

Modulteilprüfung

Technische Mechanik I

05. März 2012

14:00 – 15:30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	18	15	14	21	8	76
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Klausur TM I

Aufgabe 1

(Insgesamt 18 Punkte)

Gegeben sei der durch eine Streckenlast

$$q(x) = q_0 \left(\frac{2x}{l} - 1 \right)$$

und durch zwei Einzelkräfte $F_1 = q_0 l/3$ und F_2 belastete Balken der Länge l (s. Abb. 1.1). Die Größen l , F_2 und q_0 seien gegeben.

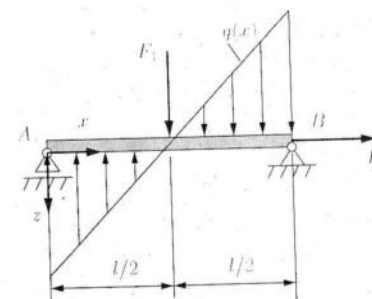


Abbildung 1.1: Balken mit Einzellasten und Streckenlast.

Geben Sie alle Endergebnisse in Abhängigkeit nur dieser Größen und der x -Koordinate an.

- 1.1) Zeigen Sie, dass die Lagerreaktion bei A verschwindet, ohne die Lagerreaktionen in B zu berechnen. Zeichnen Sie eventuell benötigte Freikörperbilder.

Im Folgenden soll für die Lagerreaktion A des Loslagers $A = 0$ gelten.

- 1.2) Berechnen Sie die Querkraft sowie das Schnittmoment als Funktionen von x mit den Gleichgewichtsbedingungen (nicht mit den Schnittgrößendifferentialgleichungen) ohne die Lagerreaktionen in B zu berechnen. Zeichnen Sie alle zugehörigen Freikörperbilder.
- 1.3) Berechnen Sie die resultierende Kraft der Streckenlast. Wie groß ist die Lagerreaktion in z -Richtung in B?

Aufgabe 1 - Musterlösung

(Insgesamt 18 Punkte)

1.1) Berechnung der Lagerreaktionen:

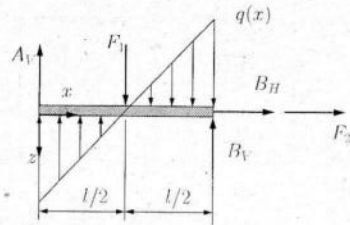


Abbildung 1.2: Freikörperbild für die Berechnung der Reaktionsgröße in A

Die Reaktionsgröße in A wird nach Abb. 1.2 durch das Momentengleichgewicht bzgl. des Punktes B bestimmt.

$$\sum_i M_i^B = F_1 \frac{l}{2} + \int_0^l (l-x)q(x)dx - A_V l = 0$$

$$\Leftrightarrow A_V \stackrel{F_1 = q_0 l / 3}{=} \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 l}{6} = 0.$$

1.2) Berechnung der Schnittgrößen Q und M :

Die Berechnungen der Schnittgrößen für zwei Bereiche.

Bereich I, $0 \leq x < l/2$:

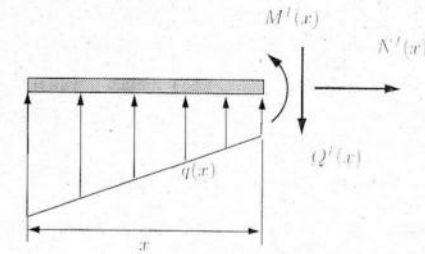


Abbildung 1.3: Freikörperbild für den Bereich I

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= Q^I(x) - \int_0^x q(\zeta) d\zeta = 0 \\ \Leftrightarrow Q^I(x) &= q_0 \left(x - \frac{x^2}{l} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_i^{SI} &= M^I(x) + \int_0^x (x-\zeta)q(\zeta) d\zeta = 0 \\ \Leftrightarrow M^I(x) &= q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} \right). \end{aligned}$$

