Modulteilprüfung

Technische Mechanik I

27. August 2009

14.00 – 15.30 Uhr

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ____________

Bitte beachten Sie:
Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punkte	25	20	15	20	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(Insgesamt 25 Punkte)

Ein an seinem linken Ende fest eingespannter Biegebalken ① (siehe Abb. 1.1) wird durch eine konstante Streckenlast q_0 = konst belastet. In der Mitte des Balkens ① ist ein starrer Balken ② befestigt, an dem eine horizontale Kraft F wirkt. Gegeben sind $q_0 > 0$, $F > 0$ und l.

Anmerkung: Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem $\{x, y, z\}$.

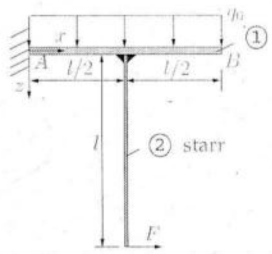

Abbildung 1.1: Balkensystem mit konstanter Streckenlast und einer Einzelkraft

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben unter Verwendung folgender Ausdrücke für die Auflagerreaktionen im Punkt A für den Fall $F = q_0 l$

$$A_x = -q_0 l, \qquad A_z = -q_0 l, \qquad M_A = -q_0 l^2/2.$$

Beachten Sie, dass sich A_x, A_z und M_A jeweils auf die positiven Richtungen der Koordinatenachsen $\{x, y, z\}$ beziehen.

1.1) Zeichnen Sie das für die Berechnung der Reaktionsgrößen zugehörige Freikörperbild.

1.2) Zeichnen Sie die für die Berechnung der Schnittgrößen des Balkens ① notwendigen Freikörperbilder. Tragen Sie die unbekannten Schnittgrößen an den Schnittufern ein.

1.3) Bestimmen Sie die Normalkraft $N(x)$ des Balkens ① in Abhängigkeit von der x-Koordinate. Zeichnen Sie den Verlauf der Normalkraft entlang der x-Achse.

1.4) Berechnen Sie die Querkraft $Q_z(x)$ des Balkens ① als Funktion der Längskoordinate x. Zeichnen Sie den Verlauf der Querkraft in Abhängigkeit von der x-Koordinate. Geben Sie den maximalen Wert von $Q_z(x)$ an.

1.5) Berechnen Sie das Biegemoment $M_y(x)$ des Balkens ①. Stellen Sie den Verlauf des Biegemoments $M_y(x)$ grafisch dar. Geben Sie die Lage und den Wert des betragsmäßig maximalen Biegemoments an.

Aufgabe 1 – Musterlösung

(Insgesamt 25 Punkte)

1.1) Freikörperbild für die Berechnung der Reaktionsgrößen:

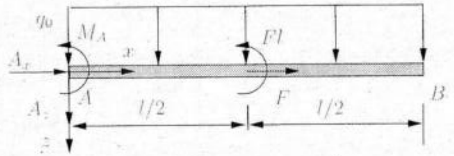

Abbildung 1.2: Freikörperbild

1.2) Freikörperbilder für die einzelnen Schnittgrößenbereiche:

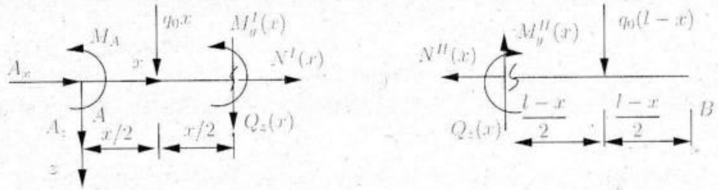

Abbildung 1.3: Schnittgrößen

1.3) Verlauf der Normalkraft $N(x)$:

$$0 \le x < l/2: \quad N^I(x) = q_0 l, \qquad l/2 \le x \le l: \quad N^{II}(x) = 0 \tag{1.1}$$

