

Modulteilprüfung

Technische Mechanik I

11. März 2010

09.00 – 10.30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	20	15	20	25	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Klausur TM I

Aufgabe 1

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben sei ein durch zwei Einzelkräfte F_1 und F_2 sowie eine konstante Streckenlast q_0 belasteter Balken (Abb. 1.1). Der Balken ist im Punkt A durch ein Fest- und im Punkt B durch ein Loslager gelagert. Gegeben sind $q_0 > 0$, $F_1 > 0$, $F_2 > 0$ und l .

Anmerkung: Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

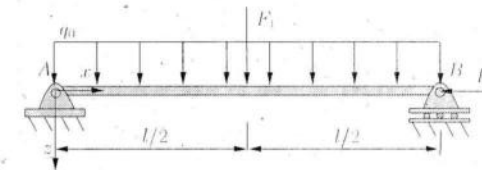


Abbildung 1.1: Balken mit konstanter Streckenlast und zwei Einzelkräften

- 1.1) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B. Zeichnen Sie das für die Berechnung notwendige Freikörperbild.
- 1.2) Zeichnen Sie die für die Berechnung der Schnittgrößen des Balkens notwendigen Freikörperbilder und berechnen Sie die Schnittgrößen in Abhängigkeit von der x -Koordinate.
- 1.3) Zeichnen Sie den Verlauf der Normalkraft $N(x)$ und der Querkraft $Q(x)$ und geben Sie die Werte der Querkraft bei $x = 0$, $x = l/2$ und $x = l$ explizit an.

Aufgabe 1 – Musterlösung

(Insgesamt 20 Punkte)

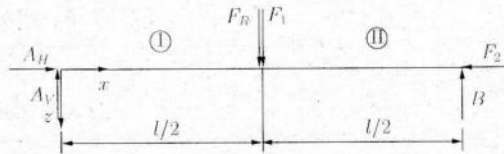
1.1) Berechnung der Reaktionsgrößen mit der Resultierenden der Linienlast $F_R = q_0 l$:

Abbildung 1.2: Freikörperbild

$$A_H = F_2, \quad B = \frac{1}{2}(q_0 l + F_1), \quad A_V = \frac{1}{2}(q_0 l + F_1) \quad (1.1)$$

1.2) Bestimmung der Schnittgrößen in den Bereichen I und II:

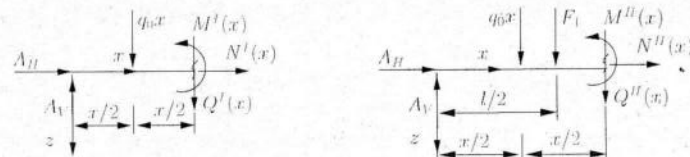


Abbildung 1.3: Freikörperbilder für Bereiche I und II

- Verlauf der Normalkraft $N(x)$:

$$0 \leq x \leq l: \quad N^I(x) = N^{II}(x) = -F_2 \quad (1.2)$$

- Verlauf der Querkraft $Q(x)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x < l/2: \quad Q^I(x) &= -q_0 x + \frac{1}{2}(q_0 l + F_1), \\ l/2 \leq x \leq l: \quad Q^{II}(x) &= -q_0 x + \frac{1}{2}(q_0 l - F_1) \end{aligned} \quad (1.3)$$

- Verlauf des Biegemoments $M(x)$:

$$0 \leq x < l/2: \quad M^I(x) = \frac{1}{2}(q_0 l + F_1)x - \frac{1}{2}q_0 x^2, \quad (1.4)$$

$$l/2 \leq x \leq l: \quad M^{II}(x) = \frac{1}{2}(q_0 l - F_1)x - \frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{1}{2}lF_1 \quad (1.5)$$

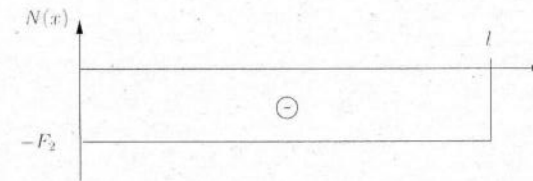
1.3) Darstellung der Normalkraft $N(x)$ und der Querkraft $Q(x)$:

Abbildung 1.4: Verlauf der Normalkraft

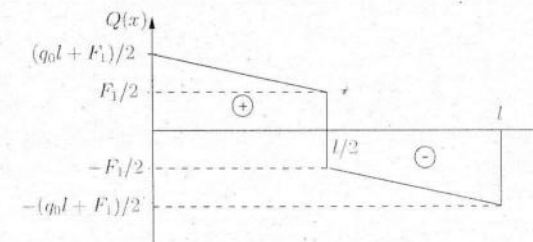


Abbildung 1.5: Verlauf der Querkraft

Aufgabe 2

(Insgesamt 15 Punkte)

Ein Ballon steigt aufgrund von Auftrieb in die Höhe. An dem Ballon ist ein Seil der Gesamtlänge l_s und der längenbezogenen Masse μ befestigt. Zusätzlich zur Auftriebskraft F_A wirkt eine Windkraft $F_W = F_A$ auf den Ballon. Der Ballon schafft es nicht, das Seil komplett anzuheben, weshalb ein Teil des Seils der Länge l auf dem Boden liegen bleibt und sich die in Abb. 2.1 dargestellte Seilkurve einstellt.