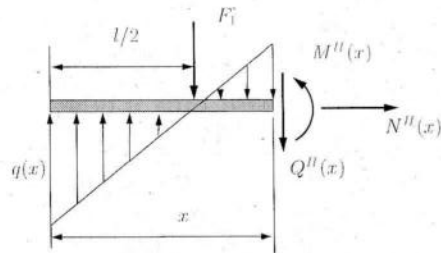


Abbildung 1.4: Freikörperbild für den Bereich II

Bereich II, $l/2 \leq x \leq l$:

$$\sum F_{iz} = 0 \Rightarrow Q^II(x) = - \int_0^x q(\zeta) d\zeta - F_I = q_0 \left(x - \frac{x^2}{l} \right) - \frac{q_0 l}{3}$$

$$\begin{aligned} \sum M_i^{SU} = 0 \Rightarrow M^II(x) &= - \int_0^x (x - \zeta) q(\zeta) d\zeta - F_I (x - l/2) \\ &= q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} \right) - \frac{q_0 l}{3} x + \frac{q_0 l^2}{6} \end{aligned}$$

1.3) Resultierende Kraft:

$$F_R = \int_0^l q(x) dx = 0.$$

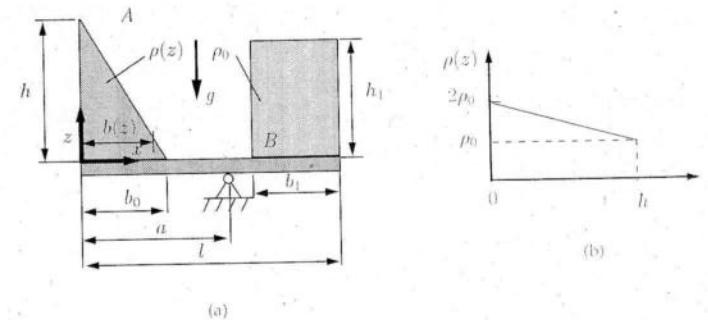
$$\Rightarrow \sum F_{iz} = F_I - B_V = 0 \Leftrightarrow B_V = \frac{q_0 l}{3}.$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 15 Punkte)

Die in Abb. 2.1(a) gezeigte Wippe ist durch die Gewichtskräfte der zwei Körper A und B belastet. Die Massendichte des prismenförmigen Körpers A ist inhomogen und entspricht der in Abb. 2.1 (b) gezeigten Funktion $\rho(z)$. Der quaderförmige Körper B hat eine homogene Massendichte ρ_0 .

Die Wippe ist in einem Abstand a von der linken Kante gelagert. Die Breite des Körpers A ist gegeben durch $b(z) = b_0(1 - z/h)$. Die Tiefe aller Körper ist l . Alle geometrischen Angaben (h, b_0, b_1, a, l, h_1) aus Abb. 2.1 sowie ρ_0 und l seien gegeben.

Abbildung 2.1: (a) Durch zwei Körper belastete Wippe; (b) Verlauf der Massendichte $\rho(z)$ des Körpers A.

Verwenden Sie ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

- 2.1) Bestimmen Sie die Funktion der Massendichte $\rho(z)$.
- 2.2) Berechnen Sie die Masse des Körpers A durch Integration und die Masse des Körpers B ohne Integration.
- 2.3) Berechnen Sie die x -Komponente des Massenmittelpunkts des Körpers A durch Integration. Geben Sie ebenfalls die x -Komponente des Massenmittelpunkts des Körpers B an.
- 2.4) Bestimmen Sie den Abstand a des Lagers von der linken Kante so, dass sich das System im Gleichgewicht befindet. Gehen Sie dabei davon aus, dass gilt: $b_1 = b_0$, $h_1 = h/4$.

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 15 Punkte)

2.1) Funktion der Massendichte $\rho(z)$:Die Funktion zeigt eine lineare Abhängigkeit von der z -Koordinate:

$$\rho(z) = mz + c, \quad \rho(0) = 2\rho_0, \quad \rho(h) = \rho_0 \quad (2.1)$$