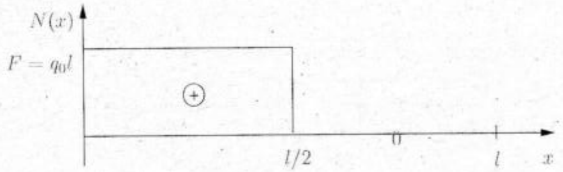

Abbildung 1.4: Verlauf der Normalkraft

1.4) Verlauf der Querkraft $Q_z(x)$:

$$0 \le x \le l: \quad Q_z(x) = q_0(l-x) \tag{1.2}$$

Maximum der Querkraft in der festen Einspannung:

$$Q_{z,\max} = Q_z(0) = q_0 l \tag{1.3}$$

2 TM I/II H_09

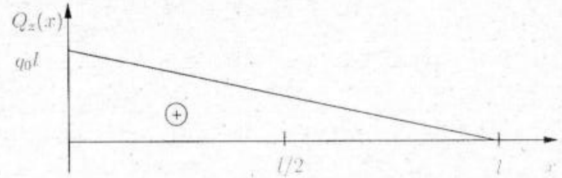

Abbildung 1.5: Verlauf der Querkraft

1.5) Verlauf des Biegemoments $M_y(x)$:

$$0 \le x < l/2: \quad M_y^I(x) = \frac{q_0 l^2}{2} + q_0 l x - \frac{q_0 x^2}{2} \tag{1.4}$$

$$l/2 \le x \le l: \quad M_y^{II}(x) = -\frac{q_0 l^2}{2} + q_0 l x - \frac{q_0 x^2}{2} \tag{1.5}$$

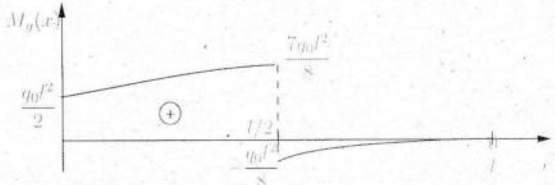

Abbildung 1.6: Verlauf des Biegemoments

Maximales Biegemoment:

$$M_{y,\max} = M_y^I(l/2) = \frac{7 q_0 l^2}{8}. \tag{1.6}$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben ist ein 90° Segment eines starren homogenen Vollzylinders mit Radius R, Länge L und der Massendichte ϱ_0. Der Zylinder liegt auf einer starren Unterlage (y-z-Ebene) und wird in der Höhe $0 \leq a \leq R$ durch eine in y-Richtung wirkende konstante Streckenlast $q_0 > 0$ belastet. Der Haftkoeffizient zwischen dem Körper und der Unterlage ist μ_0.

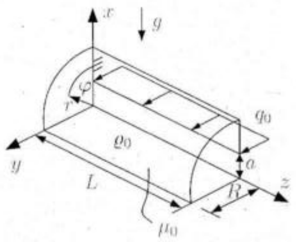

Abbildung 2.1: Zylindersegment mit Belastung durch eine konstante Streckenlast

2.1) Berechnen Sie die Gesamtmasse m des Körpers (kann ohne Integration berechnet werden). Bestimmen Sie die Koordinaten des Massenmittelpunktes bezüglich des x-y-z-Systems durch Integration. Führen Sie die Integration mit Hilfe von Zylinderkoordinaten durch.
Hinweis: Für die Komponenten des Ortsvektors bei Verwendung von Zylinderkoordinaten gilt

$$x(r,\varphi,z) = r\cos(\varphi); \qquad y(r,\varphi,z) = r\sin(\varphi), \qquad z(r,\varphi,z) = z.$$

2.2) Berechnen Sie für gegebenen Haftkoeffizienten μ_0 und für den Fall, dass kein Kippen vorliegt ($a < a_{kipp}$) die Streckenlast q_0^{krit} als Funktion von m, so dass der Körper für $q_0 > q_0^{krit}$ gleitet. Zeichnen Sie das zugehörige Freikörperbild.
Anmerkung: Verwenden Sie bei der Berechnung von q_0^{krit} zunächst nicht das Ergebnis aus Aufgabenteil 2.1), sondern notieren Sie die Masse des Körpers mit m. Setzen Sie erst abschließend die Werte aus Aufgabenteil 2.1) ein.