Hinweis: Sämtliche Endergebnisse in 2.2) und 2.3) sind ausschließlich in Abhängigkeit von F_A , μ , g und l_s anzugeben. Es gilt $\tan(\pi/4) = 1$. Es gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

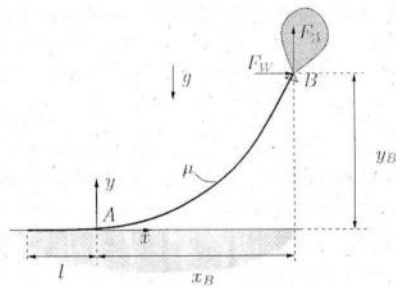


Abbildung 2.1: Ballon, gebunden mit einem Seil

- 2.1) Ermitteln Sie aufgrund der Lage des Koordinatensystems die Konstanten C_1 und C_2 in der allgemeinen Form der Seilkurve

$$y(x) = \frac{H_0}{q_0} \cosh\left(\frac{q_0}{H_0}(x + C_1)\right) + C_2.$$

- 2.2) Bestimmen Sie mit Hilfe der aus F_A und F_W resultierenden Seilkraft am Ballon sowie dem sich einstellenden Winkel bei B die Horizontalkraft H_0 sowie den Abstand x_B . Geben Sie die Seilkurve an.
- 2.3) Bestimmen Sie die Höhe y_B sowie die Länge l des auf dem Boden liegenden Teil des Seils.

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 15 Punkte)

- 2.1) Allgemeine Form der Seilkurve:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{H_0}{q_0} \quad (2.1)$$

- 2.2) Horizontalkraft H_0 und Abstand x_B :

$$H_0 = F_A, \quad x_B = \frac{F_A}{\mu g} \operatorname{arsinh}(1), \quad y(x) = \frac{F_A}{\mu g} \left(\cosh\left(\frac{\mu g}{F_A} x\right) - 1 \right) \quad (2.2)$$

- 2.3) Höhe y_B sowie Länge des auf dem Boden liegenden Seilstücks l :

$$y_B = \frac{F_A}{\mu g} (\sqrt{2} - 1), \quad l = l_s - \frac{F_A}{\mu g} \quad (2.3)$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 20 Punkte)

- 3.1) Drei Massepunkte mit den Massen $m_1 = 2m$, $m_2 = 2m$ und $m_3 = m$ sind durch drei masselose Stäbe der Länge l starr miteinander verbunden (Abb. 3.1). Die Gesamtkonstruktion ist im Mittelpunkt A drehbar gelagert, so dass der Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ beliebig sein kann. Gegeben sind die Größen m , l und g .

- (a) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems bzgl. des in Abb. 3.1 gegebenen Nullniveaus an.
 (b) Für welche Winkel α liegt ein Gleichgewichtszustand des Systems vor?
 (c) Bestimmen Sie die Art der Stabilität aller möglichen Gleichgewichtslagen.

Hinweise: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
 $\sin(60^\circ) = \cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\cos(60^\circ) = \sin(30^\circ) = 1/2$

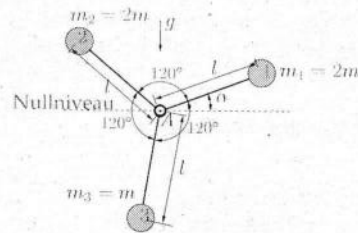


Abbildung 3.1: Konstruktion aus Massepunkten und masselosen Stäben

- 3.2) Ein Biegebalken (siehe Abb. 3.2) besteht aus zwei im Punkt C miteinander gelenkig verbundenen Trägern. Der Balken ist im Punkt A durch ein Loslager und im Punkt B durch eine feste Einspannung gelagert. Die Belastung erfolgt durch eine lineare Streckenlast mit dem maximalen Wert q_0 im Punkt C und durch eine Einzelkraft F . Gegeben sind $q_0 > 0$, $F > 0$ und l .

- (a) Überprüfen Sie die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit des Biegebalkens.

Verwenden Sie für die Lösung der folgenden Teilaufgaben nur das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV). Zeichnen Sie für die jeweilige Teilaufgabe die virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen.

- (b) Berechnen Sie die vertikale Auflagerreaktion A_V im Punkt A .
 (c) Berechnen Sie das Reaktionsmoment M_B im Punkt B .

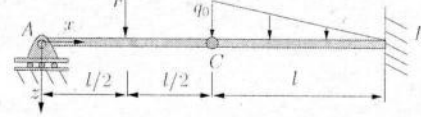


Abbildung 3.2: Balken belastet durch eine lineare Streckenlast und Einzelkraft

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 20 Punkte)

- 3.1) Stabilität

(Insgesamt zu 3.1) 10 Punkte)

- (a) Potentielle Energie $U(\alpha)$:

$$U(\alpha) = \frac{l}{2} m g l \left(\sin(\alpha) + \sqrt{3} \cos(\alpha) \right) \quad (3.1)$$