Aus der Berechnung von m und c

$$\rho(0) = c = 2\rho_0 \Rightarrow c = 2\rho_0, \quad \rho(h) = mh + \underbrace{2\rho_0}_{c} = \rho_0 \Rightarrow m = -\frac{\rho_0}{h} \quad (2.2)$$

folgt für die Funktion der Massendichte

$$\rho(z) = \rho_0 \left(2 - \frac{z}{h} \right) \quad (2.3)$$

2.2) Masse der Körper A und B :Die Masse des Körpers A wird durch Integration der Massendichte $\rho(z)$ berechnet:

$$\begin{aligned} m_A &= \int_0^h \rho(z) b(z) t \, dz \\ &= \int_0^h \rho_0 b_0 t \left(2 - \frac{z}{h} \right) \left(1 - \frac{z}{h} \right) dz \\ &= \rho_0 b_0 t \int_0^h \left(2 - 3\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) dz \\ &= \rho_0 b_0 t \left[2z - \frac{3z^2}{2h} + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h \\ &= \rho_0 b_0 h t \left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{6} t \rho_0 b_0 h. \\ m_B &= V_B \rho_0 = h_1 b_1 t \rho_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3) Berechnung der Massenmittelpunkte der Körper A und B :Für den Körper A :

$$\begin{aligned} x_m^A &= \frac{1}{m_A} \int_0^h \int_0^{b(z)} \rho(z) x t \, dx \, dz \\ &= \frac{1}{m_A} \int_0^h \frac{1}{2} \rho(z) (b(z))^2 t \, dz \\ &= \frac{t}{2m_A} \int_0^h \rho_0 \left(2 - \frac{z}{h} \right) \left(b_0 \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right)^2 dz \\ &= \frac{\rho_0 b_0^2 t}{2m_A} \int_0^h \left(2 - \frac{z}{h} \right) \left(1 - 2\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) dz \\ &= \frac{\rho_0 b_0^2 t}{2m_A} \left[2z - \frac{5z^2}{2h} + \frac{4z^3}{3h^2} - \frac{z^4}{4h^3} \right]_0^h \\ &= \frac{\rho_0 b_0^2 t h}{2m_A} \left(2 - \frac{5}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) = b_0 \frac{7}{24} t. \end{aligned}$$

Für den Körper B :

$$x_m^B = t - \frac{1}{2} b_1.$$

2.4) Abstand des Lagers:

Berechnung der Gesamtmasse:

$$\begin{aligned} m_G &= \frac{5}{6} t b_0 \rho_0 h + \frac{1}{4} h b_0 t \rho_0 + \frac{1}{4} h b_0 t \rho_0 \\ &= \frac{13}{12} t b_0 \rho_0 h. \end{aligned}$$

Der Abstand a lautet:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{m_G} \sum_{i=1}^2 m_i x_{im} \\ &= \frac{1}{m_G} \left(\frac{5}{6} t b_0 \rho_0 h \frac{7}{24} b_0 + \frac{1}{4} h b_0 t \rho_0 \left(t - \frac{1}{2} b_0 \right) \right) \\ &= \frac{12 t b_0 \rho_0 h}{13 t b_0 \rho_0 h} \left(\frac{7}{24} b_0 + \frac{1}{4} t - \frac{1}{8} b_0 \right) \\ &= \frac{12}{13} \left(\frac{5}{12} b_0 + \frac{1}{2} t \right) = \frac{5}{13} b_0 + \frac{6}{13} t. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 14 Punkte)

Gegeben sind zwei miteinander gelenkig verbundene, starre Stäbe (Abb. 3.1). Am oberen Ende des vertikalen Stabs greifen die horizontal wirkende Kraft F_0 und das Moment M_0 an. Gegeben seien l_1, l_2, l_3, F_0 und M_0 .

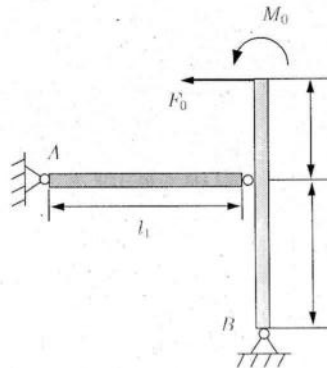


Abbildung 3.1: Gelenkig miteinander verbundene Stäbe.

Verwenden Sie für die Lösung der folgenden Teilaufgaben ausschließlich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV).

Zeichnen Sie die für die Lösung der jeweiligen Teilaufgabe notwendigen virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen und berechnen Sie

- 3.1) die horizontale Auflagerreaktion A_H in Punkt A.
- 3.2) die vertikale Auflagerreaktion A_V in Punkt A.
- 3.3) die horizontale Auflagerreaktion B_H in Punkt B.
- 3.4) die vertikale Auflagerreaktion B_V in Punkt B.

