Modulteilprüfung

Technische Mechanik I

24. August 2010

14:00 – 15:30 Uhr

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ____________

Bitte beachten Sie:
Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punkte	22	24	16	18	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(Insgesamt 22 Punkte)

Das Kraftsystem $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ ist durch die folgenden Kraft- und Ortsvektoren in dem orthonormalen Bezugssystem $\{O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ gegeben

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= (1\,\mathrm{N}, 0\,\mathrm{N}, 2\,\mathrm{N})^\mathsf{T}, \\
\boldsymbol{F}_2 &= (-2\,\mathrm{N}, 2\,\mathrm{N}, 0\,\mathrm{N})^\mathsf{T}, \\
\boldsymbol{r}_1 &= (0\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})^\mathsf{T}, \\
\boldsymbol{r}_2 &= (-1\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})^\mathsf{T}.
\end{aligned}
$$

Gegeben ist ebenfalls der Ortsvektor $\boldsymbol{c}$ des Punktes C

$$\boldsymbol{c} = (1\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})^\mathsf{T}.$$

1.1) Bestimmen Sie die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_R$ und das resultierende Moment $\boldsymbol{M}_C$ bzgl. des Punktes C.

1.2) Die Kraft $\boldsymbol{F}_2$ wird in den Punkt mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}_1$ verschoben. Welches Versetzungsmoment $\boldsymbol{M}_V$ muss eingeführt werden, so dass das Kraftsystem $\{\boldsymbol{F}_R; \boldsymbol{r}_1\}$ statisch äquivalent zu dem ursprünglichen Kraftsystem $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ bleibt?

1.3) Berechnen Sie den minimalen Abstand der Wirkungslinie der Kraft $\boldsymbol{F}_1$ vom Koordinatenursprung.

1.4) Die Punkte mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ und $\boldsymbol{c}$ spannen eine Ebene auf. Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor dieser Ebene.

Aufgabe 1 – Musterlösung

(Insgesamt 22 Punkte)

1.1) Resultierende Kraft F_R und resultierendes Moment M_C:

$$F_R = \begin{pmatrix} -1\,\mathrm{N} \\ 2\,\mathrm{N} \\ 2\,\mathrm{N} \end{pmatrix}, \quad M_C = \begin{pmatrix} -4\,\mathrm{Nm} \\ -1\,\mathrm{Nm} \\ -5\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

1.2) Versetzungsmoment M_V:

$$M_V = \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{Nm} \\ 0\,\mathrm{Nm} \\ -4\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

1.3) Min. Abstand der Wirkungslinie r_{W1} vom Ursprung:

$$d_{min} = d\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{5}\sqrt{145}\,\mathrm{m} \tag{1.3}$$

1.4) Normaleneinheitsvektor der Ebene:

$$n = \frac{\sqrt{22}}{22}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 24 Punkte)

Gegeben ist ein einseitig fest eingespannter Balken (siehe Abb. 2.1) der Länge l. Der Balken wird durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet. Gegeben sind $q_0 > 0$ und l.

Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

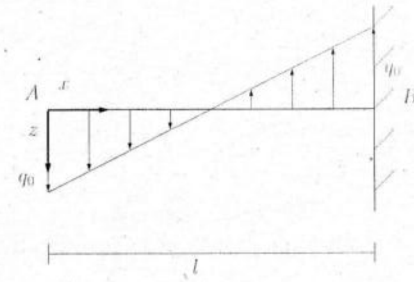


Abbildung 2.1: Balken, belastet durch lineare Streckenlast

2.1) Überprüfen Sie die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit des Balkens.

2.2) Geben Sie die Funktion der Streckenlast $q(x)$ in Abhängigkeit von der x-Koordinate an.

2.3) Berechnen Sie die Querkraft $Q(x)$ und das Biegemoment $M(x)$ nur mit Hilfe der Schnittgrößendifferentialgleichungen, ohne die Auflagerreaktionen auszurechnen.

