

Modulteilprüfung

Technische Mechanik I

23. August 2011

14:00 – 15:30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	24	21	15	23	7	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name:

Matrikel-Nr.:

Klausur TM I

Aufgabe 1

(insgesamt 24 Punkte)

Gegeben ist ein starrer Winkelträger, der durch ein Festlager im Punkt A und ein Loslager im Punkt B gelagert ist (siehe Abb. 1.1). Der Träger wird im Punkt B durch ein Moment $M_0 = 2Fl$ und im Punkt C durch je eine horizontale und eine vertikale Kraft F belastet. Gegeben sind die Kraft $F > 0$ und die Länge l .

Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich die angegebenen Koordinatensysteme.

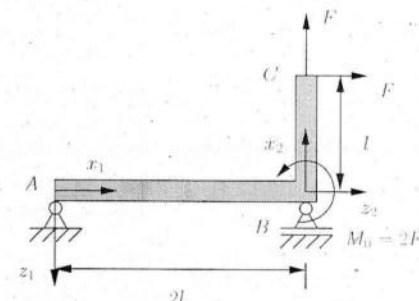


Abbildung 1.1: Starrer Winkelträger, belastet durch ein Moment $M_0 = 2Fl$ und eine horizontale und eine vertikale Kraft F

- 1.1) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B . Zeichnen Sie das für die Berechnung notwendige Freikörperbild.
- 1.2) Zeichnen Sie die für die Berechnung der Schnittgrößen des Balkens notwendigen Freikörperbilder und berechnen Sie die Normalkraft N , die Querkraft Q und das Biegemoment M im gesamten Winkelträger mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (nicht mit den Schnittgrößendifferentialgleichungen).
- 1.3) Zeichnen Sie den Verlauf der Normalkraft N entlang der x_1 - und der x_2 -Achse unter Angabe aller Rand- und Übergangswerte.
- 1.4) Zeichnen Sie den Verlauf der Querkraft Q entlang der x_1 - und der x_2 -Achse unter Angabe aller Rand- und Übergangswerte.
- 1.5) Zeichnen Sie den Verlauf des Moments M entlang der x_1 - und der x_2 -Achse unter Angabe aller Rand- und Übergangswerte.

Aufgabe 1 - Musterlösung

(Insgesamt 24 Punkte)

1.1) Berechnung der Auflagerreaktionen:

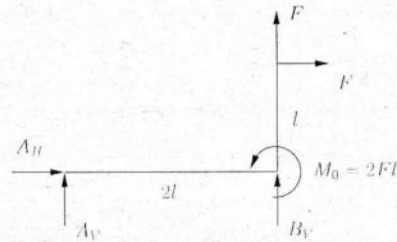


Abbildung 1.2: Freikörperbild für die Berechnung der Reaktionsgrößen

$$A_H = -F, \quad A_V = \frac{F}{2}, \quad B_V = -\frac{3F}{2}. \quad (1.1)$$

1.2) Berechnung der Schnittgrößen $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$:

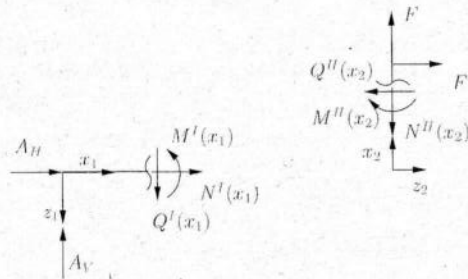


Abbildung 1.3: Freikörperbilder für die Berechnung der Schnittgrößen

Die Schnittgrößen lauten für Bereich I ($0 \leq x_1 \leq 2l$)

$$N^I(x_1) = F, \quad Q^I(x_1) = \frac{F}{2}, \quad M^I(x_1) = \frac{Fx_1}{2} \quad (1.2)$$

und für Bereich II ($0 \leq x_2 \leq l$)

$$N^{II}(x_2) = F, \quad Q^{II}(x_2) = F, \quad M^{II}(x_2) = -F(l - x_2). \quad (1.3)$$