2.3) Berechnen Sie den Parameter a_{kipp}, so dass der Körper für eine gegebene Streckenlast q_0 gekippt wird. Zeichnen Sie das zugehörige Freikörperbild.
Anmerkung: Notieren Sie in Ihrer Rechnung die y-Koordinate des Massenmittelpunktes mit y_S und die Masse des Körpers mit m, das heißt setzen Sie nicht die Ergebnisse aus 2.1) ein.

2.4) Bestimmen Sie a_{kipp} für den Sonderfall $q_0 = q_0^{krit}$ aus Aufgabenteil 2.2). Bestimmen Sie für diesen Fall den Bereich von $\mu_0 \leq 1$, so dass a_{kipp} zulässige Werte annimmt. Berücksichtigen Sie zur Lösung von 2.4) die Ergebnisse aus den anderen Teilaufgaben.

Lösung zu Aufgabe 2

(Insgesamt 20 Punkte)

2.1) Berechnung der Gesamtmasse:

$$m = \frac{\pi}{4}\varrho_0 L R^2 \tag{2.1}$$

Berechnung des Massenmittelpunktes durch Integration :

$$x_S = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_S = \frac{4R}{3\pi}, \quad z_S = \frac{L}{2} \tag{2.2}$$

2.2) Freikörperbild und Ersatzkraft F_q :

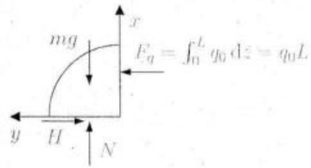

Abbildung 2.2: Freikörperbild zu Aufgabe (2.2)

$$\uparrow: N = mg, \quad \rightarrow: H = L q_0 \tag{2.3}$$

Haftgrenzbedingung:

$$|H| \leq \mu_0 N = \mu_0 m g \tag{2.4}$$

Gleiten liegt vor, wenn die Haftgrenzbedingung verletzt wird.

$$L q_0 > m g \mu_0 \quad \Rightarrow q_0^{krit} = \frac{m g \mu_0}{L} \tag{2.5}$$

Einsetzen der Teilergebnisse:

$$q_0^{krit} = \frac{\pi}{4}\varrho_0 \mu_0 g R^2 \tag{2.6}$$

2.3) Freikörperbild:

Aus Momentengleichgewicht um A folgt

$$a_{kipp} = mg\frac{R - y_S}{q_0 L} \tag{2.7}$$

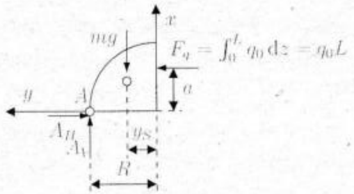

Abbildung 2.3: Freikörperbild zu Aufgabe (2.3)

2.4) Einsetzen der Teilergebnisse:

$$m = \frac{\pi}{4}\varrho_0 L R^2, \quad y_S = \frac{4R}{3\pi}, \quad q_0^{krit} = \frac{\pi}{4}\varrho_0\mu_0 g R^2 \quad \Rightarrow a_{kipp} = R\frac{1-\frac{4}{3\pi}}{\mu_0} \tag{2.8}$$

Zulässiger Bereich von a:

$$0 \leq a \leq R \Rightarrow \frac{1-\frac{4}{3\pi}}{\mu_0} \leq 1 \tag{2.9}$$

Gültiger Bereich für μ_0:

$$1 - \frac{4}{3\pi} \leq \mu_0 \leq 1 \tag{2.10}$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 15 Punkte)

Ein Biegebalken (siehe Abb. 3.1) besteht aus zwei miteinander im Punkt C gelenkig verbundenen Trägern. Die Lagerung wird durch eine feste Einspannung im Punkt A und ein Loslager im Punkt B realisiert. Die Belastung erfolgt durch eine konstante Streckenlast q_0 = konst. Gegeben sind $q_0 > 0$ und l.