- (b) Gleichgewichtslagen des Systems ($\alpha \in [0, 2\pi]$):

$$\alpha_1 = 30^\circ, \quad \alpha_2 = 210^\circ \quad (3.2)$$

- (c) Art der Stabilität:

$$\alpha_1 = 30^\circ \Rightarrow \text{instabiles Gleichgewicht.}$$

$$\alpha_2 = 210^\circ \Rightarrow \text{stabiles Gleichgewicht}$$

- 3.2) Prinzip der virtuellen Verschiebungen

(Insgesamt zu 3.2) 10 Punkte)

- (a) Notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit:

$$a_R + v_R = 3q \quad (2D \text{ Fall}) \quad (3.3)$$

Anzahl der starren Körper	$n = 2$
Anzahl der Reaktionsgrößen in Auflagern	$a_R = 3 + 1 = 4$
Anzahl der Reaktionsgrößen in Verbindungselementen	$v_R = 2$
$a_R + v_R = 3n = 6$	

Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit ist erfüllt.

- (b) Berechnung der vertikalen Auflagerreaktion A_V :

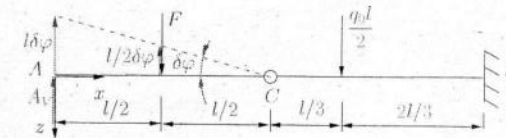
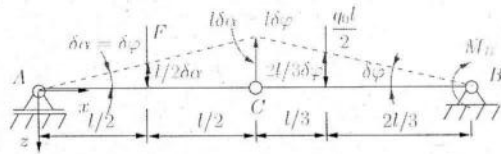


Abbildung 3.3: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von A_V

$$A_V = \frac{F}{2} \quad (3.4)$$

(c) Berechnung des Reaktionsmoments M_B :Abbildung 3.4: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von M_B

$$M_B = \frac{q_0 l^2}{3} + \frac{F l}{2} \quad (3.5)$$

Aufgabe 4

(insgesamt 25 Punkte)

- 4.1) Gegeben sei das eindimensionale System eines beidseitig fest eingespannten Stabes (Abb. 4.1) mit zwei jeweils über die Länge l konstanten rechteckigen Querschnitten der Höhen h_1 und h_2 mit $h_1 = 2h_2$ sowie der konstanten Dicke d . Das Material des gesamten Stabes sei homogen, isotrop und linear elastisch mit dem Elastizitätsmodul E und dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten α_T . Der Stab ist bei Raumtemperatur spannungsfrei und wird im Folgenden um die Temperaturdifferenz $\Delta\Theta < 0$ homogen abgekühlt.



Abbildung 4.1: Beidseitig fest eingespannter Flachstab

- (a) Bestimmen Sie unter Vernachlässigung des Einflusses der Kerbe den Betrag und die Lage der maximalen Spannung $|\sigma|_{max}$ im Stab.
- (b) Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Kerbe einen Kerbradius r hat. Bestimmen Sie nun unter Berücksichtigung des Kerbeinflusses den Betrag der maximalen Spannung $|\sigma^K|_{max}$. Für die Geometrie des Stabes soll gelten $h_2 = 5r$. Bestimmen Sie den Kerbspannungsfaktor aus dem in Abb 4.2 dargestellten Diagramm.

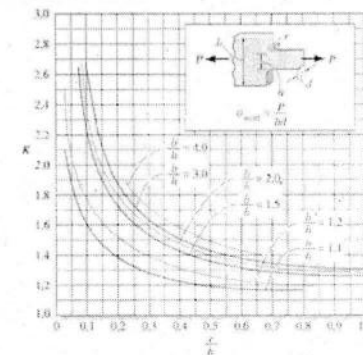


Abbildung 4.2: Kerbspannungsfaktor bei Flachzugproben (Quelle: Hibbeler: Technische Mechanik 2 - Festigkeitslehre, Springer 2006)

- 4.2) Gegeben sei ein zylindrischer senkrecht stehender, schlanker Stab, der durch sein Eigengewicht belastet ist (Abb. 4.3). Die Höhe h , der Durchmesser d , der Elastizitätsmodul E , die Erdbeschleunigung g sowie die Funktion der inhomogenen Dichte

$$\varrho(x) = \varrho_0 \left(2 - \frac{x}{h}\right)$$

sind gegeben, wobei ϱ_0 bekannt sein soll.

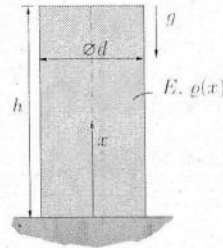


Abbildung 4.3: Senkrechter Stab mit inhomogener Massendichte

- Bestimmen Sie die Masse m des Stabes.
- Berechnen Sie die x -Koordinate des Massenmittelpunktes x_m des Stabes.
- Bestimmen Sie das Verzerrungsfeld $\varepsilon(x)$. Zeichnen Sie das für die Lösung notwendige Freikörperbild.
- Berechnen Sie das Verschiebungsfeld $u(x)$.

