

Modulteilprüfung

Technische Mechanik I

07. März 2011

08:30 – 10:00 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	25	15	20	20	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name:

Matrikel-Nr.:

Klausur TM I

Aufgabe 1

(Insgesamt 25 Punkte)

Gegeben ist ein Balken der Länge $2l$, der durch ein Festlager im Punkt A und ein Loslager im Punkt B gelagert ist (siehe Abb. 1.1). Der Balken wird durch eine horizontale Kraft F axial im Punkt B und durch eine stückweise konstante Streckenlast mit dem Betrag q_0 bzw. $2q_0$ vertikal belastet. Gegeben sind $q_0 > 0$, $F > 0$ und l .

Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

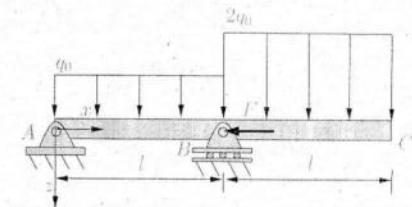


Abbildung 1.1: Balken, belastet durch eine stückweise konstante Streckenlast und eine Axialkraft

- 1.1) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B . Zeichnen Sie das für die Berechnung notwendige Freikörperbild.
- 1.2) Zeichnen Sie die für die Berechnung der Schnittgrößen des Balkens notwendigen Freikörperbilder und berechnen Sie die Normalkraft $N(x)$, die Querkraft $Q(x)$ und das Biegemoment $M(x)$ mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (nicht mit den Schnittgrößendifferentialgleichungen).
- 1.3) Zeichnen Sie den Verlauf der Normalkraft $N(x)$ entlang der x -Achse unter Angabe aller Rand- und Übergangswerte.
- 1.4) Geben Sie explizit die Werte der Querkraft $Q(x)$ bei $x = 0$ und $x = 2l$ an. Wie groß ist die minimale und die maximale Querkraft $Q_{\min}$ und $Q_{\max}$? Zeichnen Sie den Verlauf von $Q(x)$ entlang der x -Achse.
- 1.5) Berechnen Sie die Werte des Biegemoments $M(x)$ bei $x = 0$, $x = l$ und $x = 2l$ und zeichnen Sie den Verlauf von $M(x)$ entlang der x -Achse.

Aufgabe 1 - Musterlösung

(Insgesamt 25 Punkte)

1.1) Berechnung der Auflagerreaktionen:

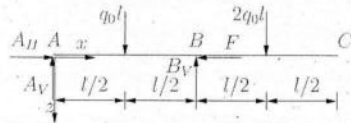


Abbildung 1.2: Freikörperbild für die Berechnung der Reaktionsgrößen

$$A_H = F, \quad A_V = -\frac{q_0 l}{2}, \quad B_V = \frac{7q_0 l}{2}. \quad (1.1)$$

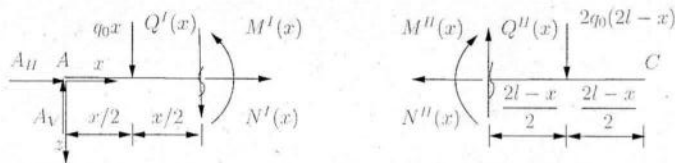
1.2) Berechnung der Schnittgrößen $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$:

Abbildung 1.3: Freikörperbilder für die Berechnung der Schnittgrößen

Die Schnittgrößen lauten für Bereich I ($0 \leq x < l$)

$$N^I(x) = -F, \quad Q^I(x) = -\frac{q_0 l}{2} - q_0 x, \quad M^I(x) = -\frac{q_0 l x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2} \quad (1.2)$$

und für Bereich II ($l \leq x \leq 2l$)

$$N^{II}(x) = 0, \quad Q^{II}(x) = 2q_0(2l-x), \quad M^{II}(x) = -q_0(2l-x)^2. \quad (1.3)$$

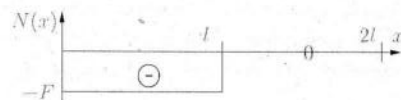
1.3) Verlauf der Normalkraft $N(x)$:

