

# Modulteilprüfung

## Technische Mechanik I

Prüfer: Prof. T. Böhlke, Dr.-Ing. T.-A. Langhoff

13. März 2024

08:00 - 09:30 Uhr

Name: \_\_\_\_\_

Vorname: MUSTERLÖSUNG

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

**Bitte beachten Sie:**

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an. Schreiben Sie die Lösungen aller Aufgaben in die vorgegebenen Kästen. Sollte der Platz nicht ausreichen, verwenden Sie zusätzliche Blätter und vermerken Sie dies deutlich. Nummerieren Sie diese Blätter durch und schreiben Sie auf jedes zusätzliche Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe. Beachten Sie auch die Rückseiten der Aufgabenblätter.

*Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert und nummeriert zusammen und heften Sie diese gesammelt hinter die Aufgabenstellung der Klausur. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.*

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\Sigma$
Mögliche Punkte	15	24	13	15	9	76
Erreichte Punkte						

***Viel Erfolg!***

**Aufgabe 1 – Lösung**

(Insgesamt 15 Punkte)

Die einzelnen Teilaufgaben sind unabhängig voneinander zu lösen.

1.1) Gegeben ist der folgende Querkraftverlauf  $Q_z(x)$  mit

$$Q_z(x) = -Q_0 \frac{x}{L} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x}{L}}\right), \quad x \in (0, L].$$

Berechnen Sie die zur Querkraft zugehörige Streckenlast  $q(x)$ .

Gegeben sind folgende Größen:  $Q_0$  und  $L$ .

**Lösung:**

Punkte: /3

$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{dQ_z(x)}{dx} \\ &= \frac{Q_0}{L} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x}{L}}\right) + Q_0 \frac{\pi}{4L} \sqrt{\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x}{L}}\right) \end{aligned}$$

1.2) Gegeben ist eine Längsdehnung von  $\varepsilon = 0,1\%$ , welche in einem linear elastischen Material eine Längsspannung von  $\sigma = 2 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^2$  hervorruft. Geben Sie den vorliegenden Elastizitätsmodul  $E$  in der Einheit GPa an.

Gegeben sind folgende Größen:  $\varepsilon$  und  $\sigma$ .

**Lösung:**

Punkte: /2

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 200 \text{ GPa}$$

1.3) Gegeben ist der folgende Verlauf einer Momentendichte  $m_y(x)$  mit

$$m_y(x) = -m_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0, L].$$

Berechnen Sie den resultierenden Momentenverlauf  $M_y(x)$  für die gegebene Randbedingung  $M_y(L) = 3m_0L$ . Die Querkraft  $Q_z(x)$  ist null.

Gegeben sind folgende Größen:  $m_0$  und  $L$ .

**Lösung:**

Punkte: /2

$$M_y(x) = - \int m_y dx = \frac{2m_0L}{5} \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{5}{2}} + c$$
$$c = \frac{13m_0L}{5}$$

1.4) Gegeben sind die drei Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie durch Rechnung ob  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  linear unabhängig sind. Geben Sie an, ob es sich bei  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  um ein Rechts- oder Linkssystem handelt, oder ob dazu keine Aussage getroffen werden kann.

**Lösung:**

Punkte: /3

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

- linear unabhängig, da  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq 0$
- Rechtssystem, da  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] > 0$

- 1.5) Gegeben ist der in Abb. 1.1 dargestellte Balken mit der Einzellast  $F = -F e_z$ , welche an der Stelle  $x = L/2$  angreift.