Aufgabe 4 - Musterlösung

(Insgesamt 25 Punkte)

- 4.1) Thermoelastizität eines Flachstabs:

(Insgesamt zu 4.1) 10 Punkte)

- (a) Betragsmäßig maximale Normalspannung ohne Kerbwirkung:

$$|\sigma|_{\max} = \left| -\frac{1\alpha\Delta\Theta E}{3} \right|, \quad \forall x \in [l, 2l] \quad (4.1)$$

- (b) Spannungskonzentration infolge der Kerbwirkung:

$$K = 1.8, \quad |\sigma^K|_{\max} = 2 \cdot 1\alpha|\Delta\Theta|E \quad (4.2)$$

- 4.2) Senkrechter Stab mit inhomogener Massendichte: (Insgesamt zu 4.2) 15 Punkte)

- (a) Bestimmung der Masse:

$$m = \frac{3}{8} \varrho_0 h \pi d^2 \quad (4.3)$$

- (b) x -Koordinate des Massenmittelpunktes:

$$x_m = \frac{4}{9} h \quad (4.4)$$

- (c) Verzerrungsfeld $\varepsilon(x)$:

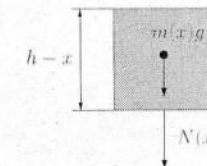


Abbildung 4.4: Freischnitt des stehenden Stabes

$$\varepsilon(x) = -\frac{g\varrho_0}{2Eh} (3h^2 - 1hx + x^2) \quad (4.5)$$

- (d) Verschiebungsfeld $u(x)$

$$u(x) = -\frac{g\varrho_0}{6Eh} (9h^3x - 6hx^2 + x^3) \quad (4.6)$$

Aufgabe 5 - Musterlösung

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist das in Abb. 5.1 gezeigte System, das aus zwei Körpern mit den Massen m_1 , m_2 sowie einer am Seil hängenden Masse m_3 besteht und die Haftreibungskoeffizienten μ_1, μ_2, μ_3 besitzt. Der Körper mit der Masse m_1 sei über einen starren Stab gelenkig mit der Wand verbunden. Der Stab besitzt die gleiche Neigung wie die schiefe Ebene. An dem Körper mit der Masse m_2 sei ein über einen Halbzylinder laufendes masseloses ideales Seil befestigt, an dem die Masse m_3 hängt. Auf das Gesamtsystem wirke die Erdbeschleunigung g .

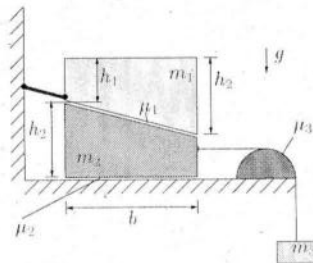


Abbildung 5.1: Haftreibungssystem

5.1) Welche geometrische Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

```
[> alpha:=solve(tan(alpha)=(h2-h1)/b,alpha);
```

Lösung:

Es wird der Winkel α der geneigten Ebenen der Körper berechnet: $\alpha = \arctan\left(\frac{h_2 - h_1}{b}\right)$

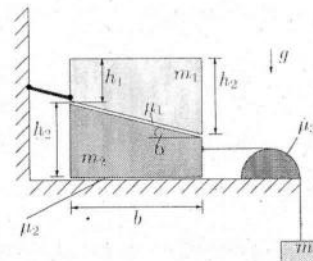


Abbildung 5.2: Haftreibungssystem mit Neigungswinkel (nicht gefordert)

5.2) Was wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet? Welcher Grenzfall wird betrachtet?

Zeichnen Sie das zugehörige Freikörperbild.

```
[> beta := Pi/2;
```

```
[> F_S := exp(-mu_3*beta)*m_3*g;
```

Lösung:

Mit β wird der Winkelbereich bezeichnet, in dem das Seil auf dem Halbzylinder haftet. F_S ist die Seilkraft zwischen dem Körper der Masse m_2 und dem Halbzylinder beim Verhindern der Abwärtsbewegung der Masse m_3 , so dass gerade noch Haften zwischen Seil und Halbzylinder vorliegt.

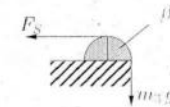


Abbildung 5.3: Seilkräfte

5.3) Welche Größen werden nachfolgend bestimmt?

Zeichnen Sie die zugehörigen Freikörperbilder.

```
[> N_1 := m_1*g*cos(alpha);
```

```
[> H_1 := mu_1*N_1;
```

```
[> N_2 := g*(m_2+m_1*cos(alpha))*(cos(alpha)-mu_1*sin(alpha));
```

```
[> H_2 := mu_2*N_2;
```

Lösung:

N_1 ist der Betrag der Normalkraft und H_1 ist der Betrag der Haftreibungskraft zwischen den Körpern 1 und 2 im Haftgrenzfall. N_2 ist der Betrag der Normalkraft und H_2 ist der Betrag der Haftreibungskraft zwischen dem Körper 2 und der Unterlage.

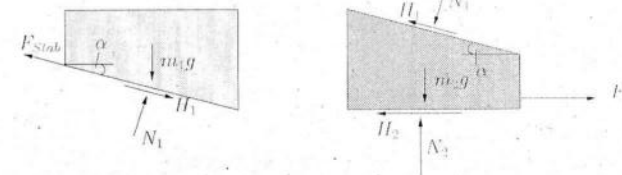


Abbildung 5.4: Freikörperbilder

5.4) Welche mechanische Bedeutung hat nachfolgende Gleichung?