Aufgabe 3 - Lösung

(Insgesamt 14 Punkte)

3.1) Berechnung der horizontalen Auflagerreaktion A_H :

Für die Berechnung von A_H wird die gesuchte Lagerreaktion als eingeprägte Kraft eingeführt.

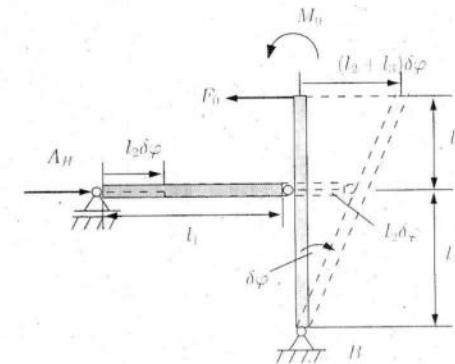


Abbildung 3.2: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von A_H

$$\delta A_H = A_H l_2 \delta \varphi - F_0 (l_2 + l_3) \delta \varphi - M_0 \delta \varphi = 0$$

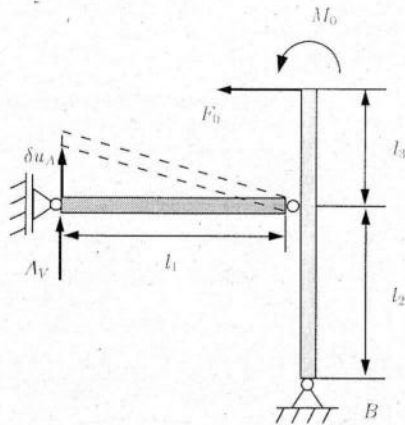
$$\Rightarrow (A_H l_2 - F_0 (l_2 + l_3) - M_0) \delta \varphi = 0$$

$$\Rightarrow A_H l_2 - F_0 (l_2 + l_3) - M_0 = 0,$$

$$\Rightarrow A_H = \frac{F_0 (l_2 + l_3) + M_0}{l_2}$$

3.2) Berechnung der vertikalen Auflagerreaktion A_V :

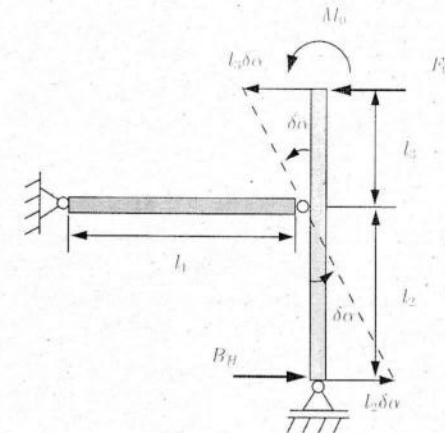
Für die Berechnung von A_V wird die gesuchte Lagerreaktion als eingeprägte Kraft eingeführt.

Abbildung 3.3: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von A_V

$$\begin{aligned}\delta A_u = 0 &= A_V \delta u_A \\ \Rightarrow A_V &= 0.\end{aligned}$$

3.3) Berechnung der horizontalen Auflagerreaktion B_H :

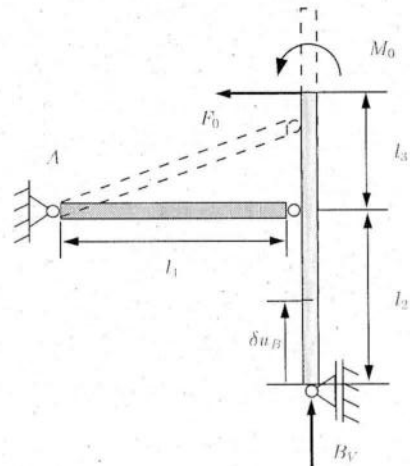
Für die Berechnung von B_H wird die gesuchte Lagerreaktion als eingeprägte Kraft eingeführt.

Abbildung 3.4: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von B_H

$$\begin{aligned}\delta A_u = 0 &= F_0 l_3 \delta \alpha + M_0 \delta \alpha + B_H l_2 \delta \alpha \\ \Rightarrow B_H &= -\frac{F_0 l_3 + M_0}{l_2}\end{aligned}$$

3.4) Berechnung der vertikalen Auflagerreaktion B_V :

Für die Berechnung von B_V wird die gesuchte Lagerreaktion als eingeprägte Kraft eingeführt.

