

Vordiplomsklausur – Musterlösung

Technische Mechanik I/II

21. März 2009

09.00 – 12.00 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 5 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 6 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Mögliche Punkte	19	11	16	25	17	12	100
Erreichte Punkte							

Viel Erfolg!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Klausur TM I/II

Aufgabe 1

(Insgesamt 19 Punkte)

Ein Biegebalken (Abb. 1.1 (links)) wird durch eine stückweise konstante Streckenlast ($q_0 = \text{const}$) belastet. Die Lagerung wird durch ein Festlager im Punkt A und ein Loslager im Punkt B realisiert. Das Balkenprofil (Abb. 1.1 (rechts)) ist dreieckig und hat die Seite $3a$ und die Höhe $2a$. Gegeben sind q_0 , a , l und die Anfangsfließspannung σ_{F0} . Anmerkung: Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem $\{x, y, z\}$.

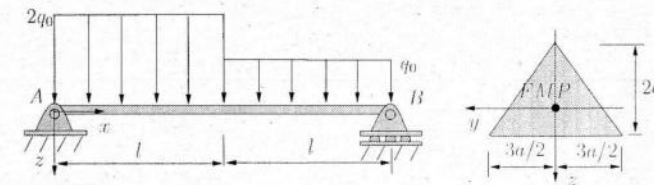


Abbildung 1.1: Balken belastet durch eine stückweise konstante Streckenlast (links), Dreiecksprofil des Balkenquerschnitts (rechts)

- 1.1) Bestimmen Sie die Verläufe der Querkraft $Q_z(x)$ und des Biegemoments $M_y(x)$ mit Hilfe der Schnittgrößendifferentialgleichungen. Geben Sie die Werte von $Q_z(x)$ und $M_y(x)$ an den Grenzen der Schnittgrößengebiete explizit an und berechnen Sie die Lage und Größe des Extremalwerts von $M_y(x)$. Stellen Sie beide Verläufe grafisch dar.
- 1.2) Bestimmen Sie die Größe und Lage der betragsmäßig maximalen Biegespannung im Balken.
Hinweis: Die Flächenmomente 2.Grades I_y und I_z für ein dreieckiges Profil sind in Abb. 1.2 bzgl. des Flächmittelpunkts FMP gegeben.

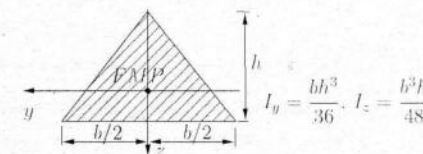


Abbildung 1.2: Flächenmomente 2.Grades für Dreiecksprofil

- 1.3) Welche Länge $a_{\min}$ muss das Balkenprofil mindestens haben, damit an der Stelle der maximalen Biegespannung bei Vernachlässigung des Querkraftschubs eine Sicherheit $S_f = 2$ gegen plastisches Fließen vorliegt?

Aufgabe 1 – Musterlösung

(Insgesamt 19 Punkte)

1.1) Querkraft und Biegemoment mit den Schnittgrößendifferentialgleichungen:

$$0 \leq x \leq l: Q_z^I(x) = -2q_0x + \frac{7q_0l}{4} \quad (1.1)$$

$$M_y^I(x) = -q_0x^2 + \frac{7q_0l}{4}x \quad (1.2)$$

$$l \leq x \leq 2l: Q_z^{II}(x) = -q_0x + \frac{3q_0l}{4} \quad (1.3)$$

$$M_y^{II}(x) = -\frac{q_0x^2}{2} + \frac{3q_0l}{4}x + \frac{q_0l^2}{2} \quad (1.4)$$

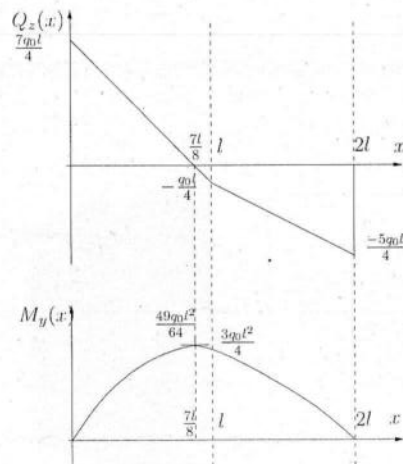


Abbildung 1.3: Verlauf der Querkraft und des Biegemoments

$$Q_z^I(0) = \frac{7q_0l}{4}, \quad M_y^I(0) = 0, \quad (1.5)$$

$$Q_z^I(l) = Q_z^{II}(l) = -\frac{q_0l}{4}, \quad M_y^I(l) = M_y^{II}(l) = \frac{3q_0l^2}{4}, \quad (1.6)$$