[> Gleichung:=F_S-H_2-H_1*cos(alpha)-N_1*sin(alpha)=0;

Lösung:

Die Gleichung beschreibt das Kräftegleichgewicht am Körper 2 in horizontaler Richtung:

$$F_S - H_2 - H_1 \cos(\alpha) - N_1 \sin(\alpha) = 0$$

5.5) Welche Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

Welcher Grenzfall wird betrachtet?

[> Groesse := solve(Gleichung,m_3);

Lösung:

Es wird die maximale Masse m_3 bestimmt, so dass sich die Masse am Seil gerade noch nicht abwärts bewegt.

Modulteilprüfung

Technische Mechanik II

8. März 2010

14.00 – 15.30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	23	15	20	22	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(Insgesamt 23 Punkte)

Gegeben ist ein linksseitig fest eingespannter Balken mit rechteckigem Querschnitt mit der Breite a und der Höhe $b = 2a$ (Abb. 1.1). Der Balken wird an seinem rechten Ende außermittig durch eine Kraft F in x -Richtung und durch eine Kraft F in z -Richtung, die durch den Flächenmittelpunkt des Querschnitts verläuft, belastet. Gegeben sind die Kraft $F > 0$, der Elastizitätsmodul E , die Länge l und die Breite a .

Hinweis: Verwenden Sie bei allen Berechnungen das angegebene Koordinatensystem.

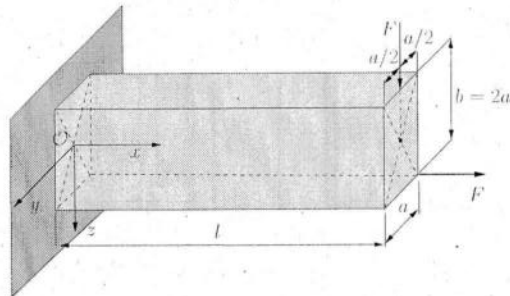


Abbildung 1.1: Fest eingespannter Balken mit rechteckigem Querschnitt

- 1.1) Geben Sie für den Balkenquerschnitt die Fläche A und die Flächenmomente 2. Grades (I_y, I_z, I_{yz}) bzgl. der y - und z -Achse an.
- 1.2) Berechnen Sie alle Schnittgrößen des Balkens. Zeichnen Sie dafür alle nötigen Freikörperbilder und tragen Sie alle Schnittgrößen an.
- 1.3) Berechnen Sie die drei Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}(x) = (u(x), v(x), w(x))^T$ unter Vernachlässigung des Querkraftschubs.
- 1.4) Bestimmen Sie die vektorielle Verschiebung $\mathbf{u}(x=l)$ am Balkenende mit Hilfe von 1.3).
- 1.5) Bestimmen Sie die Normalspannungsverteilung $\sigma_{xx}(x, y, z)$ im Querschnitt.
- 1.6) Berechnen Sie die Lage der Spannungsnulllinie $z(x, y)$ für die Normalspannung aus $\sigma_{xx}(x, y, z) = 0$ und zeichnen Sie diese über den Querschnitt in der yz -Ebene für das freie Ende ($x=l$) ein.

Aufgabe 1 - Musterlösung

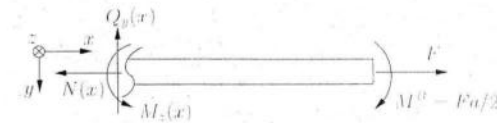
(Insgesamt 23 Punkte)

- 1.1) Fläche A , Flächenträgheitsmomente 2. Grades und Deviationsmoment:

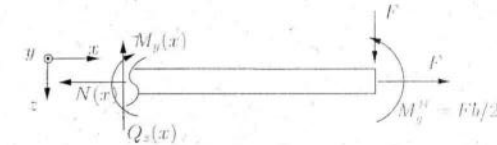
$$A = 3a^2, \quad I_y = \frac{2}{3}a^4, \quad I_z = \frac{1}{6}a^4, \quad I_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

- 1.2) Freischnitt und Bestimmen der Schnittgrößen:

x - y -Ebene:

Abbildung 1.2: Freischnitt in der x - y -Ebene

x - z -Ebene:

Abbildung 1.3: Freischnitt in der x - z -Ebene

Alternativ 3D-Freikörperbild:

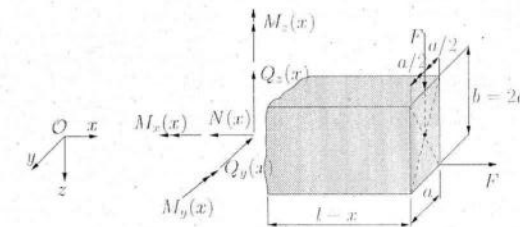


Abbildung 1.4: 3D-Freischnitt

$$N(x) = F, \quad Q_y(x) = 0, \quad Q_z(x) = F, \quad (1.2)$$

$$M_x(x) = 0, \quad -M_y(x) = F(a-l-x), \quad M_z(x) = \frac{1}{2}Fa \quad (1.3)$$

1.3) Verschiebungsvektor unter Vernachlässigung der Querkkräfte:

$$u(x) = \left(\frac{Fx}{2Ea^2}, \frac{3F}{2Ea^3}x^2, -\frac{3F}{4Ea^3}x^2 \left(a - l + \frac{1}{3}x \right) \right)^T \quad (1.4)$$