Abbildung 3.5: Virt. Verschiebungen und Verdrehungen für die Berechnung von B_V

$$\begin{aligned}\delta A_a &= 0 = B_V \delta u_B \\ \Rightarrow B_V &= 0.\end{aligned}$$

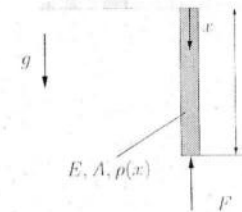
Aufgabe 4

(Insgesamt 21 Punkte)

Gegeben sei der in Abb. 4.1 dargestellte durch sein Eigengewicht und die Kraft F belastete, elastische Stab der Länge l . Dieser besitzt eine inhomogene Massendichteverteilung

$$\rho(x) = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right).$$

Gegeben seien die Größen F , l , der konstante Elastizitätsmodul E , die konstante Querschnittsfläche A , die Größe ρ_0 und die Erdbeschleunigung g .

Abbildung 4.1: Durch sein Eigengewicht und die Kraft F belasteter, elastischer Stab.

- 4.1) Schneiden Sie den Stab frei und bestimmen Sie die Streckenlast $u(x)$ in Stabrichtung. Ermitteln Sie die Normalkraft $N(x)$ mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen sowie die Auflagerkraft in x -Richtung. Zeichnen Sie alle benötigten Freikörperbilder.
- 4.2) Stellen Sie die Verschiebungsdifferentialgleichung 2. Ordnung und die zur Lösung benötigten Randbedingungen auf.
- 4.3) Lösen Sie das formulierte Randwertproblem durch Integration und geben Sie die Verschiebung $u(x)$ an.
- 4.4) Bestimmen Sie über die Verschiebungs-Verzerrungs-Relation die Dehnungen und mit diesen über das Hooke'sche Gesetz die Spannungen im Stab.
- 4.5) Stellen Sie die Verschiebung, Dehnung und Spannung grafisch über x dar. Geben Sie dazu die Randwerte an.
- 4.6) Ermitteln Sie diejenige Kraft F , für die die Verschiebung $u(x=l)$ am Stabende bei $x=l$ verschwindet.

Aufgabe 4 - Musterlösung

(Insgesamt 21 Punkte)

- 4.1) Bestimmung der Streckenlast $n(x)$, der Lagerreaktion A_V und der Normalkraft $N(x)$:

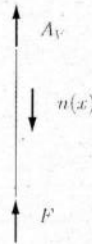


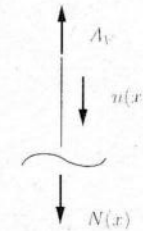
Abbildung 4.2: Freikörperbilder für die Berechnung der Lagerkraft

Normallast:

$$n(x) = \rho(x)gA \Rightarrow n(x) = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) gA.$$

Lagerkraft:

$$\begin{aligned} \uparrow: 0 &= A_V + F - \int_0^l n(x) dx \\ \Rightarrow A_V &= \int_0^l n(x) dx - F \\ &= \rho_0 g A \left[x + \frac{x^2}{2l} \right]_0^l - F = \frac{3}{2} \rho_0 g A l - F. \end{aligned}$$

Abbildung 4.3: Freikörperbilder für die Berechnung der Normalkraft $N(x)$

Normalkraft:

$$\begin{aligned} \uparrow: 0 &= A_V - N(x) - \int_0^x n(\zeta) d\zeta \\ \Rightarrow N(x) &= \frac{3\rho_0 g A l}{2} - F - \left(x + \frac{x^2}{2l}\right) \rho_0 g A. \end{aligned}$$

- 4.2) Verschiebungsdifferentialgleichung:

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -n(x) \Rightarrow EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\rho_0 g A \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ EA \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=l} &= N(x=l) = -F \end{aligned}$$