Abbildung 1.4: Verlauf der Normalkraft

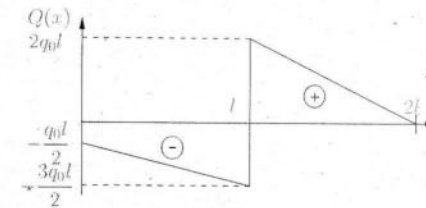
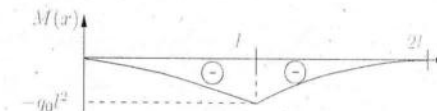
1.4) Verlauf der Querkraft $Q(x)$:

Abbildung 1.5: Verlauf der Querkraft

$$Q^I(0) = -\frac{q_0 l}{2}, \quad Q_{\min} = Q^I(l) = -\frac{3q_0 l}{2}, \quad Q_{\max} = Q^{II}(l) = 2q_0 l, \quad Q^{II}(2l) = 0. \quad (1.4)$$

1.5) Verlauf des Biegemoments $M(x)$:

$$M^I(0) = 0, \quad M^I(l) = M^{II}(l) = -q_0 l^2, \quad M^{II}(2l) = 0. \quad (1.5)$$

Abbildung 1.6: Verlauf des Biegemoments $M(x)$

Aufgabe 2

(Insgesamt 15 Punkte)

Gegeben ist der in Abb. 2.1(a) dargestellte inhomogene Halbzylinder. Die Massendichte ρ ist ausschließlich von der z -Koordinate abhängig (siehe Abb. 2.1(b)). Die Abmessungen und die Geometrie können der Abb. 2.1(a) entnommen werden. Gegeben sind der Radius R , die Höhe H und der Parameter ρ_0 . Verwenden Sie ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

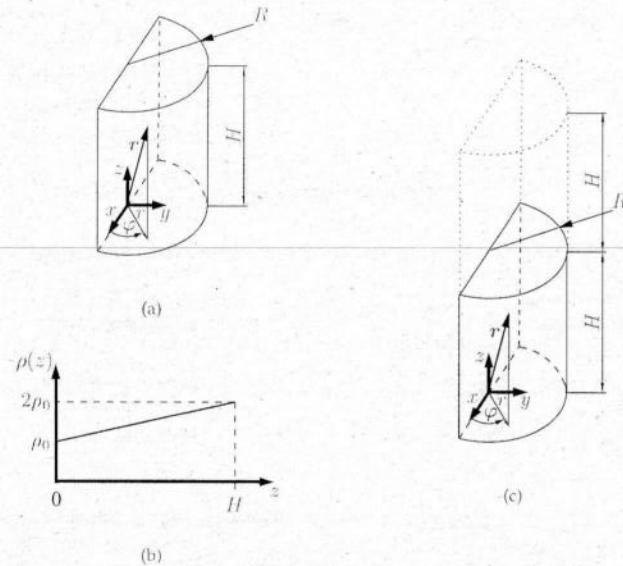


Abbildung 2.1: (a) Halbzylinder, (b) Verlauf der Dichtefunktion $\rho(z)$ und (c) Aufbringen eines zweiten Halbzylinders

- 2.1) Bestimmen Sie die Funktion der Massendichte $\rho(z)$ aus Abb. 2.1(b).
- 2.2) Berechnen Sie die Masse m des Halbzylinders sowie dessen mittlere Dichte $\bar{\rho}$.
- 2.3) Berechnen Sie den Massenmittelpunkt r_m des Halbzylinders durch Integration. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise, falls auf Rechnungen verzichtet werden kann.
- 2.4) Es soll nun ein zweiter Halbzylinder gleicher Abmessungen und homogener Dichte ρ^* bei $z = H$ auf den bereits vorhandenen gesetzt werden (siehe Abb. 2.1(c)). Berechnen Sie die (homogene) Dichte ρ^* so, dass der Massenmittelpunkt des zusammengesetzten Körpers bei $z = \frac{6}{5}H$ liegt.