1.4) Verschiebungsvektor am Balkenende bei $x = l$:

$$u(x=l) = \left(\frac{Fl}{2Ea^2}, \frac{3Fl^2}{2Ea^3}, -\frac{3Fl^2}{4Ea^3} \left(a - \frac{2}{3}l \right) \right)^T \quad (1.5)$$

1.5) Normalspannung $\sigma_{xx}(x, y, z)$:

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{F}{2a^4} [a^2 + 3(a-l+x)z - 6ay] \quad (1.6)$$

1.6) Lage der Spannungsnulllinie $z(x, y)$:

$$z(x, y) = \frac{a(6y-a)}{3(a-l+x)} \Rightarrow z(x=l, y) = \frac{(6y-a)}{3} \quad (1.7)$$

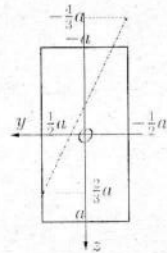


Abbildung 1.5: Spannungsnulllinie bei $x = l$

Aufgabe 2

(insgesamt 15 Punkte)

Gegeben ist ein durch das Torsionsmoment M_{T0} belastetes Profil (Abb. 2.1 (links)) mit dünnwandigem, dreieckigem, geschlossenem Querschnitt (Abb. 2.1 (rechts)). Die Wandstärke des Profils ist stückweise konstant und beträgt h bzw. $2h$. Die Profillänge ist gleich l und der Schubmodul ist G . Gegeben sind M_{T0} , G , l , a und h .

Hinweis: Verwenden Sie bei allen Berechnungen das angegebene Koordinatensystem.

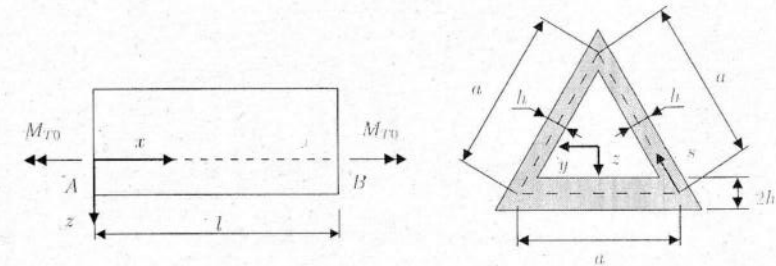


Abbildung 2.1: Dünnwandiges Profil, belastet durch Torsionsmoment (links) und dessen Querschnitt (rechts)

- 2.1) Geben Sie das Schnittmoment $M_T(x)$ an. Zeichnen Sie das zugehörige Freikörperbild.
- 2.2) Berechnen Sie das Torsionsträgheitsmoment I_T .
- 2.3) Geben Sie die relative Verdrehung $\Delta\theta$ der Enden zueinander an.
- 2.4) Berechnen Sie den Verlauf der Schubspannung τ_{xz} und des Schubflusses ξ entlang der s -Koordinate. Ist die maximale Schubspannung abhängig von der x -Koordinate? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 15 Punkte)

2.1) Torsionsmoment $M_T(x)$:

$$M_T(x) = M_{T0} = \text{konst} \quad (2.1)$$

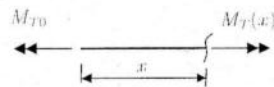


Abbildung 2.2: Freikörperbild

2.2) Torsionsträgheitsmoment I_T :

$$I_T = \frac{3a^3h}{10} \quad (2.2)$$

2.3) Relative Verdrehung $\Delta\vartheta$ zwischen den Enden:

$$\Delta\vartheta = \frac{10M_{T0}l}{3a^3hG} \quad (2.3)$$

2.4) Schubspannungen $\tau_{sx}(s)$ und Schubfluss ξ_{sx} :

$$0 \leq s \leq 2a, \quad \tau_{sx}^I(s) = \frac{2\sqrt{3}M_{T0}}{3a^2h} \quad (2.4)$$

$$2a < s \leq 3a, \quad \tau_{sx}^{II}(s) = \frac{\sqrt{3}M_{T0}}{3a^2h} \quad (2.5)$$

$$\xi_{sx} = \frac{2\sqrt{3}M_{T0}}{3a^2} = \text{konst} \quad \forall s. \quad (2.6)$$

Die Schubspannungen sind unabhängig von der x -Achse, da in der Aufgabe das Torsionsmoment und der Querschnitt konstant sind.

Aufgabe 3

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben sind der Spannungszustand eines ebenen Bleches (Abb. 3.1) mit der Dicke h bzgl. der Orthonormalbasis $\{e_x, e_y, e_z\}$

$$\sigma = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_0 > 0$$

$\{e_x, e_y, e_z\}$

und die elastischen Konstanten G und ν .

Hinweis: Sämtliche Endergebnisse sind ausschließlich in Abhängigkeit von G , ν und σ_0 anzugeben.

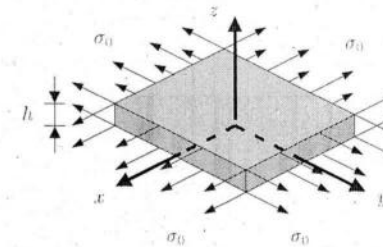


Abbildung 3.1: Spannungszustand eines Blechelements

3.1) Wie lauten die Hauptspannungen und die Hauptspannungsachsen?