1.3) Verlauf der Normalkraft N :

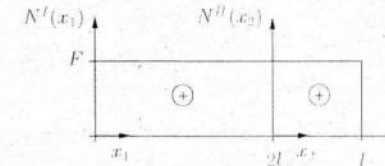


Abbildung 1.4: Verlauf der Normalkraft

1.4) Verlauf der Querkraft Q :

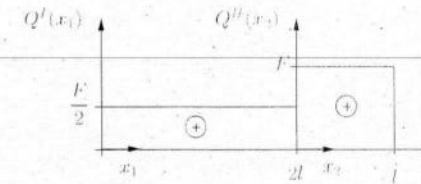


Abbildung 1.5: Verlauf der Querkraft

1.5) Verlauf des Biegemoments M :

Die Werte an den Grenzen der Schnittgrößenbereiche sind

$$M^I(0) = 0, \quad M^I(2l) = Fl, \quad M^{II}(0) = -Fl, \quad M^{II}(l) = 0. \quad (1.4)$$

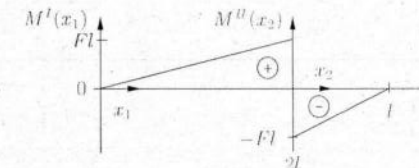


Abbildung 1.6: Verlauf des Biegemoments

Aufgabe 2

(Insgesamt 21 Punkte)

Gegeben ist die in Abb. 2.1(a) gezeigte Halbkugel mit der inhomogenen Massendichte ρ und dem Radius R . Die Massendichte ρ ist nur von der Koordinate z abhängig. Der Radius R , der Parameter ρ_0 und die Höhe H sind gegeben.

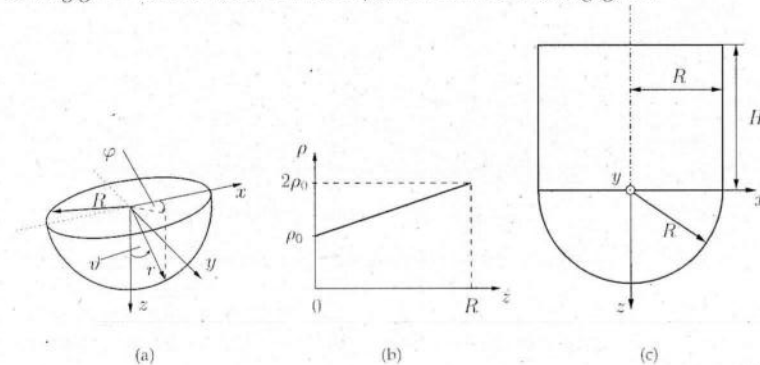


Abbildung 2.1: (a) Halbkugel mit Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ; (b) Verlauf der Dichtefunktion $\rho(z)$; (c) Aufbringen eines homogenen Zylinders

- 2.1) Berechnen Sie die Funktion der Massendichte ρ in Abhängigkeit von der z -Koordinate (siehe Abb. 2.1(b)).
- 2.2) Bestimmen Sie das Volumen der Halbkugel durch Integration in Kugelkoordinaten.
- 2.3) Berechnen Sie die Masse der Halbkugel durch Integration in Kugelkoordinaten. Verwenden Sie dabei die Stammfunktion: $\int \cos(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x)$.
- 2.4) Wie groß ist die mittlere Massendichte $\bar{\rho}$?
- 2.5) Berechnen Sie den Massenmittelpunkt r_m der Halbkugel durch Integration in Kugelkoordinaten. Begründen Sie Ihre Ergebnisse, falls Rechnungen weggelassen werden können. Verwenden Sie bei der Integration die Stammfunktionen:

$$\int \cos(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x), \quad \int \cos^2(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{3} \cos^3(x).$$
- 2.6) Auf die Halbkugel wird ein Zylinder homogener Massendichte ρ_0 und der Höhe H aufgesetzt. Die Radien der Halbkugel und des Zylinders sind identisch (siehe Abb. 2.1(c)). Wie groß muss die Höhe H sein, damit der Massenmittelpunkt des zusammengesetzten Körpers bei $z_m = 0$ liegt?