2.4) Begründen Sie, warum die Funktion $Q(x)$ Extremstellen besitzt. Geben Sie den Extremalwert von $Q(x)$ und dessen Lage und Art an. Berechnen Sie noch die Querkraft in der festen Einspannung $Q(l)$. Zeichnen Sie den Verlauf der Querkraft $Q(x)$ entlang der x-Achse.

2.5) Berechnen Sie die Werte von $M(x)$ in der Mitte des Balkens $M(l/2)$ und in der festen Einspannung $M(l)$. Besitzt die Funktion $M(x)$ Extremstellen in dem betrachteten Bereich? Geben Sie deren Lage und Art an und begründen Sie Ihre Antwort. Zeichnen Sie den Verlauf des Biegemoments $M(x)$ entlang der x-Achse.

Aufgabe 2 – Musterlösung

(Insgesamt 24 Punkte)

2.1) Notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit:

Anzahl der starren Körper	$n = 1$
Anzahl der Reaktionsgrößen in Auflagern	$a_R = 3$
Anzahl der Reaktionsgrößen in Verbindungselementen	$v_R = 0$
	$a_R + v_R = 3n = 3$

Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit ist erfüllt.

2.2) Funktion der Streckenlast $q(x)$:

$$q(x) = q_0\left(1 - \frac{2}{l}x\right) \tag{2.1}$$

2.3) Schnittgrößen $Q(x)$ und $M(x)$:

$$Q(x) = q_0\left(\frac{x^2}{l} - x\right), \qquad M(x) = q_0\left(\frac{x^3}{3l} - \frac{x^2}{2}\right) \tag{2.2}$$

2.4) Verlauf der Querkraft $Q(x)$:
Rechnerische Bestimmung der Lage der Extremalstelle oder Begründung durch den Nulldurchgang von $q(x)$ in Abb. 2.1:

$$Q'(x) = 0 \qquad \Rightarrow x = \frac{l}{2} \tag{2.3}$$

$$Q''(x) = \frac{2}{l}q_0 > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum} \tag{2.4}$$

$$Q_{\min} = Q(l/2) = -\frac{q_0 l}{4}, \qquad Q(l) = 0 \tag{2.5}$$

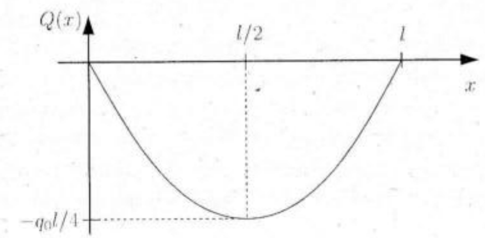


Abbildung 2.2: Querkraftverlauf

2.5) Verlauf des Biegemoments $M(x)$:

$$M(l/2) = -\frac{q_0 l^2}{12}, \qquad M(l) = -\frac{q_0 l^2}{6} \tag{2.6}$$

Rechnerische Bestimmung der Lage der Extremalstellen oder Begründung durch die Nullstellen von $Q(x)$ in Abb. 2.2:

$$M'(x) = Q(x) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = l \tag{2.7}$$

$$M''(0) = -q_0 < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum}, \qquad M''(l) = q_0 > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum} \tag{2.8}$$

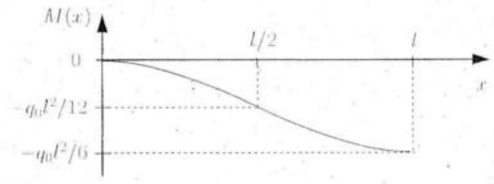


Abbildung 2.3: Verlauf des Biegemoments $M(x)$

Aufgabe 3

(Insgesamt 16 Punkte)

Gegeben ist ein am oberen Ende im Koordinatenursprung gelenkig gelagerter Stab der Länge l und der konstanten Querschnittsfläche A (Abb. 3.1). Der Stab wird durch eine waagerecht angreifende Kraft F um den Winkel α aus seiner senkrechten Ruhelage ausgelenkt und befindet sich dann im statischen Gleichgewicht. Die Massendichte des Stabes wird durch eine von der stabfesten Laufkoordinate s abhängige Funktion $\varrho(s) = \varrho_0 (1 + s/l)$ beschrieben. Auf den Stab wirkt die Erdbeschleunigung g. Gegeben sind $F > 0$, l, ϱ_0, A und g.