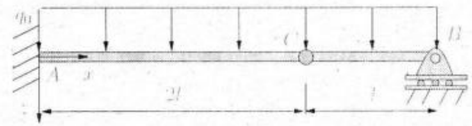

Abbildung 3.1: Balken belastet durch eine konstante Streckenlast

Verwenden Sie für die Lösung der folgenden Teilaufgaben nur das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV). Zeichnen Sie die für die Lösung der jeweiligen Teilaufgabe notwendigen virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen.

3.1) Berechnen Sie die vertikale Auflagerreaktion A_V im Punkt A.

3.2) Berechnen Sie das Reaktionsmoment M_A im Punkt A.

3.3) Bestimmen Sie die vertikale Gelenkkraft C_V im Punkt C.

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 15 Punkte)

3.1) Berechnung der vertikalen Auflagerreaktion A_V:

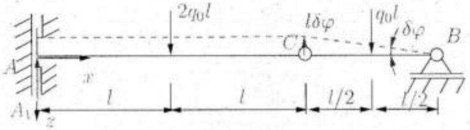

Abbildung 3.2: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von A_V

Virtuelle Arbeit:

$$\delta W = A_V l\delta\varphi - 2q_0 l^2\delta\varphi - \frac{q_0 l^2}{2}\delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow A_V = \frac{5q_0 l}{2} \tag{3.1}$$

3.2) Berechnung des Reaktionsmoments M_A:

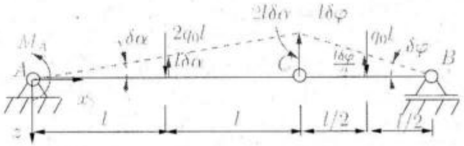

Abbildung 3.3: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von M_A

Virtuelle Arbeit mit $2l\delta\alpha = l\delta\varphi$:

$$\delta W = (M_A - 2q_0 l^2 - q_0 l^2)\delta\alpha = 0 \quad \Rightarrow M_A = 3q_0 l^2 \tag{3.2}$$

3.3) Berechnung der vertikalen Gelenkkraft C_V:

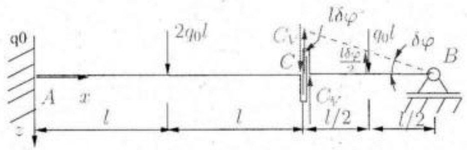

Abbildung 3.4: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von C_V

Virtuelle Arbeit:

$$\delta W = C_V l\delta\varphi - \frac{q_0 l^2}{2}\delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow C_V = \frac{q_0 l}{2} \tag{3.3}$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben ist das in Abbildung 4.1 dargestellte System zweier elastischer Stäbe mit den Elastizitätsmoduln E_1 und E_2, den Querschnittsflächen A_1 und A_2 sowie den Längen $l_1 = l_2 = l$. Die beiden Stäbe werden über ein starres Verbindungsstück durch die im Punkt P angreifende Kraft $F_0 > 0$ belastet.

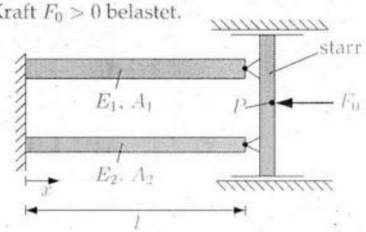

Abbildung 4.1: Stabsystem belastet durch Einzelkraft

4.1) Geben Sie an, um welchen Typ einer Federschaltung es sich handelt. Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie die Gesamtfedersteifigkeit des Systems.

4.2) Bestimmen Sie die horizontale Verschiebung u_p des Punktes P.

4.3) Geben Sie mit Hilfe der Federsteifigkeiten der Stäbe die Stabkräfte, die Spannungen und die Verzerrungen in den beiden Stäben infolge der Kraft F_0 an.

Gegeben ist nun das Stabsystem in Abbildung 4.2, das um $\Delta\theta$ homogen erwärmt wird. Neben den bereits gegebenen Größen seien nun weiterhin die Wärmeausdehnungskoeffizienten α_1 und α_2 beider Stäbe mit $\alpha_1 > \alpha_2$ sowie die Länge b bekannt.