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 21 Punkte)

- 2.1) Funktion der Massendichte $\rho(z)$:

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{z}{R} + 1 \right). \quad (2.1)$$

- 2.2) Volumen der Halbkugel:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3. \quad (2.2)$$

- 2.3) Masse der Halbkugel:

$$m_{HK} = \frac{11}{12} \pi R^3 \rho_0. \quad (2.3)$$

- 2.4) Mittlere Massendichte:

$$\bar{\rho} = \frac{11}{8} \rho_0. \quad (2.4)$$

- 2.5) Berechnung des Massenmittelpunkts:

Da sowohl die Geometrie als auch die inhomogene Massendichte $\rho(z)$ bezüglich der z -Achse rotationssymmetrisch sind, folgt für die ersten beiden Komponenten des Massenmittelpunktvektors (x_m, y_m) :

$$x_m^{HK} = y_m^{HK} = 0 \quad (\text{wegen Symmetrie}). \quad (2.5)$$

Die dritte Komponente wird durch Integration berechnet:

$$z_m^{HK} = \frac{23}{32} R. \quad (2.6)$$

- 2.6) Massenmittelpunkt des zusammengesetzten Körpers:

Den Massenmittelpunkt des zusammengesetzten Körpers erhält man durch:

$$z_m = \frac{1}{m^*} (z_m^{HK} m_{HK} + z_m^Z m_Z) \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.7)$$

mit der Gesamtmasse m^* . Daraus ergibt sich für die Höhe:

$$H = \sqrt{\frac{23}{30}} R. \quad (2.8)$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 15 Punkte)

Ein Biegebalken (siehe Abb. 3.1) besteht aus zwei miteinander im Punkt C gelenkig verbundenen Trägern. Die Lagerung wird durch eine feste Einspannung im Punkt A und ein Loslager im Punkt B realisiert. Die Belastung erfolgt durch eine konstante Streckenlast $q_0 = \text{konst.}$ zwischen den Punkten C und B , sowie eine Einzelkraft F_0 und ein Moment M_0 , die beide bei $x = l$ angreifen.

Gegeben sind $q_0 > 0$, $F_0 > 0$, $M_0 > 0$ und l .

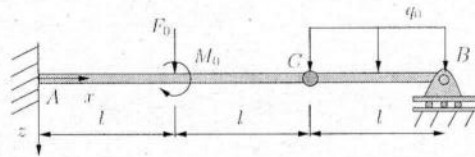


Abbildung 3.1: Balken belastet durch eine konstante Streckenlast, Einzelkraft und Moment

Verwenden Sie für die Lösung der folgenden Teilaufgaben nur das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV).

Zeichnen Sie die für die Lösung der jeweiligen Teilaufgabe notwendigen virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen.

- 3.1) Berechnen Sie die vertikale Auflagerreaktion A_V im Punkt A .
- 3.2) Berechnen Sie das Reaktionsmoment M_A im Punkt A .
- 3.3) Bestimmen Sie die vertikale Gelenkkraft C_V im Punkt C .