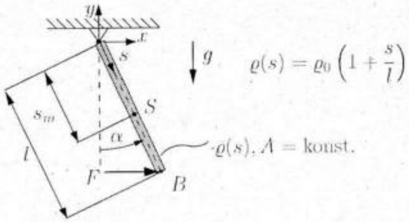


Abbildung 3.1: Gelenkig gelagerter Stab mit horizontal wirkender Kraft

3.1) Bestimmen Sie die Masse m und die Lage s_m des Massenmittelpunkts S des Stabes (bezogen auf die Koordinate s).

3.2) Wie lauten die Vektordarstellungen $\boldsymbol{G}_V$ und $\boldsymbol{F}_V$ der Gewichtskraft des Stabes im Punkt S und der horizontalen Kraft F im Punkt B bzgl. des vorgegebenen Koordinatensystems $\{x, y, z\}$?

3.3) Geben Sie die Ortsvektoren des Massenmittelpunkts $\boldsymbol{r}_S$ und des Stabendes $\boldsymbol{r}_B$ bzgl. des vorgegebenen Koordinatensystems $\{x, y, z\}$ in Abhängigkeit des Winkels α an.

3.4) Berechnen Sie die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}_S$ und $\delta\boldsymbol{r}_B$ der Angriffspunkte der Gewichtskraft und der äußeren Kraft F.

3.5) Berechnen Sie die virtuelle Arbeit δW des Gesamtsystems und damit den sich einstellenden Gleichgewichtswinkel α.

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 16 Punkte)

3.1) Bestimmung der Masse m und der Lage des Massemittelpunktes s_m:

$$m = \frac{3}{2} l A \varrho_0, \qquad s_m = \frac{5}{9} l \tag{3.1}$$

3.2) Vektordarstellung von $\boldsymbol{G}_V$ und $\boldsymbol{F}_V$:

$$\boldsymbol{G}_V = \left(0,\, -\frac{3}{2} l A \varrho_0 g,\, 0\right)^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{F}_V = (F, 0, 0)^{\mathsf{T}} \tag{3.2}$$

3.3) Ortsvektor des Massenmittelpunkts $\boldsymbol{r}_S$ und des Stabendes $\boldsymbol{r}_B$:

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{5}{9} l (\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{r}_B = l(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)^{\mathsf{T}}. \tag{3.3}$$

3.4) Berechnung der virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}_S$ und $\delta\boldsymbol{r}_B$:

$$\delta\boldsymbol{r}_S = \frac{5}{9} l (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^{\mathsf{T}} \delta\alpha, \qquad \delta\boldsymbol{r}_B = l(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^{\mathsf{T}} \delta\alpha \tag{3.4}$$

3.5) Berechnung der virtuellen Arbeit δW des Gesamtsystems:

$$\delta W = \left(F l \cos\alpha - \frac{5}{6} l^2 A \varrho_0 g \sin\alpha\right) \delta\alpha, \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{6F}{5 l A \varrho_0 g}\right) \tag{3.5}$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 18 Punkte)

Gegeben ist ein Stab mit der Querschnittsfläche A und der Länge $2l$, der aus zwei verschiedenen Materialien besteht (Abb. 4.1). Der Stab wird einerseits durch eine Kraft F_0 und andererseits durch eine Streckenlast n_0 entlang der Stabachse belastet. Der Stab unterliegt neben der mechanischen noch einer thermischen Belastung mit der Temperaturänderung $\Delta\Theta$. Die Elastizitätsmoduli und die thermischen Ausdehnungskoeffizienten der beiden Materialien sind E_1, E_2, α_1 und α_2.