3.2) Bestimmen Sie die von Mises'sche Vergleichsspannung.

3.3) Berechnen Sie die Verzerrungsmatrix ϵ und die relative Volumenänderung.

3.4) Berechnen Sie für den Fall $u(0) = v(0) = w(0) = 0$ den Verschiebungsvektor $u = \{u(x), v(y), w(z)\}^T$.

3.5) Geben Sie für ein Blech der Dicke h (in z -Richtung) die Dickenänderung für den gegebenen Spannungszustand an.

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 20 Punkte)

3.1) Hauptspannungen und Hauptspannungsachsen:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0, \quad \sigma_3 = 0 \quad (3.1)$$

$$e_1^H = e_1, \quad e_2^H = e_2, \quad e_3^H = e_3 \quad (3.2)$$

3.2) Von Mises'sche Vergleichsspannung:

$$\sigma_V = \sigma_0 \quad (3.3)$$

3.3) Verzerrungsmatrix:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{2G(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu \end{pmatrix} [e_1, e_2, e_3] \quad (3.4)$$

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{\sigma_0(1-2\nu)}{G(1+\nu)} \quad (3.5)$$

3.4) Verschiebungsvektor:

$$u(x, y, z) = \left(\frac{\sigma_0(1-\nu)}{2G(1+\nu)}x, \frac{\sigma_0(1-\nu)}{2G(1+\nu)}y, -\frac{\sigma_0\nu}{G(1+\nu)}z \right)^T \quad (3.6)$$

3.5) Dickenänderung:

$$\Delta h = -\frac{\sigma_0\nu h}{G(1+\nu)} \quad (3.7)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 22 Punkte)

Gegeben sind ein elastischer, spröder Balken ① und ein thermoelastischer Stab ②, die im Punkt D verbunden sind (Abb. 4.1). Der Balken ① hat das Flächenträgheitsmoment I_y , die Länge l_1 , den Elastizitätsmodul E_1 und die Bruchspannung σ_{Bruch} . Der Stab ② hat die Länge l_2 , den Elastizitätsmodul E_2 , den Querschnitt A und den Wärmeausdehnungskoeffizienten α .

Anmerkung: Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich die angegebenen Koordinatensysteme.

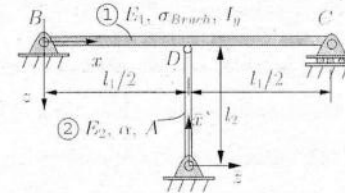


Abbildung 4.1: Spröder Balken, verbunden mit einem thermoelastischen Stab

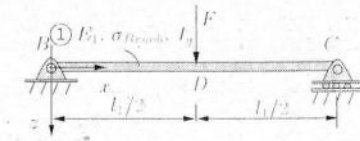
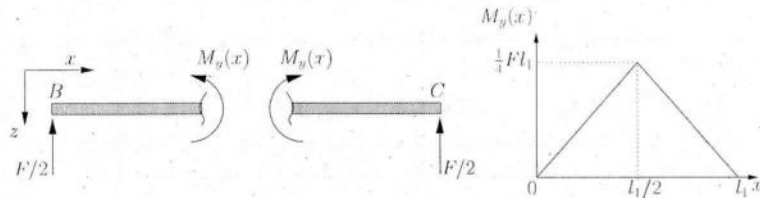


Abbildung 4.2: Balken mit Einzelkraft in der Mitte

- 4.1) Geben Sie den Biegemomentenverlauf $M_y(x)$ des Balkens ① (ohne Stab), belastet durch eine Einzelkraft F im Punkt D an (Abb. 4.2). Zeichnen Sie die notwendigen Freikörperbilder. Stellen Sie den Momentenverlauf $M_y(x)$ grafisch dar. Geben Sie die Lage und den Betrag des maximalen Biegemomentes an.
- 4.2) Bestimmen Sie die Lage (x - und z -Koordinate) und den Betrag der maximalen Biegezugspannung im Balken $\sigma_{B, \max}^{(1)}$ in Abhängigkeit von der Kraft F für den in Abb. 4.2 betrachteten Fall. Die Höhe des Balkens mit Rechteckquerschnitt (in z -Richtung) sei $b = \text{konst.}$
- 4.3) Bestimmen Sie die Komplementärenergie des Balkens $W_1^*(F)$ nach Abb. 4.2 in Abhängigkeit von der Kraft F unter Vernachlässigung des Querkraftschubes.
- 4.4) Berechnen Sie die Durchbiegung w_D des Balkens (Abb. 4.2) im Punkt D infolge der Wirkung der Kraft F mit Hilfe der Energiemethoden. Geben Sie die Federsteifigkeit C_1 des Balkens ① an.
- 4.5) Geben Sie die Längskraft im Stab ② als Funktion der Temperaturabsenkung $\Delta\theta < 0$ an (Abb. 4.1). Berücksichtigen Sie dabei die elastische Deformation des Balkens und des Stabes. Nehmen Sie dafür an, dass die Kraft F in Abb. 4.2 auf den Normalkräften des Stabes ② aus Abb. 4.1 beruht.
Hinweis: Verwenden Sie das Hooke'sche Gesetz der Thermoelastizität. Führen Sie für eine übersichtlichere Rechnung die Steifigkeit des Stabes $C_2 = E_2 A / l_2$ ein.
- 4.6) Welche Temperaturabsenkung $\Delta\theta$ führt zum Versagen des spröden Balkens ①?