Aufgabe 3 - Lösung

(Insgesamt 15 Punkte)

3.1) Berechnung der vertikalen Auflagerreaktion A_V :

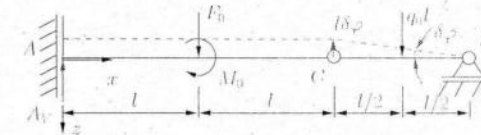


Abbildung 3.2: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von A_V

$$\delta W = A_V l \delta \varphi - F_0 l \delta \varphi - \frac{q_0 l^2}{2} \delta \varphi = 0 \Rightarrow A_V = F_0 + \frac{q_0 l}{2} \quad (3.1)$$

3.2) Berechnung des Reaktionsmoments M_A :

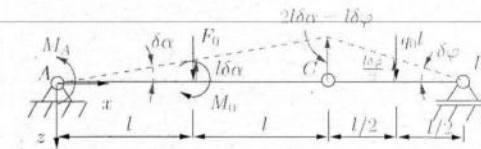


Abbildung 3.3: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von M_A

Relation der virtuellen Verdrehungen:

$$\delta \varphi = 2 \delta \alpha \quad (3.2)$$

Damit ergibt sich die zugehörige virtuelle Arbeit:

$$\delta W = M_A \delta \alpha - M_0 \delta \alpha - F_0 l \delta \alpha - q_0 l^2 \delta \alpha = 0 \Rightarrow M_A = M_0 + F_0 l + q_0 l^2 \quad (3.3)$$

3.3) Berechnung der vertikalen Gelenkkraft C_V :

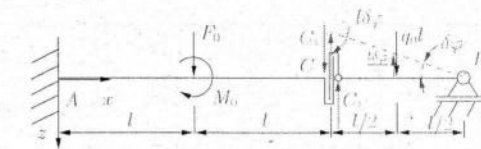


Abbildung 3.4: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von C_V

$$\delta W = C_V l \delta \varphi - \frac{q_0 l^2}{2} \delta \varphi = 0 \Rightarrow C_V = \frac{q_0 l}{2} \quad (3.4)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 23 Punkte)

Ein starrer Körper der Masse m wird mit einem gelenkigen Lager und zwei gelenkig gelagerten elastischen Stäben gehalten (Abb. 4.1 (links)). Lediglich Stab 1 kann sich mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten α thermisch ausdehnen. Die Masse der Stäbe ist vernachlässigbar. Ohne Wirkung des Gewichts des starren Körpers und ohne Temperaturänderungen hängt der Körper horizontal. Die Umgebungstemperatur ändert sich um $\Delta\theta$. Gegeben sind weiterhin die E-Moduln $E_1 = 2E$ und $E_2 = E$, A , l_1 , l_2 , a , g , $\beta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $\sin \beta = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

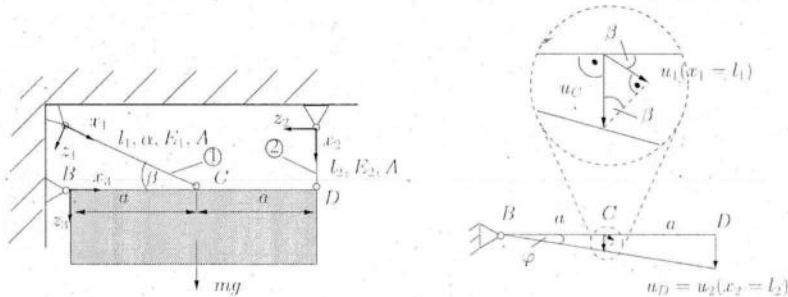


Abbildung 4.1: Gelenkig gelagerter starrer Körper (links) und Zwangsbedingung für die Verschiebungen (rechts)

Auf das System wirken Gewichtskraft und Temperaturänderung. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