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 15 Punkte)

- 2.1) Funktion der Massendichte $\rho(z)$:

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{z}{H} + 1 \right) \quad (2.1)$$

- 2.2) Masse m und mittlere Dichte $\bar{\rho}$:

$$m = \frac{3}{4} \rho_0 \pi R^2 H, \quad \bar{\rho} = \frac{m}{V} = \frac{3}{2} \rho_0 \quad (2.2)$$

- 2.3) Berechnung des Massenmittelpunktes:

Bei der Berechnung des Vektors des Massenmittelpunktes $r_m = (x_m, y_m, z_m)^T$ kann ausgenutzt werden, dass die y - z -Ebene eine Symmetrieebene bezüglich der Geometrie und der Massendichte $\rho(z)$ ist. Damit gilt:

$$x_m = 0 \quad (\text{wegen Symmetrie}). \quad (2.3)$$

$$y_m = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}, \quad z_m = \frac{5}{9} H. \quad (2.4)$$

- 2.4) Für die homogenen Massendichte ergibt sich:

$$\rho^* = \frac{29}{9} \rho_0. \quad (2.5)$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben ist der in Abb. 3.1 gezeigte Balken der Länge l . Dieser ist linksseitig im Punkt A durch ein Loslager und rechtsseitig im Punkt B durch ein Festlager befestigt. Der Balken wird im Punkt A durch ein Moment $M = M_0 e_y$ belastet. Im Bereich $x \in [l/2, l]$ greift zusätzlich eine in z -Richtung wirkende Streckenlast $q(x)$ an dem Balken an. Die Streckenlast weist einen linearen Verlauf auf und hat die Werte $q(l/2) = q_0$ und $q(l) = 0$. Gegeben sind $M_0 > 0$, $q_0 > 0$ und l .

Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

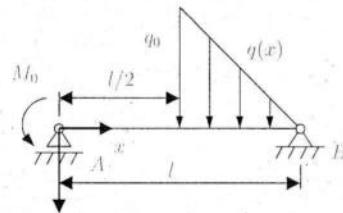


Abbildung 3.1: Ein durch eine Streckenlast und ein Einzelmoment belasteter Balken

- 3.1) Zeichnen Sie das Freikörperbild des Systems und bestimmen Sie die Funktion $q(x)$.
- 3.2) Zeichnen Sie das zur Bestimmung der vertikalen Lagerreaktion in B mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen notwendige verschobene Freikörperbild. Geben Sie die virtuellen Verschiebungen $\delta w(x)$ ($x \in [l/2, l]$), δw_B im Punkt B und die Verdrehung $\delta\varphi$ im Punkt A in Abhängigkeit genau einer virtuellen Verrückung oder Verdrehung an.
- 3.3) Geben Sie für jede äußere Belastung einzeln den Beitrag zur virtuellen Arbeit δA_a des Gesamtsystems an. Berechnen Sie damit δA_a und die vertikale Lagerreaktion im Punkt B .
- 3.4) Für welchen Betrag M_0 des äußeren Moments in A verschwindet die vertikale Lagerreaktion in B ?

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 20 Punkte)

3.1) Freikörperbild

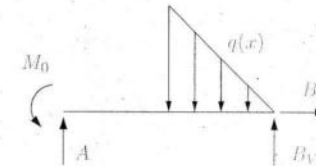


Abbildung 3.2: Freikörperbild

Für die Streckenlast gilt

$$q(x) = 2q_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (3.1)$$

3.2) Verschobenes Freikörperbild

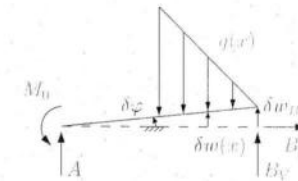


Abbildung 3.3: Virtuell verschobenes Freikörperbild

$$\delta w_B = \delta w_B, \quad \delta w(x) = \delta w_B \frac{x}{l}, \quad \delta\varphi = \frac{\delta w_B}{l}. \quad (3.2)$$

(Alternativ: $\delta w_B = l\delta\varphi$, $\delta w(x) = x\delta\varphi$, $\delta\varphi = \delta\varphi$)

3.3) Beiträge zur virtuellen Arbeit:

$$\delta A_{a,M} = \frac{\delta w_B M_0}{l}, \quad \delta A_{a,q} = \frac{-q_0 l \delta w_B}{6}, \quad (3.3)$$

$$\delta A_a(\delta w_B) = \left(\frac{M_0}{l} - \frac{q_0 l}{6} + B_V \right) \delta w_B. \quad (3.4)$$