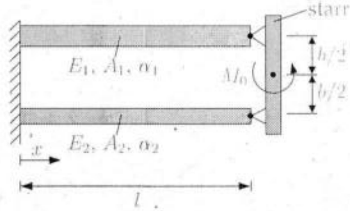

Abbildung 4.2: Stabsystem belastet durch Einzelmoment

4.4) Bestimmen Sie die horizontalen Verschiebungen $u_1(x = l)$ und $u_2(x = l)$ an den beiden Stabenden bei reiner Temperaturbelastung $\Delta\theta$ (ohne Wirkung von M_0).

4.5) Wie groß muss das Moment M_0 sein, damit die Verschiebungen der beiden Stabenden nach der Temperaturerhöhung gleich groß sind? Zeichnen Sie das Freikörperbild. Welchen Wert hat die horizontale Verschiebung der Stabenden, die sich dann einstellt?

Lösung zu Aufgabe 4

(Insgesamt 20 Punkte)

4.1) Federschaltung:
Verschiebungen an beiden Stabenden gleich ⇒ Parallelschaltung:

$$C_{ges} = \frac{E_1A_1 + E_2A_2}{l} \tag{4.1}$$

4.2) Verschiebung bei P:

$$u_p = -\frac{F_0 l}{E_1A_1 + E_2A_2} \tag{4.2}$$

4.3) Schnittkräfte, Spannungen und Dehnungen:

$$N_1 = -F_0\frac{E_1A_1}{E_1A_1 + E_2A_2} < 0, \quad N_2 = -F_0\frac{E_2A_2}{E_1A_1 + E_2A_2} < 0 \tag{4.3}$$

Spannungen sowie Verzerrungen:

$$\sigma_1 = -F_0\frac{E_1}{E_1A_1 + E_2A_2}, \quad \sigma_2 = -F_0\frac{E_2}{E_1A_1 + E_2A_2} \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{F_0}{E_1A_1 + E_2A_2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{F_0}{E_1A_1 + E_2A_2} \tag{4.5}$$

4.4) Verschiebungen bei reiner Temperaturbelastung:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\theta,1} = \alpha_1\Delta\theta, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{\theta,2} = \alpha_2\Delta\theta \tag{4.6}$$

Mit Hilfe der Randbedingungen $u_1(0) = u_2(0) = 0$ folgt

$$u_1(l) = \alpha_1\Delta\theta l, \quad u_2(l) = \alpha_2\Delta\theta l. \tag{4.7}$$

4.5) Moment M_0 zum Ausgleich der Verschiebungsdifferenz:

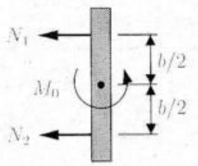

Abbildung 4.3: Freiköperbild des starren Verbindungsstückes

$$M_0 = (N_2 - N_1)\frac{b}{2}, \quad N_1 = -N_2, \quad \Rightarrow \quad M_0 = N_2 b = -N_1 b \tag{4.8}$$

Verzerrungen durch Normalkräfte:

$$\varepsilon_{\sigma,1} = \frac{N_1}{lC_1}, \quad \varepsilon_{\sigma,2} = \frac{N_2}{lC_2} \tag{4.9}$$

Verzerrungen infolge der Temperaturerhöhung:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \alpha_1\Delta\theta, \quad \varepsilon_{\theta,2} = \alpha_2\Delta\theta \tag{4.10}$$

Aus Gleichheit der Verzerrungen bzw. der Verschiebungen in den Stäben folgt

$$\varepsilon = \varepsilon_{\sigma,1} + \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{\sigma,2} + \varepsilon_{\theta,2} \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = \frac{\Delta\theta\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1A_1E_2A_2}{E_1A_1 + E_2A_2} \tag{4.12}$$