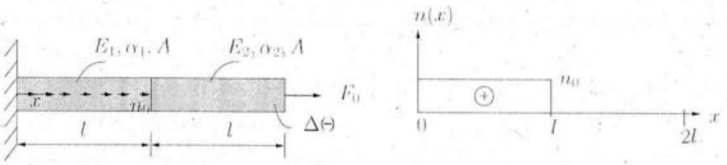


Abbildung 4.1: Inhomogener Stab mit konstanter Streckenlast und einer Einzelkraft

4.1) Berechnen Sie den Spannungsverlauf $\sigma(x)$ und zeichnen Sie die notwendigen Freikörperbilder.

4.2) Berechnen Sie den Dehnungsverlauf $\varepsilon(x)$ unter Berücksichtigung der thermisch-mechanischen Belastung.

4.3) Bestimmen Sie den Verschiebungsverlauf $u(x)$ sowie die Verschiebung am Stabende $u(2l)$ in Abhängigkeit von der thermisch-mechanischen Belastung.

4.4) Wie groß muss $\Delta\Theta$ sein, so dass sich das Stabende bei $x = 2l$ nicht verschiebt?

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 18 Punkte)

4.1) Spannungsverlauf $\sigma(x)$:

Abbildung 4.2: Freikörperbilder zur Bestimmung der Normalkraft

$$0 \le x < l, \qquad \sigma^I(x) = \frac{n_0(l-x)+F_0}{A}, \tag{4.1}$$

$$l \le x \le 2l, \qquad \sigma^{II}(x) = \frac{F_0}{A} = \text{konst} \tag{4.2}$$

4.2) Dehnungsverlauf $\varepsilon(x)$:

$$0 \le x < l, \qquad \varepsilon^I(x) = \frac{n_0(l-x)+F_0}{AE_1} + \alpha_1\Delta\Theta, \tag{4.3}$$

$$l \le x \le 2l, \qquad \varepsilon^{II}(x) = \frac{F_0}{AE_2} + \alpha_2\Delta\Theta = \text{konst} \tag{4.4}$$

4.3) Verschiebungsverlauf $u(x)$ und max. Verschiebung $u(2l)$:

$$0 \le x < l, \qquad u^I(x) = \frac{1}{AE_1}\left(n_0\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + F_0 x\right) + \alpha_1\Delta\Theta x, \tag{4.5}$$

$$l \le x \le 2l, \qquad u^{II}(x) = \frac{F_0 l}{AE_1} + \frac{F_0(x-l)}{AE_2} + \frac{n_0 l^2}{2AE_1} + \Delta\Theta\left(\alpha_1 l + \alpha_2(x-l)\right) \tag{4.6}$$

$$u^{II}(2l) = \frac{F_0 l}{A}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) + \frac{n_0 l^2}{2AE_1} + \Delta\Theta l(\alpha_1 + \alpha_2) \tag{4.7}$$

4.4) Temperaturänderung $\Delta\Theta$, so dass $u^{II}(2l) = 0$:

$$\Delta\Theta = -\frac{1}{A(\alpha_1+\alpha_2)}\left[F_0\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) + \frac{n_0 l}{2E_1}\right] \tag{4.8}$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist das in Abb. 5.1 gezeigte System, das aus dem Körper mit der Masse m_1 und der an einem Seil hängenden Masse m_2 besteht. Der Körper mit der Masse m_1 sei über zwei masselose Balken der Länge l und $2l$ gelenkig mit der Wand verbunden, während der Körper mit der Masse m_2 über das Seil, das über zwei masselose, zylindrische Körper läuft, mit dem waagerechten Balken im Punkt A verbunden ist. Bekannt seien weiter die Haftgrenzzahlen μ_K und μ_S sowie die geometrischen Größen h_1, h_2, h_3. Mit g werde die Erdbeschleunigung bezeichnet. Betrachtet wird der Grenzfall, dass der Körper mit der Masse m_2 sich gerade nicht nach unten bewegt, sondern durch die Seilverbindung mit dem Balken in Ruhe gehalten wird.