- 4.1) Bestimmen Sie die Normalkraft N_2 in Stab 2 in Abhängigkeit der Normalkraft N_1 in Stab 1.
- 4.2) Berechnen Sie die Längsverschiebungen $u_1(x_1)$ und $u_2(x_2)$ der Stäbe durch Integration der Verzerrungen in den Stäben. Geben Sie explizit die Verschiebungen der Stabenden $u_1(x_1 = l_1)$ und $u_2(x_2 = l_2)$ in den Punkten C und D an. Drücken Sie dafür die Längen der Stäbe in Abhängigkeit der Größe a aus.
- 4.3) Ermitteln Sie anhand der in Abb. 4.1 (rechts) dargestellten kinematischen Zwangsbedingung die Beziehung zwischen $u_1(x_1 = l_1)$ und $u_2(x_2 = l_2)$.
- 4.4) Berechnen Sie die unbekannte Normalkraft N_1 aus der vorher bestimmten Beziehung zwischen $u_1(x_1 = l_1)$ und $u_2(x_2 = l_2)$.
- 4.5) Berechnen Sie den minimalen und maximalen Winkel φ , wenn für die Temperaturänderung gilt $\Delta\theta = \pm\Delta\theta_0$ ($\Delta\theta_0 > 0$).
- 4.6) Ermitteln Sie die Stabquerschnittsfläche A , so dass der Körper bei Abkühlung um $\Delta\theta = -\Delta\theta_0$ ($\Delta\theta_0 > 0$) horizontal hängt.

Aufgabe 4 - Musterlösung

(Insgesamt 23 Punkte)

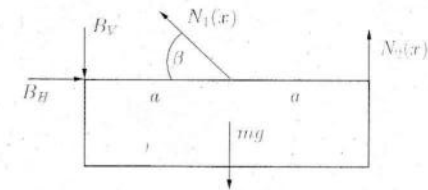
4.1) Bestimmung der Normalkraft N_2 :

Abbildung 4.2: Freikörperbilder für die Berechnung der Normalkräfte

$$N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{N_1}{1} \quad (4.1)$$

4.2) Berechnung der Verschiebungsfelder:

Verschiebung der Stäbe:

$$u_1(x_1) = \frac{N_1}{2EA} x_1 + \alpha \Delta\theta x_1 \quad (4.2)$$

$$u_2(x_2) = \frac{N_2}{EA} x_2 \quad (4.3)$$

Verschiebungen der Stabenden mit den Längen in Abhängigkeit von a :

$$l_1 = \frac{2}{3}a\sqrt{3}, \quad l_2 = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \quad (4.4)$$

folgt für die Verschiebungen der Stabenden:

$$u_1(l_1) = \frac{N_1}{2EA} \frac{2a}{\sqrt{3}} + \alpha \Delta\theta \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad (4.5)$$

$$u_2(l_2) = \frac{N_2}{EA} \frac{1}{3}a\sqrt{3} \quad (4.6)$$

4.3) Bestimmung der Beziehung zwischen den Verschiebungen der Stabenden:

Zwangsbedingung: Mit Hilfe des Strahlensatzes bzw. Betrachtungen in

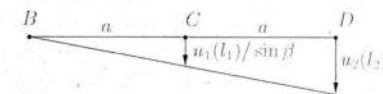


Abbildung 4.3: Verlauf der Verschiebung $u(x)$

ähnlichen Dreiecken (Abb. 4.3) und Abb. 4.1(rechts) folgt:

$$Au_1(l_1) = u_2(l_2) \quad (4.7)$$

4.4) Berechnung der Normalkraft N_1 :

Durch Einsetzen in $u_1(l_1) = u_2(l_2)$ folgt:

$$N_1 = \frac{2}{17}mg - \frac{32}{17}\alpha\Delta\theta EA. \quad (4.8)$$

4.5) Winkel φ :

$$\varphi(\Delta\theta) \approx \sin \varphi = \left(\frac{2N_1}{EA} + 4\alpha\Delta\theta \right) \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (4.9)$$

Mit Gleichung 4.8 folgt:

$$\varphi_{max} = \frac{4}{51}\sqrt{3}\left(\frac{mg}{EA} + \alpha\Delta\theta_0\right), \quad \varphi_{min} = \frac{4}{51}\sqrt{3}\left(\frac{mg}{EA} - \alpha\Delta\theta_0\right). \quad (4.10)$$