$$Q_z^{II}(2l) = -\frac{5q_0l}{4}, \quad M_y^{II}(2l) = 0, \quad (1.7)$$

$$M_{\max} = M_y^I(x = 7l/8) = \frac{49q_0l^2}{64} \quad (1.8)$$

1.2) Betragsmäßig maximale Biegespannung:

$$\sigma_{x,\max} = \left| \sigma_x \left(\frac{7l}{8} \cdot y, -\frac{4a}{3} \right) \right| = \frac{49q_0l^2}{32a^3} \quad (1.9)$$

1.3) Dimensionierung:

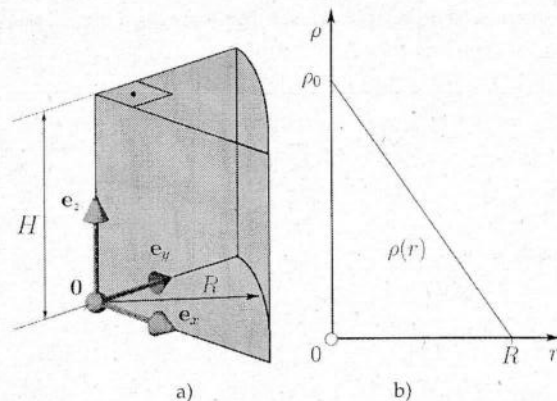
$$a \geq a_{\min} = \sqrt[3]{\frac{49q_0l^2}{16\sigma_{F0}}} \quad (1.10)$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 11 Punkte)

Gegeben sei das Prisma in Abbildung 2.1a. Es handelt sich um ein Viertel eines Kreiszylinders. Die Abmessungen und die Geometrie können aus der Abbildung entnommen werden. Die Massendichte sei ausschließlich vom Abstand r zur z -Achse abhängig. Der Wert ρ_0 sei eine Konstante.

Anmerkung: Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe Zylinderkoordinaten $\{r, \varphi, z\}$.

Abbildung 2.1: a) Prisma; b) Massendichteverteilung $\rho(r)$.

- 2.1) Bestimmen Sie die Form der Funktion der Massendichte $\rho(r)$ aus Abb. 2.1b.
- 2.2) Berechnen Sie die Masse m des Prismas unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.
- 2.3) Bestimmen Sie die x_m -Komponente des Massenmittelpunktes r_m bezüglich des in Abb. 2.1a eingezeichneten Koordinatensystems $\{x, y, z\}$. Es sind ebenfalls Zylinderkoordinaten zu verwenden!
- 2.4) Wie lauten die y_m - und z_m -Komponenten des Massenmittelpunktes r_m ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 11 Punkte)

- 2.1) Analytische Form der Funktion $\rho(r)$ aus Abb. 2.1b:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (2.1)$$

- 2.2) Masse m :

$$m = \frac{\pi}{12} \rho_0 H R^2 \quad (2.2)$$

- 2.3) x_m -Koordinate des Massenmittelpunkts:

$$x_m = \frac{R}{\pi} \quad (2.3)$$

- 2.4) y_m - und z_m -Koordinate des Massenmittelpunkts:

Die Massendichte ist unabhängig von der z -Koordinate. Aus diesem Grund stimmen die z -Koordinate des Massenmittelpunkts und des Volumenmittelpunkts überein. Aus der Geometrie des Prismas (symmetrisch bzgl. der Ebene durch $z = H/2$ parallel zu der x - y -Ebene) folgt

$$z_m = z_V = \frac{H}{2} \quad (2.4)$$

Wegen der Symmetrie der Geometrie bzgl. einer vertikalen Ebene, die den Winkel 45° mit der x - z - und y - z -Ebene schließt und wegen der Abhängigkeit der Dichte nur von r sind x_m und y_m gleich

$$y_m = x_m = \frac{R}{\pi} \quad (2.5)$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 16 Punkte)

Gegeben ist ein Balken (Abb. 3.1) mit der konstanten Biegesteifigkeit EI , der im Punkt A durch ein Festlager und im Punkt B durch ein Loslager gelagert ist. In der Mitte des Balkens wirkt die Kraft F . An der gleichen Stelle erfolgt eine elastische Lagerung durch eine Feder mit der Federsteifigkeit C .