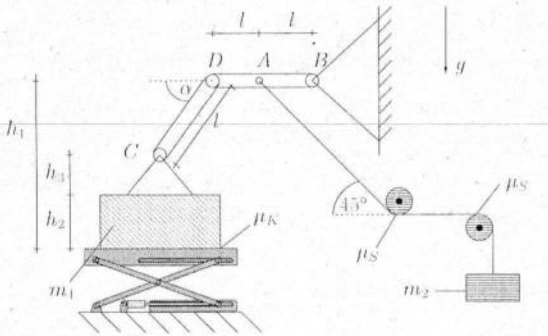


Abbildung 5.1: System mit Seil, Balken und Körpern

5.1) Gegeben sei folgender MAPLE-Code:

```
[> beta := Pi/2+Pi/4;
```

Welche mechanische Größe wird darauf aufbauend im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

Zeichnen Sie das/die zugehörige(n) Freikörperbild(er) in den Kasten auf der nächsten Seite.

```
[> Variable := exp(-mu_S*beta)*m_2*g;
```

Lösung:

6 TM I/II H_10

Freikörperbild(er):

5.2) Gegeben ist der folgende MAPLE-Code.

```
[> Gleichung1 := B_H + D_H - F*cos(Pi/4) = 0;
[> Gleichung2 := B_V + D_V + F*sin(Pi/4) = 0;
[> Gleichung3 := C_H + D_H = 0;
[> Gleichung4 := C_V + D_V = 0;
[> Gleichung5 := D_H*sin(alpha)*l - D_V*cos(alpha)*l = 0;
[> Gleichung6 := 2*D_V*l + F*sin(Pi/4)*l = 0;
```

Welche mechanischen Größen werden im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet? Vervollständigen Sie die zugehörigen Freikörperbilder.

```
[> Ergebnis := solve({Gleichung1, Gleichung2, Gleichung3,
                      Gleichung4, Gleichung5, Gleichung6},
                      {B_H, B_V, C_H, C_V, D_H, D_V});
```

Lösung:

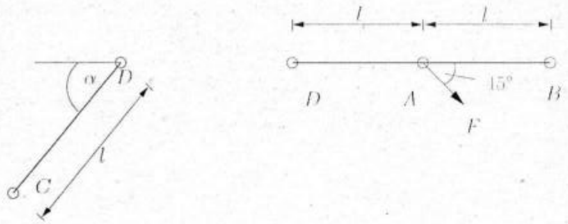


Abbildung 5.2: Freikörperbilder der beiden Balken

5.3) Vervollständigen Sie das nachfolgende Freikörperbild des Körpers der Masse m_1. Wie lautet die Haftbedingung für den Körper der Masse m_1 in Abhängigkeit von C_V und C_H und den bekannten Größen?

Lösung:

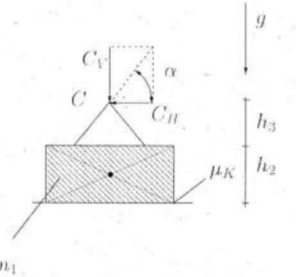


Abbildung 5.3: Freikörperbild des Körpers mit Masse m_1

5.4) Für welche Wahl des Winkels α tritt gerade der Haftgrenzfall für den Körper mit der Masse m_1 ein? Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von C_H (siehe Abbildung 5.3), μ_K und m_1 an.

Lösung:

Aufgabe 5 – Musterlösung

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist das in Abb. 5.1 gezeigte System, das aus dem Körper mit der Masse m_1 und der an einem Seil hängenden Masse m_2 besteht. Der Körper mit der Masse m_1 sei über zwei masselose Balken der Länge l und $2l$ gelenkig mit der Wand verbunden, während der Körper mit der Masse m_2 über das Seil, das über zwei masselose, zylindrische Körper läuft, mit dem waagerechten Balken im Punkt A verbunden ist. Bekannt seien weiter die Haftgrenzzahlen μ_K und μ_S sowie die geometrischen Größen h_1, h_2, h_3. Mit g werde die Erdbeschleunigung bezeichnet. Betrachtet wird der Grenzfall, dass der Körper mit der Masse m_2 sich gerade nicht nach unten bewegt, sondern durch die Seilverbindung mit dem Balken in Ruhe gehalten wird.