4.6) Stabquerschnittsfläche A :

$$\varphi_{min} = 0 \Rightarrow A = \frac{mg}{\alpha\Delta\theta_0 E} \quad (4.11)$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 7 Punkte)

Gegeben ist das in Abb. 5.1 dargestellte System. Die beiden Teilkörper der Massen m_1 und m_2 werden wie dargestellt durch ein ideales Seil verbunden, das über einen fest eingespannten zylinderförmigen Körper umgelenkt wird. Zwischen der geneigten Ebene und dem Körper mit der Masse m_1 wirkt die Haftgrenzzahl μ_{01} und zwischen dem Seil und der Rolle wirkt die Haftgrenzzahl μ_{02} .

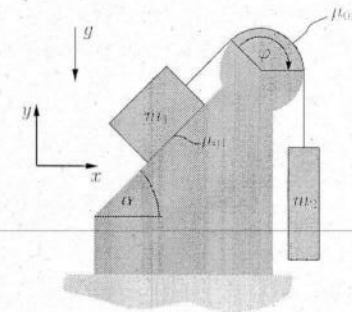


Abbildung 5.1: System mit zwei durch ein ideales Seil verbundenen Massen m_1 und m_2 .

5.1) Ergänzen Sie das folgende Freikörperbild (Abb. 5.2) um das Freikörperbild von m_1 mit allen angreifenden Kräften für den Fall, dass sich der Körper mit Masse m_2 gerade noch nicht nach unten bewegt.

Lösung:

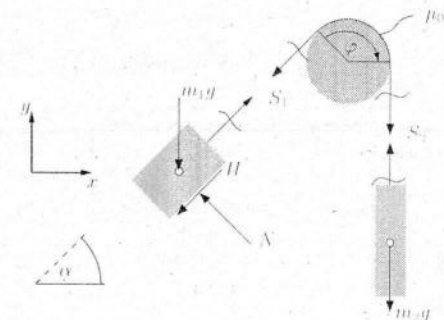


Abbildung 5.2: Freikörperbild

5.2) Welche mechanische Bedeutung besitzt die im nachfolgenden MAPLE-Code aufgestellte Gleichung `gleichung1` unter Berücksichtigung der

Freikörperbilder (Abb. 5.2)?

```
[> gleichung1:= S2-m2*g=0;
```

Lösung:

Es wird das Kräftegleichgewicht von m_2 in y -Richtung aufgestellt.

5.3) Welche Relation besteht zwischen S_1 und S_2 im Grenzfall, dass sich der Körper mit der Masse m_2 gerade noch nicht nach unten bewegt?

Lösung:

Die Haftbedingung für die Umlenkrolle lautet:

$$S_2 = S_1 e^{\mu_{02} \varphi}. \quad (5.1)$$

5.4) Betrachten Sie nachfolgenden MAPLE-Code. Welche mechanische Größe wird mit `groesse2` berechnet und welche mechanische Bedeutung besitzt `gleichung4`?

```
[> gleichung2:= S1-H*m1*g*sin(alpha)=0;
[> groesse1:= solve(gleichung2,H);assign(%);
[> gleichung3:= N-m1*g*cos(alpha)=0;
[> groesse2:= solve(gleichung3,N);assign(%);
[> gleichung4:= abs(groesse1)=mu01*groesse2;
```

Lösung:

- Mit `groesse2` wird die Normalkraft für den Körper mit der Masse m_1 berechnet.
- Mit `gleichung4` wird die Haftgrenzbedingung am Körper 1 aufgestellt.

5.5) Welche Einschränkung existiert für m_1 für den Fall, dass sich der Körper der Masse m_2 gerade noch nicht nach unten in Bewegung setzt?

Lösung:

Mit der Haftbedingung sowie Gl. 5.1 folgt:

$$\frac{m_2}{e^{\mu_{02} \varphi} (\sin \alpha + \mu_{01} \cos \alpha)} \leq m_1. \quad (5.2)$$