. Als *Stichprobe vom Umfang* k bezeichnet man die Entnahme von k Geräten ohne Zurücklegen.

(a) Wie viele verschiedene Stichproben vom Umfang 5 sind möglich?

(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, Stichproben vom Umfang 5 mit

(i) genau zwei defekten	(iii) nur fehlerfreien
(ii) höchstens einem defekten	(iv) mindestens einem defekten

Gerät(en) zu ziehen?

(c) Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn die 5 Geräte nacheinander gezogen, getestet und gleich wieder zurückgelegt werden?

(d) Welches der Experimente (b) und (c) ist ein Bernoulli-Experiment?

Lösung 62:

(a) Da es auf die Reihenfolge der entnommenen Geräte nicht ankommt, gibt es $\binom{25}{5} = 53130$ mögliche Stichproben.

(b) (i) Es gibt

$$\binom{21}{3} \cdot \binom{4}{2} = 7980$$

Stichproben, die genau zwei defekte Geräte enthalten. Also ist die Wahrscheinlichkeit:

$$p_2 = \frac{7980}{53130} = \frac{38}{253} \approx 0,150.$$

(ii) Es gibt

$$\binom{21}{5} \cdot \binom{4}{0} + \binom{21}{4} \cdot \binom{4}{1} = 44289$$

Stichproben mit 0 oder 1 defekten Geräten. Also ist die Wahrscheinlichkeit:

$$p_0 + p_1 = \frac{44289}{53130} = \frac{2109}{2530} \approx 0,834.$$

(iii) Es gibt

$$\binom{21}{5} \cdot \binom{4}{0} = 20349$$

Stichproben mit 0 defekten Geräten. Also ist die Wahrscheinlichkeit:

$$p_0 = \frac{20349}{53130} = \frac{969}{2530} \approx 0,383.$$

(iv) Mit dem Ergebnis von (iii) erhält man $53130 - 20349 = 32781$ Stichproben mit mindestens 1 defekten Gerät. Also ist die Wahrscheinlichkeit:

$$1 - p_0 = 1 - \frac{969}{2530} = \frac{1561}{2530} \approx 0,617.$$

(c) Beim Ziehen mit Zurücklegen liegt ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{4}{25} = 0,16$ vor.

(i) Es gilt

$$p_2 = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^3 \approx 0,152.$$

(ii) Es gilt

$$p_0 + p_1 = \left[\binom{5}{0} \cdot 21 + \binom{5}{1} \cdot 4\right] \cdot \frac{21^4}{25^5} \approx 0,817.$$

(iii) Es gilt
$$p_0 = \binom{5}{0} \cdot \frac{21^5}{25^5} \approx 0,418.$$

(iv) Es gilt $1 - p_0 \approx 0,582$.

(d) Das Experiment in Teil (c) ist ein Bernoulli-Experiment, das in Teil (b) nicht.

Anmerkung: Im Fall (c) hat das Ereignis, 5 defekte Geräte zu ziehen, die Wahrscheinlichkeit
$$\binom{5}{5} \cdot \frac{4^5}{25^5} \approx 1 \cdot 10^{-4}.$$
Im Fall (b) ist dieses Ereignis nicht möglich.

Aufgabe 63: Die Zuverlässigkeit von fünf Geräten wird hintereinander überprüft. Jedes Gerät wird nur dann überprüft, wenn das vorhergehende zuverlässig war.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Anzahl X der nötigen Überprüfungen, wenn jedes der Geräte mit der Wahrscheinlichkeit 0.9 die Prüfung besteht.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung 63:

(a) Sei X die Anzahl der nötigen Überprüfungen. Die Zufallsvariable X kann die folgenden Werte annehmen:
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5.$$
Die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$, dass die Anzahl der nötigen Überprüfungen gleich einem dieser Werte ist, ist gleich
$$P(X = x_i) = \begin{cases} q, & i = 1, \\ p^{i-1}q, & i = 2, 3, 4, \\ p^4, & i = 5, \end{cases}$$
mit $p = 0.9$ und $q = 1 - p$.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

Die Verteilungsfunktion von X lautet
$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.1, & 1 \le x < 2, \\ 0.19, & 2 \le x < 3, \\ 0.271, & 3 \le x < 4, \\ 0.3439, & 4 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

(b) Der Erwartungswert von X ist durch
$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} P(X = x_i)x_i = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.081 + 4 \cdot 0.0729 + 5 \cdot 0.6561 = 4.0951$$
gegeben. Um die Varianz zu berechnen verwenden wir
$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$
Wir berechnen
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{5} P(X = x_i)x_i^2 = 1 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.09 + 9 \cdot 0.081 + 16 \cdot 0.0729 + 25 \cdot 0.6561 = 18,7579$$
und erhalten damit
$$\mathrm{Var}(X) = 18,7579 - (4.0951)^2 \approx 1.988.$$

Aufgabe 64: Wir werfen eine gezinkte Münze (Wahrscheinlichkeit, dass Kopf erscheint $= p \in (0,1)$) solange, bis zum ersten Mal Zahl erscheint. Sei X die Anzahl der Würfe.