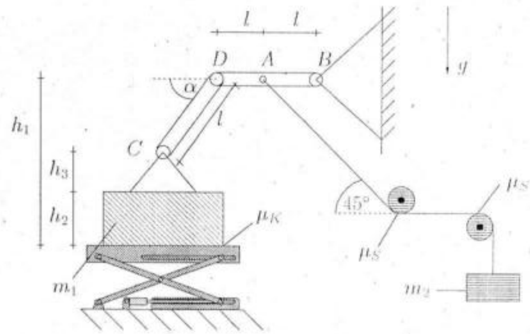


Abbildung 5.1: System mit Seil, Balken und Körpern

5.1) Gegeben sei folgender MAPLE-Code:

```
[> beta := Pi/2+Pi/4;
```

Welche mechanische Größe wird darauf aufbauend im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

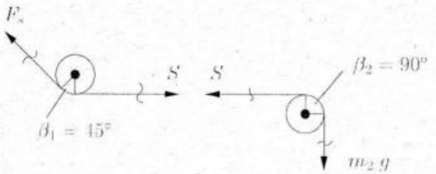
Zeichnen Sie das/die zugehörige(n) Freikörperbild(er) in den Kasten auf der nächsten Seite.

```
[> Variable := exp(-mu_S*beta)*m_2*g;
```

Lösung:

Berechnet wird die Seilkraft F_S zwischen dem Punkt A und dem linken zylindrischen Körper.

Freikörperbild(er):



5.2) Gegeben ist der folgende MAPLE-Code.

```
[> Gleichung1 := B_H + D_H - F*cos(Pi/4) = 0;
[> Gleichung2 := B_V + D_V + F*sin(Pi/4) = 0;
[> Gleichung3 := C_H + D_H = 0;
[> Gleichung4 := C_V + D_V = 0;
[> Gleichung5 := D_H*sin(alpha)*l - D_V*cos(alpha)*l = 0;
[> Gleichung6 := 2*D_V*l + F*sin(Pi/4)*l = 0;
```

Welche mechanischen Größen werden im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet? Vervollständigen Sie die zugehörigen Freikörperbilder.

```
[> Ergebnis := solve({Gleichung1, Gleichung2, Gleichung3,
                     Gleichung4, Gleichung5, Gleichung6},
                     {B_H, B_V, C_H, C_V, D_H, D_V});
```

Lösung:

In der Variablen `Ergebnis` werden die Lagerreaktionen B_H, B_V, C_H, C_V sowie die Gelenkkräfte D_H, D_V berechnet.

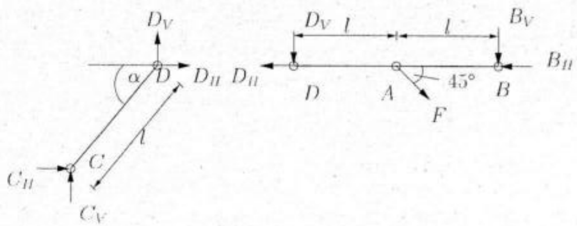


Abbildung 5.2: Freikörperbilder der beiden Balken

5.3) Vervollständigen Sie das nachfolgende Freikörperbild des Körpers der Masse m_1. Wie lautet die Haftbedingung für den Körper der Masse m_1 in Abhängigkeit von C_V und C_H und den bekannten Größen?

Lösung:

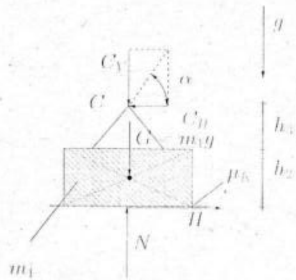


Abbildung 5.3: Freikörperbild des Körpers mit Masse m_1

$$|C_H| \leq \mu_K(m_1 g + C_V) \qquad (N \geq 0)$$

5.4) Für welche Wahl des Winkels α tritt gerade der Haftgrenzfall für den Körper mit der Masse m_1 ein? Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von C_H (siehe Abbildung 5.3), μ_K und m_1 an.

Lösung:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu_K} - \frac{m_1 g}{C_H}\right)$$