Aus der Forderung $\delta A_a = 0$ für beliebige virtuelle Verschiebungen δw_B folgt schließlich

$$B_V = \frac{q_0 l}{6} - \frac{M_0}{l}. \quad (3.5)$$

3.4) Aus

$$B_V = \frac{q_0 l}{6} - \frac{M_0}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_0 = \frac{q_0 l^2}{6}. \quad (3.6)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben ist ein abgesetzter Stab der Gesamtlänge l , der durch sein Eigengewicht belastet wird. Die beiden homogenen Teilstäbe der Länge $l/2$ und der Massendichte ρ besitzen den selben Elastizitätsmodul E und unterschiedliche Querschnittsflächen $A_1 = 2A$ und $A_2 = A$ (Abb. 4.1). Gegeben sind der Elastizitätsmodul E , die Massendichte ρ , die Erdbeschleunigung g , die Fläche A und die Länge l . Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

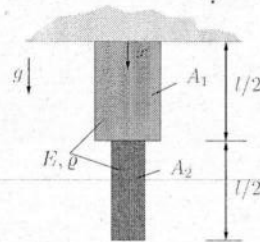


Abbildung 4.1: Abgesetzter Stab unter Eigengewicht

- 4.1) Berechnen Sie den Verlauf der Schnittkraft $N(x)$ und zeichnen Sie die benötigten Freikörperbilder. Stellen Sie den Verlauf $N(x)$ unter Angabe aller Rand- und Übergangswerte grafisch dar.
- 4.2) Ermitteln Sie den Spannungs- und Verzerrungsverlauf $\sigma(x)$ und $\varepsilon(x)$ im abgesetzten Stab.
- 4.3) Bestimmen Sie den Verlauf der Verschiebung $u(x)$. Stellen Sie $u(x)$ unter Angabe aller Rand- und Übergangswerte grafisch dar.
- 4.4) Begründen Sie, warum für die Verzerrung im vorliegenden Fall die Gleichung $\varepsilon = \Delta l/l = u(l)/l$ nicht gilt.
- 4.5) Zusätzlich sei nun gegeben, dass die Teilstäbe mit den Querschnittsflächen A_1 und A_2 die Ausdehnungskoeffizienten $\alpha_1 = \alpha$ und $\alpha_2 = \alpha/2$ besitzen. Wie groß muss die homogene Abkühlung $\Delta\theta < 0$ sein, sodass der Gesamtstab seine Länge unter Wirkung des Eigengewichts und der Temperatur nicht ändert?

Aufgabe 4 - Musterlösung

(Insgesamt 20 Punkte)

4.1) Berechnung der Normalkraft und grafische Darstellung:

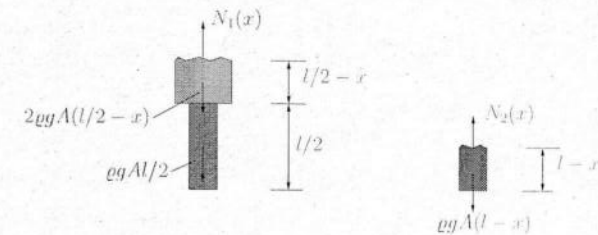
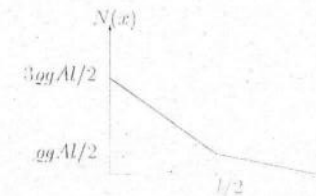


Abbildung 4.2: Freikörperbilder für die Berechnung der Normalkräfte

$$N_1(x) = \frac{3\rho g A l}{2} - 2\rho g A x, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (4.1)$$

$$N_2(x) = \rho g A (l - x), \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l. \quad (4.2)$$

Der Verlauf der Normalkraft entlang der x -Achse ist in Abb. 4.3 dargestelltAbbildung 4.3: Verlauf der Normalkraft $N(x)$

4.2) Berechnung des Spannungs- und Dehnungsverlaufs:

$$\sigma_1(x) = \frac{\rho g}{2} \left(\frac{3l}{2} - 2x \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (4.3)$$

$$\sigma_2(x) = \rho g (l - x), \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_1(x) = \frac{\rho g}{2E} \left(\frac{3l}{2} - 2x \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (4.5)$$