Anmerkung: Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe das in Abb. 3.1 angegebene Koordinatensystem $\{x, y, z\}$.

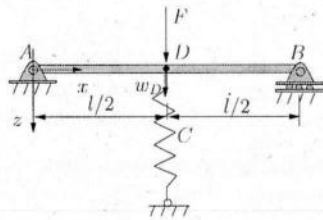
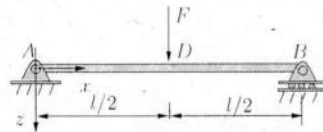


Abbildung 3.1: Balken mit elastischer Lagerung

- 3.1) Betrachten Sie nur den Balken ohne die Feder (Abb. 3.2). Bestimmen Sie die Schnittgrößen $Q(x)$ und $M(x)$ im Balken in Abhängigkeit von der x -Koordinate. Geben Sie alle zur Lösung der Teilaufgabe notwendigen Freikörperbilder an.

Abbildung 3.2: Balken, belastet durch Einzelkraft F

- 3.2) Berechnen Sie die Komplementärenergie des Balkens (ohne Feder) W_{ges}^* infolge Biegung unter Vernachlässigung des Einflusses des Querkraftschubs.
- 3.3) Bestimmen Sie die Federsteifigkeit des Balkens (ohne Feder) unter der Wirkung der Kraft F im Punkt D . Verwenden Sie dabei die in 3.2) berechnete Energie W_{ges}^* .
- 3.4) Betrachten Sie das Gesamtsystem (Abb. 3.1). Welcher Schaltungstyp liegt zwischen dem Balken und der Feder vor? Geben Sie die Gesamtsteifigkeit des Systems C_{ges} unter Vernachlässigung des Querkraftschubs an.
- 3.5) Wie groß ist die Verschiebung w_D im Punkt D infolge der Kraft F für das System Balken-Feder?

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 16 Punkte)

- 3.1) Verlauf der Schnittgrößen $Q(x)$, $M(x)$:

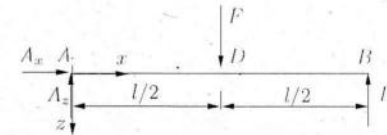


Abbildung 3.3: Freikörperbild für Berechnung der Lagerkräfte

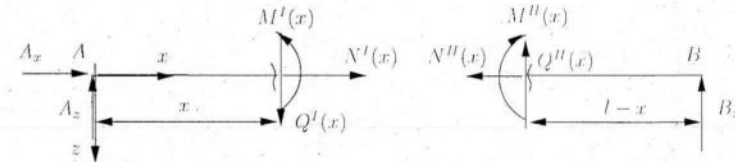


Abbildung 3.4: Freischnitte für Bereich I(links) und Bereich II(rechts)

$$0 \leq x < \frac{l}{2}, \quad Q^I(x) = -A_z = -\frac{F}{2} \quad (3.1)$$

$$M^I(x) = A_z x = \frac{F}{2} x \quad (3.2)$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l, \quad Q^{II}(x) = -B_z = -\frac{F}{2} \quad (3.3)$$

$$M^{II}(x) = B_z(l - x) = \frac{F}{2}(l - x) \quad (3.4)$$

- 3.2) Komplementärenergie W_{ges}^* :

$$W_{ges}^* = \frac{F^2 l^3}{96 EI} \quad (3.5)$$

- 3.3) Federsteifigkeit des Balkens:

$$C_{\text{Balken}} = \frac{48 EI}{l^3} \quad (3.6)$$

- 3.4) Gesamtsteifigkeit des Balken-Federsystems: Parallelschaltung

$$C_{ges} = \frac{48 EI}{l^3} + C \quad (3.7)$$

- 3.5) Verschiebung w_D :

$$w_D = \frac{F l^3}{48 EI + C l^3} \quad (3.8)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 25 Punkte)