Moment und Verschiebungen der Stabenden:

$$M_0 = \frac{\Delta\theta(\alpha_1 - \alpha_2)E_1A_1E_2A_2b}{E_1A_1 + E_2A_2} \tag{4.13}$$

$$u_1(l) = u_2(l) = \frac{\Delta\theta l(\alpha_1E_1A_1 + \alpha_2E_2A_2)}{E_1A_1 + E_2A_2} \tag{4.14}$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist das in Abb. 5.1 gezeigte Kraftsystem $\{\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{r}_i\}$, $i = 1,2,3$ sowie die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_4$ und $\boldsymbol{c}$. Die gegebenen Größen seien in MAPLE als `r[i]`, $i = 1, \ldots, 4$, `F[j]`, $j = 1,2,3$ und `c` bereits definiert.

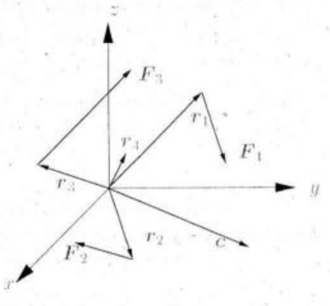

Abbildung 5.1: Kraftsystem

5.1) Welche mechanischen Größen werden im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

```
[> Groesse1 := evalm(sum('F[i]','i'=1..3)):
[> Groesse2 := evalm(sum('crossprod(r[i]-c,F[i])','i'=1..3)):
```

Lösung:
Die resultierende Kraft und das resultierende Moment bzgl. des Referenzpunktes $\boldsymbol{c}$ des Kraftsystems.

5.2) Die Kraft $\boldsymbol{F}_1$ werde von ihrem Angriffspunkt $\boldsymbol{r}_1$ zum Punkt mit Ortsvektor $\boldsymbol{r}_4$ verschoben. Was wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

```
[> Groesse3 := crossprod(r[1]-r[4],F[1]):
```

Lösung: Das bei der Verschiebung der Kraft $\boldsymbol{F}_1$ entstehende Versetzungsmoment, so dass die Kraftsysteme vor und nach der Verschiebung statisch äquivalent sind.

5.3) Welche Eigenschaft des Kraftsystems wird im folgenden MAPLE-Code überprüft?

```
[> Groesse4 := dotprod(F[1],crossprod(F[2],F[3]));
[> Groesse5 := crossprod(F[2],F[3]):
[> Groesse6 := crossprod(r[2]-r[1],r[3]-r[1]):
[> norm(crossprod(Groesse5,Groesse6),2);
```

Lösung: Es wird geprüft, ob das Kraftsystem eben ist.

5.4) Welche Eigenschaft des Kraftsystems wird im folgenden MAPLE-Code überprüft?

```
[> for i from 1 to 3 do
        eF[i] := F[i]/norm(F[i],2):
   end do:
[> Groesse7 := evalm(r[1]+a1*eF[1]-r[2]-a2*eF[2]):
[> solve({Groesse7[1]=0,Groesse7[2]=0,Groesse7[3]=0},{a1,a2}):
[> assign(%):
[> Groesse8 := evalm(r[1]+a1*eF[1]):
[> Groesse9 := evalm(r[3]+a3*eF[3]-Groesse8):
[> solve({Groesse9[1]=0,Groesse9[2]=0,Groesse9[3]=0},{a3}):
```

Lösung: Es wird geprüft, ob es sich um ein zentrales Kraftsystem handelt.

5.5) Sei zusätzlich der Vektor `rr` mit noch unbekannten Komponenten `rx`, `ry` und `rz` definiert sowie mit `F_R` und `M_R` die resultierende Kraft bzw. das resultierende Moment des Kraftsystems gegeben. Was wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

```
[> Groesse10 := evalm(crossprod(rr,F_R)-M_R):
[> solve({Groesse10[1]=0,Groesse10[2]=0,Groesse10[3]=0},
        {rx,ry,rz}):
[> Gleichung := unapply(rr+epsilon*F_R/norm(F_R,2),epsilon):
```

Lösung: Die Gleichung der Wirkungslinie der resultierenden Kraft wird berechnet, so dass die Kraftsysteme statisch äquivalent sind.