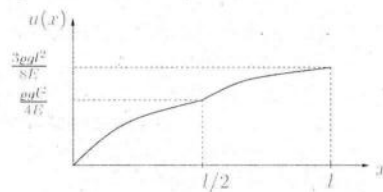
$$\varepsilon_2(x) = \frac{\rho g}{E} (l - x), \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l. \quad (4.6)$$

4.3) Berechnung des Verschiebungsverlaufs:

$$u_1(x) = \frac{\rho g}{2E} \left(\frac{3lx}{2} - x^2 \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (4.7)$$

$$u_2(x) = \frac{\rho g}{E} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{\rho g l^2}{8E}, \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l. \quad (4.8)$$

Der Verlauf der Verschiebung entlang der x -Achse ist in Abb. 4.4 dargestellt.

Abbildung 4.4: Verlauf der Verschiebung $u(x)$ 4.4) Begründung zur Nichtgültigkeit von $\varepsilon = \Delta l / l$:

Da der Verzerrungszustand inhomogen sein muss aufgrund der nichtkonstanten Belastung entlang der x -Achse, kann die genannte Formel, die nur für einen homogenen Verzerrungszustand gültig ist, nicht angewendet werden.

4.5) Berechnung der Abkühlung $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = -\frac{\rho g l}{2\alpha E}. \quad (4.9)$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist ein räumliches Fachwerk (Abb. 5.1) aus masselosen Stäben mit der Querschnittsfläche A_s . Die Stäbe 5, 7 und 8 liegen in der x - z -Ebene und der Stab 9 ist parallel zur y -Achse. Das Fachwerk ist in den Punkten A , B und D gelenkig gelagert und wird im Punkt C durch ein Gewicht der Masse m belastet. Gegeben sind die Länge L , die Querschnittsfläche A_s , die Masse m und die Erdbeschleunigung g .

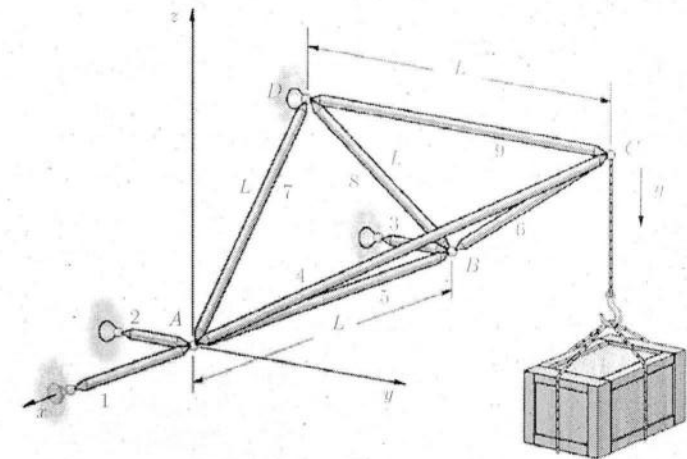


Abbildung 5.1: Räumliches Fachwerk

5.1) Ist die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit des Fachwerks erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

Für ein dreidimensionales Fachwerk muss die notwendige Bedingung $n + a_R = 3k$ im Falle statischer Bestimmtheit erfüllt sein. Mit $n = 6$ Stäben, $a_R = 6$ Auflagerreaktionen und $k = 4$ Knoten folgt

$$6 + 6 = 3 \cdot 4. \quad (5.1)$$

5.2) Welche mechanische Bedeutung haben die im nachfolgenden MAPLE-Code definierten Größen r_C , V_{AC} und AL_D ?

```
> r_A:=vector([0,0,0]): r_B:=vector([-L,0,0]):
> r_C:=vector([-L/2,L,L*sin(Pi/3)]):
> r_D:=vector([-L/2,0,L*sin(Pi/3)]):
> V_AB:=evalm((r_B-r_A)/norm(r_B-r_A,2)):
> V_AD:=evalm((r_D-r_A)/norm(r_D-r_A,2)):
> V_AC:=evalm((r_C-r_A)/norm(r_C-r_A,2)):
> V_BD:=evalm((r_D-r_B)/norm(r_D-r_B,2)):
> V_BC:=evalm((r_C-r_B)/norm(r_C-r_B,2)):
> V_CD:=evalm((r_D-r_C)/norm(r_D-r_C,2)):
> AL_A:=vector([A_x,A_y,0]): AL_B:=vector([0,B_y,0]):
> AL_D:=vector([D_x,D_y,D_z]):
> G:=vector([0,0,-m*g]):
```

Lösung:

- r_C : Ortsvektor vom Punkt C .
- V_{AC} : Richtungsvektor des Stabes AC .
- AL_D : Vektor der unbekannten Auflagerreaktionen im Punkt D .