- 4.3) Bestimmung der Verschiebungen:

$$\begin{aligned} EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= -\rho_0 g A \left(1 + \frac{x}{l}\right) \\ \frac{du(x)}{dx} &= -\frac{\rho_0 g}{E} \left(x + \frac{x^2}{2l}\right) + c_1 \\ u(x) &= -\frac{\rho_0 g}{E} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6l}\right) + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ EA \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=l} &= -F \\ \Rightarrow EA \left[-\frac{3\rho_0 g l}{2E} + c_1 \right] &= -F \\ \Rightarrow c_1 &= -\frac{F}{EA} + \frac{3\rho_0 g l}{2E}. \end{aligned}$$

Verschiebung $u(x)$:

$$u(x) = -\frac{\rho_0 g}{E} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6l} \right) + \left(\frac{3\rho_0 g l}{2E} - \frac{F}{EA} \right) x.$$

4.4) Verschiebungs-Verzerrungs-Relation:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{\rho_0 g}{E} \left(x + \frac{x^2}{2l} \right) + \frac{3\rho_0 g l}{2E} - \frac{F}{EA}.$$

Hooke'sches Gesetz:

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) = -\rho_0 g \left(x + \frac{x^2}{2l} \right) + \frac{3\rho_0 g l}{2} - \frac{F}{A}.$$

4.5) Verlauf der Verschiebung $u(x)$, der Dehnung $\varepsilon(x)$ und der Spannung $\sigma(x)$:

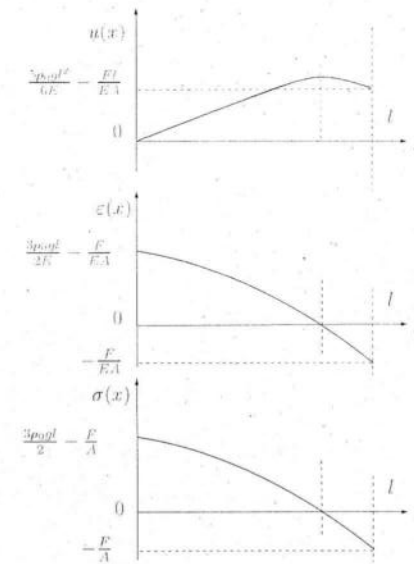


Abbildung 4.4: Grafische Darstellung der Verschiebung $u(x)$, der Dehnung $\varepsilon(x)$ und der Spannung $\sigma(x)$.

4.6) Kraft F :

$$\begin{aligned} u(x=l) &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{2\rho_0 g l^2}{3E} + \frac{3\rho_0 g l^2}{2E} - \frac{F}{EA} l &= 0 \\ \Rightarrow \frac{F}{EA} l &= \frac{5\rho_0 g l^2}{6E} \\ \Rightarrow F &= \frac{5}{6} \rho_0 g l A. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 8 Punkte)

Gegeben sei das in Abb. 5.1 dargestellte System. Das ideale Seil läuft von A über B bis zum Körper K_2 auf der schiefen Ebene und wird durch die vertikale Streckenlast $q(x)$ belastet. Die Rollen bei C und D seien reibungsfrei. Beim zylinderförmigen Körper bei E tritt Seilreibung mit dem Haftreibungskoeffizienten μ_1 auf. Der Körper K_2 der Masse m rutscht auf der schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α gerade noch nicht nach unten, so dass sich das System im Gleichgewicht befindet. Der Haftreibungskoeffizient auf der schiefen Ebene ist durch μ_2 gegeben. Gegeben seien α , β , x_B , h_A , g , μ_1 , μ_2 , m und $q(x)$. Die Streckenlast $q(x)$ sei in MAPLE als Funktion $q(x)$ definiert, die anderen gegebenen Größen seien als Variablen in MAPLE vorgegeben. Beachten Sie, dass die Positionen der Punkte C und D nicht gegeben sind.