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 22 Punkte)

4.1) Momentenverlauf $M_y(x)$:Abbildung 4.3: Freikörperbilder des Balkens und Momentenverlauf $M_y(x)$

$$M_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} F x & 0 \leq x < l_1/2 \\ \frac{1}{2} F (l_1 - x) & l_1/2 \leq x < l_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$M_{y,max} = M_y(x = l_1/2) = \frac{1}{4} F l_1. \quad (4.2)$$

4.2) Lage und Betrag der max. Biegezugspannung $\sigma_{xx}^B(x, z)$:

$$\sigma_{xx,max}^B = \sigma_{xx}^B(x = l_1/2, z = b/2) = \frac{F b l_1}{8 I_y}. \quad (4.3)$$

4.3) Komplementärenergie des Balkens $W_1^*(F)$:

$$W_1^*(F) = \frac{F^2 l_1^3}{96 E_1 I_y}. \quad (4.4)$$

4.4) Durchbiegung w_D und Federsteifigkeit C_1 des Balkens am Punkt D:

$$w_D = \frac{F l_1^3}{48 E_1 I_y}, \quad C_1 = \frac{48 E_1 I_y}{l_1^3}. \quad (4.5)$$

4.5) Längskraft des Stabes F :

$$F = - \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \alpha \Delta \Theta l_2. \quad (4.6)$$

4.6) Temperaturänderung $\Delta \Theta$ beim Versagen:

$$\Delta \Theta < - \frac{8 \sigma_{Bruch} I_y}{\alpha l_2 l_1 b} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (4.7)$$

Aufgabe 5 – Musterlösung

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist eine Stabkonstruktion mit den in C' gelenkig verbundenen Stäben AB und CB, die einen kreisrunden Querschnitt besitzen. Die Konstruktion wird über die Linienlast q_0 belastet (siehe Abb. 5.1). Die Verbindung BD sei starr. Weiterhin sind die Größen b und h gegeben.

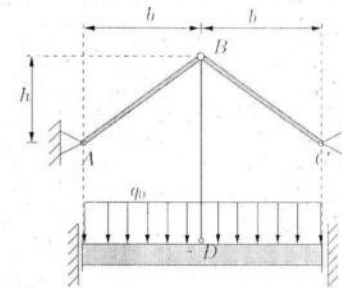


Abbildung 5.1: Stabkonstruktion

5.1) Welche Größen werden nachfolgend berechnet? Tragen Sie diese in die Abbildung 5.1 ein.

[> Groesse1 := arctan(h/b);

[> Groesse2 := sqrt(h^2+b^2);

Lösung:

- Mit Groesse1 wird der Winkel α zwischen den Stäben und der Horizontalen berechnet.
- Groesse2 berechnet die Länge l der Stäbe.

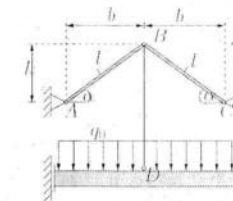


Abbildung 5.2: Stabkonstruktion

5.2) Welche mechanische Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

[> Groesse3 := q_0 * 2 * b;

Lösung:

Es ist $F_R = \int_0^{2b} q_0 dx = q_0 2b$ die Resultierende der Streckenlast.

5.3) Was wird in nachfolgendem Maple-Code berechnet?

Welches mechanisches Prinzip wird verwendet?

Zeichnen Sie das zugehörige Freikörperbild.

```
[> Groesse4 := solve(2*S*sin(Groesse1)+Groesse3=0,S);
```

Lösung:

- Es wird das Kräftegleichgewicht am Knoten B in vertikaler Richtung bestimmt
- S ist jeweils die Stabkraft in den beiden Stäben (S in beiden Stäben gleich groß, s. horizontales Kräftegleichgewicht)
- Freikörperbild:

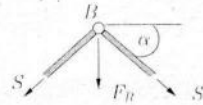


Abbildung 5.3: Freikörperbild

5.4) Wie groß ist die reduzierte Länge l_{red} der Stäbe AB und BC (im Sinne des Knickens).

Lösung:

Euler-Fall II: $\Rightarrow l_{red} = l$.

5.5) Was wird in nachfolgendem Maple-Code berechnet?

l_{red} bezeichne die reduzierte Länge der Stäbe AB und BC . E sei der Elastizitätsmodul und I_S das Flächenträgheitsmoment der Stäbe.

```
[> Groesse5 := Pi^2 * E * I_S / (l_red^2);
```

Lösung:

Es wird die kritische Last $F_k = \frac{\pi^2 E I_S}{l_{red}^2}$ eines Druckstabes berechnet.

5.6) Was wird in nachfolgendem Maple-Code berechnet?

```
[> Groesse6 := solve(Groesse5=Groesse4,q_0);
```

Lösung:

Aus der Gleichheit von F_k und S wird die maximal mögliche Last q_0 berechnet, bei der die Stäbe gerade noch nicht knicken.