Eine aus Stahl mit den Materialparametern E , ν gefertigte Anhängerkupplung mit kreisförmigem Querschnitt des Radius R ist an einem Fahrzeug befestigt (Abb. 4.1). Bei einer langsamen Kurvenfahrt des Fahrzeugs wird die Anhängerkupplung durch den Anhänger unter dem Winkel von α mit der Kraft $\mathbf{F} = F \cos(\alpha) \mathbf{e}_x + F \sin(\alpha) \mathbf{e}_y = F \sin(\alpha) \mathbf{e}_{\bar{y}} + F \cos(\alpha) \mathbf{e}_{\bar{z}}$ belastet. Verwenden Sie zur Bearbeitung der folgenden Teilaufgaben die angegebenen Koordinatensysteme.

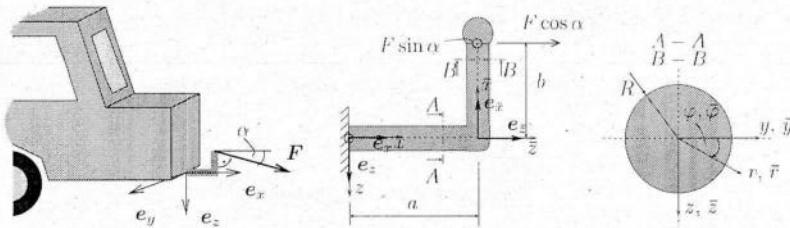


Abbildung 4.1: Belastung einer Anhängerkupplung

- 4.1) Berechnen Sie in den Bereichen I ($0 \leq x < a$) und II ($0 < \bar{x} \leq b$) die Schnittgrößen in der Anhängerkupplung. Zeichnen Sie alle notwendigen Freikörperbilder.
- 4.2) Geben Sie den Spannungstensor in Polarkoordinaten jeweils für einen beliebigen Punkt (x, r, φ) im horizontalen Teil der Anhängerkupplung ($0 \leq x < a$) und für einen beliebigen Punkt $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{\varphi})$ im vertikalen Teil der Anhängerkupplung ($0 < \bar{x} \leq b$) unter Vernachlässigung von Querkraftschub an.
- 4.3) Welcher Spannungszustand liegt bei $(\bar{x} = b/2, \bar{r} = R, \bar{\varphi} = \pi/3)$ für $\alpha = \pi/6$ vor? Berechnen Sie für diesen Punkt die Verzerrungen unter Verwendung des isotropen Hooke'schen Gesetzes.

Hinweis:

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cos(\beta)$$

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 25 Punkte)

4.1) Berechnung der Schnittgrößen:

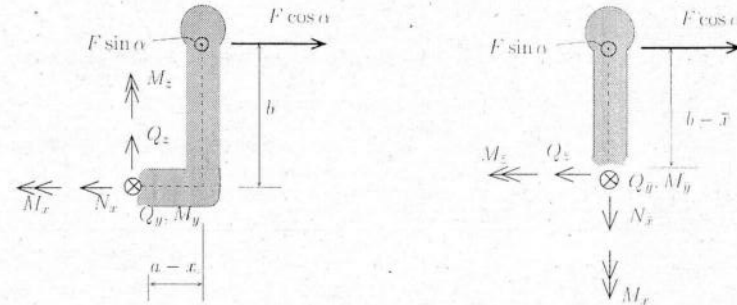


Abbildung 4.2: Freikörperbilder der Anhängerkupplung zur Ermittlung der Schnittgrößen

Bereich I ($0 \leq x < a$):

$$N_x = F \cos(\alpha), \quad M_x = F \sin(\alpha) b \quad (4.1)$$

$$Q_y = F \sin(\alpha), \quad M_y = -F \cos(\alpha) b \quad (4.2)$$

$$Q_z = 0, \quad M_z = F \sin(\alpha)(a - x) \quad (4.3)$$

Bereich II ($0 < \bar{x} \leq b$):

$$N_{\bar{x}} = 0, \quad M_{\bar{x}} = 0 \quad (4.4)$$

$$Q_{\bar{y}} = F \sin(\alpha), \quad M_{\bar{y}} = -F \cos(\alpha)(b - \bar{x}) \quad (4.5)$$

$$Q_{\bar{z}} = F \cos(\alpha), \quad M_{\bar{z}} = F \sin(\alpha)(b - \bar{x}) \quad (4.6)$$