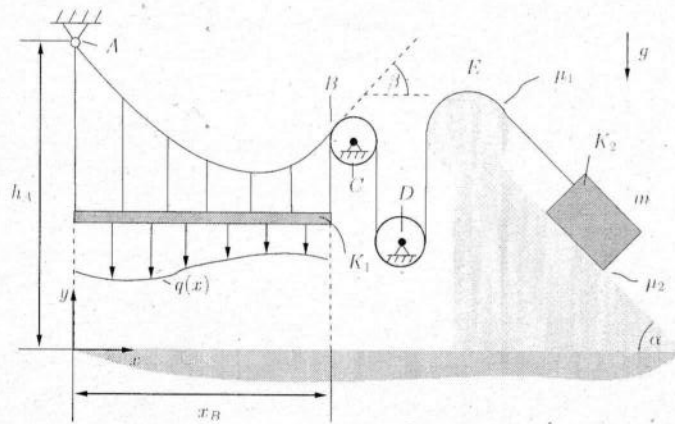


Abbildung 5.1: Ideales Seil mit Belastung

- 5.1) Welche mechanische Interpretation besitzt nachfolgende Gleichung in MAPLE-Code? Achten Sie auf eine präzise Antwort.

```
[> g1 := diff(y(x), x$2) - q(x)/H0 = 0;
```

Lösung:

Die Differentialgleichung beschreibt die Seilkurve bei Belastung durch die vertikale Streckenlast $q(x)$ zwischen den Punkten A und B.

- 5.2) Berechnen Sie die Seilkraft S_B im Punkt B in Abhängigkeit nur der oben genannten, gegebenen Größen unter Berücksichtigung des Kräftegleichgewichts

und ohne Verwendung der Seilkurve.

Lösung:

Im betrachteten Grenzfall des Gleichgewichts des Körpers auf der schiefen Ebene gilt:

$$S_B = mg (\sin(\alpha) - \mu_2 \cos(\alpha)) \exp \left\{ \mu_1 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right\} \quad (5.1)$$

- 5.3) Zur Lösung der in 5.1 angegebenen Gleichung werden weitere Bedingungen benötigt. Geben Sie genau so viele Bedingungen an, damit die Gleichung in 5.1 eindeutig gelöst werden kann, d.h. dass die Lösung nur in Abhängigkeit der oben genannten, gegebenen Größen ausgedrückt werden kann.

Lösung:

Die DGL der Seilkurve ist von zweiter Ordnung; zusätzlich ist H_0 unbekannt. Deshalb werden drei Randbedingungen benötigt.

Die Position des Seils am Punkt A liefert

$$y(x=0) = h_A \quad (5.2)$$

Der Winkel der Seilkurve am Punkt B ist durch β vorgegeben:

$$y'(x=x_B) = \tan(\beta) \quad (5.3)$$

Die in 5.2 berechnete Seilkraft am Punkt B liefert als Randbedingung

$$H_0 \sqrt{1 + y'(x_B)^2} = S_B \quad (5.4)$$

- 5.4) Welche mechanische Interpretation besitzen die im nachfolgenden MAPLE-Code berechneten Größen `groesse1` und `groesse2`? Achten Sie auf eine präzise Antwort.

Nehmen Sie dazu an, dass in den MAPLE-Variablen `bed1` und `bed2` die Bedingungen zur eindeutigen Lösung der Gleichung `g1` (siehe 5.1) in MAPLE gegeben seien.

```
[> y_sol := unapply(rhs(dsolve({g1, bed1}, y(x))), x):
[> dy_sol := unapply(diff(y_sol(x), x), x):
[> H0 := solve(bed2, H0):
[> groesse1 := solve(dy_sol(s)=0, s):
[> groesse2 := y_sol(groesse1):
```

Lösung:

Berechnet werden die x - und y -Komponente des tiefsten Punktes des Seils zwischen A und B .

- 5.5) Nehmen Sie an, dass die Streckenlast $q(x)$ nur aus der Gewichtskraft des am Seil zwischen A und B angebrachten Körpers K_1 resultiert. Der Körper besitzt eine konstante Querschnittsfläche A sowie eine inhomogene Massendichte $\rho(x)$. Leiten Sie die Berechnung von $q(x)$ her, indem Sie die resultierende Kraft auf den Körper K_1 betrachten.

Lösung:

Die resultierende Kraft auf den Körper ist einerseits

$$F_R = \int_{\xi=0}^{\xi_B} q(\xi) \, d\xi \quad (5.5)$$

und andererseits die Gewichtskraft der angehängten Masse. Letztere ist gegeben durch

$$m = \int_V \rho(x) \, dV = A \int_{\xi=0}^{\xi_B} \rho(\xi) \, d\xi, \quad (5.6)$$

mit dem gegebenen konstanten Querschnitt A . Durch Gleichsetzen folgt

$$q(x) = A\rho(x)g \quad (5.7)$$