5.3) Was ist die mechanische Bedeutung der im nachfolgenden MAPLE-Code berechneten Größe abs_d ?

```
> n_abc:=evalm(crossprod(V_AC,V_AB) /
               norm(crossprod(V_AC,V_AB),2)):
> r:=evalm(r_A+lambda*V_AB+mu*V_AC):
> d:=evalm(r_D+alpha*n_abc):
> solve({r[1]=d[1],r[2]=d[2],r[3]=d[3]},
        {lambda,mu,alpha}):assign(%):
> abs_d:=sqrt(d[1]^2+d[2]^2+d[3]^2):
```

$$abs_d := \frac{2}{7} \sqrt{7} L$$

Lösung:

Mit abs_d wird der Abstand von D zur Ebene durch die Punkte A , B , C berechnet.

5.4) Welche Gleichungen werden im nachfolgenden MAPLE-Code aufgestellt? Was ist die mechanische Interpretation der berechneten Größen?

```
> F_AB:=evalm(S_AB*V_AB): F_BA:=evalm(-F_AB):
> F_AD:=evalm(S_AD*V_AD): F_DA:=evalm(-F_AD):
> F_AC:=evalm(S_AC*V_AC): F_CA:=evalm(-F_AC):
> F_BD:=evalm(S_BD*V_BD): F_DB:=evalm(-F_BD):
> F_BC:=evalm(S_BC*V_BC): F_CB:=evalm(-F_BC):
> F_CD:=evalm(S_CD*V_CD): F_DC:=evalm(-F_CD):
> KG_A:=evalm(AL_A+F_AB+F_AC+F_AD):
> KG_B:=evalm(AL_B+F_BA+F_BD+F_BC):
> KG_C:=evalm(G+F_CA+F_CB+F_CD):
> KG_D:=evalm(AL_D+F_DA+F_DB+F_DC):
> Gln:={KG_A[1]=0,KG_A[2]=0,KG_A[3]=0,
        KG_B[1]=0,KG_B[2]=0,KG_B[3]=0,
        KG_C[1]=0,KG_C[2]=0,KG_C[3]=0,
        KG_D[1]=0,KG_D[2]=0,KG_D[3]=0}:
> Unb:={A_x,A_y,B_y,D_x,D_y,D_z,
        S_AB,S_AC,S_AD,S_BC,S_BD,S_CD}:
> ergb:=solve(Gln,Unb): assign(%):
> abs_F_CD:=sqrt(F_CD[1]^2+F_CD[2]^2+F_CD[3]^2):
```

$$abs_F_{CD} := \frac{2}{3} \sqrt{3} m g$$

Lösung:

- Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten A , B , C und D .
- Berechnung der Stabkräfte in den Stäben 4 bis 9 und Auflagerreaktionen in den Punkten A , B und D .
- Betrag der Kraft F_{CD} .

5.5) (Handschriftlich!) Gegeben ist die zulässige Spannung im Stab σ_{zul} . Berechnen Sie die maximale Masse $m^{\max}$, mit der das Fachwerk belastet werden kann, wenn σ_{zul} im Stab 9 nicht überschritten werden soll. Weitere benötigte Informationen können Sie den MAPLE-Code-Auszügen aus 5.2) bis 5.4) entnehmen.

Lösung:

Wenn die zulässige Spannung im Stab CD nicht überschritten werden soll, muss folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$\sigma_{zul} \geq \frac{|F_{CD}|}{A_s} \quad (5.2)$$

Mit $|F_{CD}| = \sqrt{3}2/3mg$ folgt:

$$m^{\max} = \frac{\sqrt{3} \sigma_{zul} A_s}{2g} \quad (5.3)$$