4.2) Spannungstensor in Polarkoordinaten:

Bereich I ($0 \leq x < a$):

$$\sigma(x, r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{F \cos(\alpha)}{\pi R^2} - \frac{4Fr}{\pi R^4} (b \cos(\alpha) \sin(\varphi) + (a - x) \sin(\alpha) \cos(\varphi)) & 0 & \frac{2F \sin(\alpha) b}{\pi R^4} r \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2F \sin(\alpha) b}{\pi R^4} r & 0 & 0 \end{pmatrix} \{e_r, e_\varphi, e_z\}$$

Bereich II ($0 < \bar{x} \leq b$):

$$\sigma(\bar{x}, \bar{r}, \bar{\varphi}) = \begin{pmatrix} -\frac{4F\bar{r}(b - \bar{x})}{\pi R^4} (\cos(\alpha) \sin(\bar{\varphi}) + \sin(\alpha) \cos(\bar{\varphi})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{e_r, e_\varphi, e_z\}$$

4.3) Spannungs- und Verzerrungstensor für $\bar{x} = b/2$, $\bar{r} = R$, $\bar{\varphi} = \pi/3$, $\alpha = \pi/6$:

$$\sigma(b/2, R, \pi/3) = \begin{pmatrix} -\frac{2Fb}{\pi R^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{e_{\bar{r}}, e_{\bar{\varphi}}, e_{\bar{z}}\}} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon(b/2, R, \pi/3) = \begin{pmatrix} -\frac{2Fb}{\pi R^3 E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2Fb\nu}{\pi R^3 E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2Fb\nu}{\pi R^3 E} \end{pmatrix}_{\{e_{\bar{r}}, e_{\bar{\varphi}}, e_{\bar{z}}\}} \quad (4.8)$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 17 Punkte)

Gegeben sei der in Abb. 5.1 dargestellte Kran, dessen Ausleger aus den rechtwinklig und momentenstief verbundenen Balken der Längen a und b besteht. Der Ausleger ist um den Winkel $\alpha \in [0, \pi/4]$ gegenüber der x -Achse geneigt. Der Kran hebt eine Masse m , die an einem idealen und reibungsfrei umgelenkten Seil befestigt ist. Für die Länge des Balkens gelte weiterhin $a < b$.

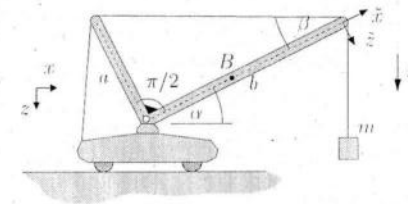


Abbildung 5.1: Auslegerkran mit Last der Masse m

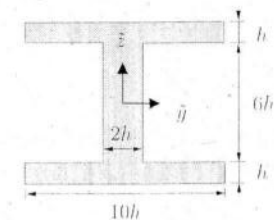


Abb. 5.2: Profilquerschnitt

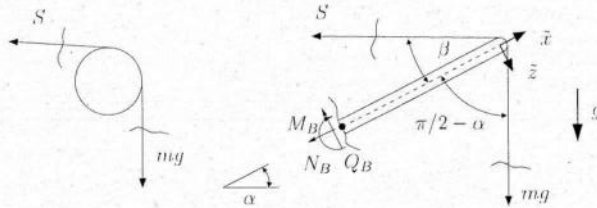
- 5.1) Berechnen Sie $\cos(\theta)$ und $\sin(\theta)$ jeweils in Abhängigkeit von a und b ohne Verwendung von $\arccos$, $\arcsin$, etc.
- 5.2) Berechnen Sie die Schnittkraft im Seil. Zeichnen Sie die entsprechenden Freischnitte. Ist das Seil straff gespannt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- 5.3) Ermitteln Sie rechnerisch die Normalkraft N_B und die Querkraft Q_B im Punkt B . Zeichnen Sie die entsprechenden Freischnitte.
Hinweis: Werten Sie die Gleichgewichtsbedingungen in dem eingezeichneten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -Koordinatensystem aus.
- 5.4) Das Profil des rechten Teils des Auslegers der Länge b ist durch den in Abb. 5.2 dargestellten Querschnitt gegeben. Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente $I_{\bar{y}}, I_{\bar{z}}, I_{\bar{y}\bar{z}}$ und die Querschnittsfläche A_0 . Wenn eine Rechnung nicht notwendig ist, begründen Sie Ihre Antwort.
- 5.5) Bestimmen Sie die betragsmäßig maximale Normalkraft im Punkt B für konstantes $\alpha \in [0, \pi/4]$ und feste Geometrieparameter a, b .
- 5.6) Welche Masse darf mit dem Kran maximal angehoben werden, wenn der rechte Teil des Auslegers der Länge b mit einem Sicherheitsfaktor $S_K = 2$ nur gegen Knicken bezüglich der $\bar{y}$ -Achse ausgelegt ist? Welcher Euler-Fall liegt vor? (Begründung!) Der E -Modul des Werkstoffes, aus dem der Träger gefertigt ist, sei bekannt.