(a) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X = n)$.

(b) Ist $E(X) < \infty$?

(c) Berechnen Sie $E(2^X)$. Für welche $p \in (0,1)$ ist $E(2^X) < \infty$?

Lösung 64: (a)

(a) Wir werfen genau dann n–mal, wenn wir $(n-1)$–mal Kopf werfen, und dann einmal Zahl. Damit erhalten wir

$$P(X = n) = P(\underbrace{\text{Kopf}, \ldots, \text{Kopf}}_{(n-1)\text{–mal}}, \text{Zahl}) = p^{n-1}(1-p).$$

(b) Wir erhalten

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p^{n-1}(1-p).$$

Wir müssen nachprüfen, ob diese Reihe konvergiert. Wir verwenden dazu das Quotientenkriterium, und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)p^{n+1-1}(1-p)}{n\, p^{n-1}(1-p)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)p}{n} = p < 1,$$

d.h. die Reihe konvergiert, d.h. $E(X) < \infty$.

(c) Es gilt

$$E(2^X) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, P(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n p^{n-1}(1-p) = \frac{1-p}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (2p)^n.$$

Die letzte Reihe ist eine *geometrische Reihe*, welche konvergiert, wenn $|2p| < 1$, d.h. für $0 < p < 1/2$. Mit der geometrischen Summenformel (für $|q| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

erhällt man nun

$$E(2^X) = \frac{1-p}{p} \frac{1}{1-2p}.$$

Die Reihe divergiert für $p \in [1/2, 1)$.

Aufgabe 65: (K)
Es seien α und $\beta \in (0,\infty)$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & , \quad x \geq \beta, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass durch f eine Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist.

Im Folgenden sei X eine Zufallsvariable, die mit der Dichte f stetig verteilt sei.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Geben Sie Bedingungen für α und β an, unter denen der Erwartungswert von X existiert, und berechnen Sie diesen im Falle seiner Existenz.

(d) Geben Sie Bedingungen für α und β an, unter denen die Varianz von X existiert, und berechnen Sie diese im Falle ihrer Existenz.

Lösung 65:

(a) Es gilt offensichtlich $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Des Weiteren ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\beta}\int_{\beta}^{\infty}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x = \alpha\beta^{\alpha}\int_{\beta}^{\infty} x^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \alpha\beta^{\alpha}\left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{\beta}^{\infty} = 1.$$

Deshalb ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

(b) Die Verteilungsfunktion von X lautet:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\beta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \leq \beta, \\ 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} & \text{für} \quad x > \beta. \end{cases}$$

(c) Der Erwartungswert von X ist, sofern er existiert, gegeben durch

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\beta}^{\infty} x \cdot \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x = \alpha\beta^{\alpha}\int_{\beta}^{\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{\alpha \geq 1}{=} \alpha\beta^{\alpha}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_{\beta}^{\infty} \\ &= -\alpha\beta^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha}\beta^{1-\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert existiert folglich nur im Falle $\alpha > 1$ und ist dann gleich $\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$.

(d) Um die Varianz von X berechnen zu können, muss definitionsgemäß der Erwartungswert von X existieren. Damit gilt auf jeden Fall schon einmal $\alpha > 1$. Per Definition ist dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 - 2E(X)x + E(X)^2\right) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \quad - \quad 2E(X) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}_{=E(X),\text{ existiert nach Vor.}} \quad + \quad E(X)^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - E(X)^2. \end{aligned}$$

Damit die Varianz existiert, muss folglich das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ existieren.

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\beta}^{\infty} x^2\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x = \alpha\beta^{\alpha}\int_{\beta}^{\infty} x^{1-\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{\alpha \geq 2}{=} \alpha\beta^{\alpha}\left[\frac{1}{2-\alpha}x^{2-\alpha}\right]_{\beta}^{\infty} \\ &= \alpha\beta^{\alpha}\frac{1}{\alpha-2}\beta^{2-\alpha} = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Die Varianz existiert daher für alle $\alpha > 2$ und es gilt in diesem Falle:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\beta^2\left((\alpha-1)^2 - \alpha(\alpha-2)\right)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$