Aufgabe 5 – Musterlösung

(Insgesamt 17 Punkte)

5.1) Berechnung von $\cos(\beta)$ und $\sin(\beta)$:

$$\sin(\beta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos(\beta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (5.1)$$

5.2) Seilkraft S :Abbildung 5.2: Freischnitt zur Bestimmung von S und von N_B, Q_B

$$S = mg \quad (5.2)$$

Unter der Wirkung der Masse m (viel größer im Vergleich zu dem Eigengewicht des Seils) und wegen der Befestigung an seinem linken Ende ist das Seil straff gespannt.

5.3) Normal- und Querkraft (Siehe Abb. 5.2(rechts)):

$$N_B = -mg \left(\sin(\alpha) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad Q_B = mg \left(\cos(\alpha) - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (5.3)$$

5.4) Flächenträgheitsmomente und Querschnittsfläche:

$$I_{\bar{y}} = \frac{848h^4}{3}, \quad I_{\bar{z}} = \frac{512h^4}{3}, \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = 0 \quad (\text{Symmetrie!}), \quad A_0 = 32h^2 \quad (5.4)$$

5.5) Betragsmäßig max. Normalkraft:

$$N_B(\alpha = \pi/4) = -mg \left(\sqrt{2}/2 + b/\sqrt{a^2 + b^2} \right) \quad (5.5)$$

5.6) Max. zulässige Masse für $S_K = 2$:

Wegen $\alpha = \text{const}$ und wegen der starren Ecke ist der Kran linksseitig eingespannt. Der Ausleger kann sich am rechten Ende frei bewegen, so dass der 1. Euler-Fall vorliegt.

$$m < \frac{212\pi^2 F h^4}{3b^2 g S_K} \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2}b} \quad (5.6)$$

Aufgabe 6 – Musterlösung

(Insgesamt 12 Punkte)

Gegeben sind zwei Halbkugeln mit Radien r und $R > r$, wobei die kleinere auf der größeren Halbkugel liegt (siehe Abb. 6.1 für einen Schnitt in der y, z Ebene). In MAPLE seien die Variablen entsprechend bezeichnet: r für den Radius der kleinen Halbkugel und R für den Radius der größeren Halbkugel. Der Punkt S markiert den Schwerpunkt der kleineren Halbkugel; die konstante Massendichte der oberen Halbkugel sei ρ , die in MAPLE als rho gegeben ist. Außerdem ist in MAPLE die Erdbeschleunigung mit g vorgegeben. Im Rahmen dieser Aufgabe soll die Stabilität dieser Position untersucht werden. Das Nullniveau der potentiellen Energie wird bei $z = 0$ angenommen.

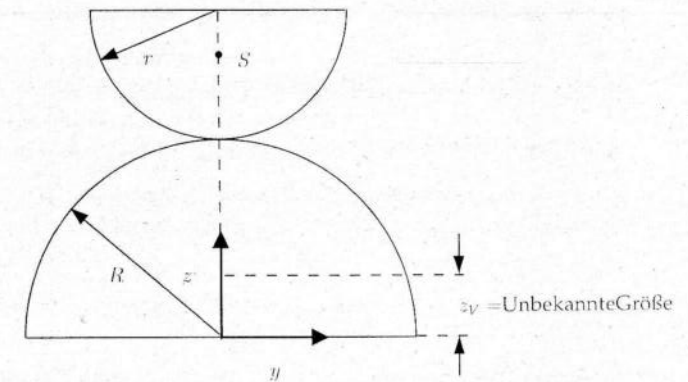


Abbildung 6.1: Zwei Halbkugeln

6.1) In MAPLE ist folgende Zeile gegeben, in der eine Berechnung für dieses System in 3D durchgeführt wird.

```
[> unbekannteGroesse :=
3/(2*Pi*R^3)*int(int(int(
radius*cos(winkel2)*radius^2*sin(winkel2),
radius=0..R),winkel1=0..2*Pi),winkel2=0..Pi/2);
```

Zeichnen Sie die berechnete Variable `unbekannteGroesse` in die Abbildung 6.1 ein.

- 6.2) Wenn die obere Halbkugel die Position aus Abb. 6.1 verlässt und auf der unteren Kugel abrollt, entsteht eine Situation wie in Abb. 6.2 gezeigt mit zwei Winkeln ϕ und ψ , welche in MAPLE-Notation als `phi` und `psi` bezeichnet werden. Für den Schwerpunktsabstand e der oberen Halbkugel gilt: $e = 3r/8$.

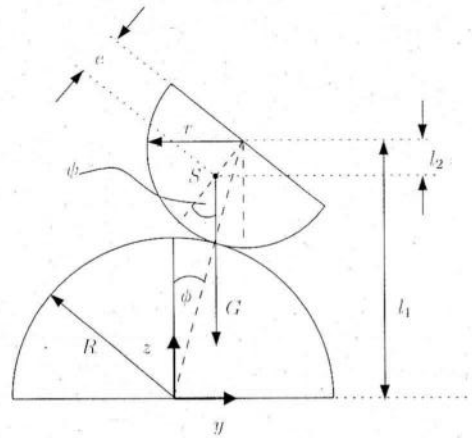


Abbildung 6.2: Abrollen der oberen auf der unteren Halbkugel

- a) Welche Beziehung besteht zwischen beiden Winkeln ϕ und ψ ?

Lösung:

$$r\psi = R\phi$$

- b) Berechnen Sie die z -Komponente des Schwerpunkts S der oberen Halbkugel, die mit z_S bezeichnet sei, als Funktion des Winkels ϕ .

Hinweis: Bestimmen Sie die in Abb. 6.2 eingetragenen Abstände l_1 und l_2 .

Lösung:

$$z_S = (R+r) \cos \phi - e \cos \left(\frac{R+r}{r} \phi \right)$$

- 6.3) In MAPLE bezeichne z_S die z -Komponente des Schwerpunkts der oberen Halbkugel (siehe 6.2)). Was wird mit nachfolgender MAPLE-Zeile berechnet?
Hinweis: Dieser Unterpunkt kann auch dann vollständig bearbeitet werden, wenn Aufgabenteil 6.2) nicht bearbeitet wurde.

```
[> U_pot := unapply(rho*g*2*Pi*r^3/3*z_S,phi);
```

Lösung:

Die potentielle Energie.

- 6.4) Berechnen Sie die erste Variation der potentiellen Energie in Abhängigkeit des Winkels ϕ .

Lösung:

$$\delta U_{\text{pot}} = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho g \left(- (R+r) \sin \phi + e \frac{R+r}{r} \sin \left(\frac{R+r}{r} \phi \right) \right) \delta \phi$$

- 6.5) Was wird durch folgende MAPLE-Zeile berechnet?

```
[> unbekannteFkt := D(D(U_pot));
```

$$\text{unbekannteFkt} := \phi \rightarrow \frac{2}{3} \pi r^3 \rho g (R+r) \left(-\cos(\phi) + \frac{3}{8} \frac{R+r}{r} \cos \left(\frac{R+r}{r} \phi \right) \right)$$

Lösung:

Die zweite Variation / Ableitung der potentiellen Energie

6.6) Welche Bedingung muss gelten, damit die Gleichgewichtslage bei $\phi = 0$ stabil ist?

Lösung:

Die zweite Variation, ausgewertet bei $\phi = 0$, muss positiv sein

$$\delta^2 U_{pot}|_{\phi=0} > 0$$

6.7) Welche Bedingung folgt für die Radien, damit die Gleichgewichtslage bei $\phi = 0$ stabil ist?

Lösung:

$$r < \frac{3}{5}R$$