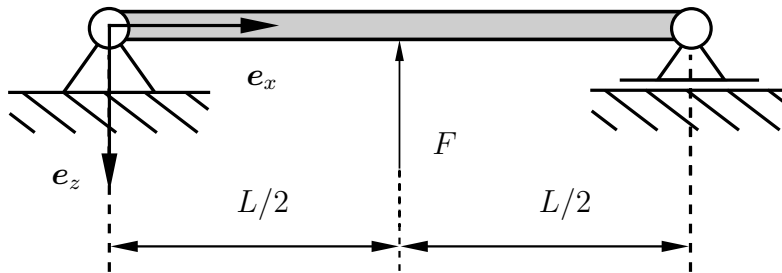


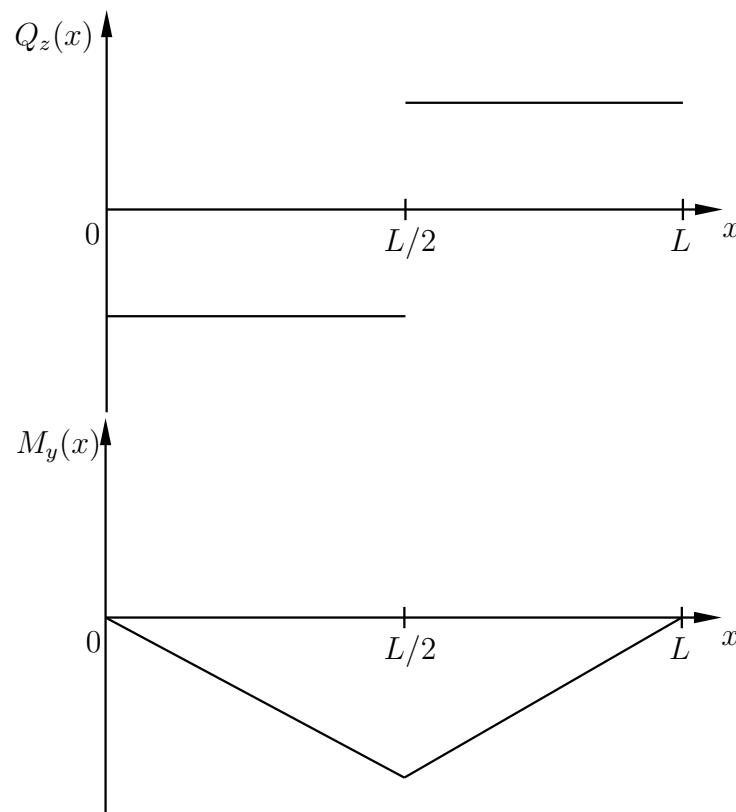
Abbildung 1.1: Statisch bestimmt gelagerter Balken mit Einzellast

Zeichnen Sie qualitativ die Verläufe der Querkraft  $Q_z(x)$  sowie des Biegemomentes  $M_y(x)$ .

Gegeben sind folgende Größen:  $F$  und  $L$ .

**Lösung:**

Punkte: /3



- 1.6) Gegeben ist der folgende Ausdruck für die Gesamtfedersteifigkeit einer Reihenschaltung von Stabfedern

$$C_{\text{ges}} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \quad \text{mit} \quad C_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2}.$$

Für die Eigenschaften der einzelnen Stabfedern gilt  $E_2 = 3E_1 = 3E$ ,  $A_2 = A_1 = A$  und  $L_2 = L_1/4 = L/4$ . Vereinfachen Sie  $C_{\text{ges}}$  als Funktion von  $E$ ,  $A$  und  $L$  so weit wie möglich.

Gegeben sind folgende Größen:  $E$ ,  $A$  und  $L$ .

**Lösung:**

Punkte: /2

$$C_1 = \frac{EA}{L} \quad C_2 = \frac{12EA}{L}$$

$$C_{\text{ges}} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{12 EA}{13 L}$$

## Aufgabe 2 – Lösung

(Insgesamt 24 Punkte)

In Abb. 2.1 ist ein Balken der Länge  $2L$  dargestellt. Dieser ist in zwei Bereiche unterteilt. Für Bereich 1 gilt  $x \in [0, L)$  und für Bereich 2 gilt  $x \in [L, 2L]$ .

Der Balken ist im Punkt  $A$  fest eingespannt. Im Bereich 1 wirken die Streckenlasten  $q(x) = q_0x/L$  und  $n(x) = n_0$ , während im Bereich 2 die Streckenlasten  $q(x) = q_0$  und  $n(x) = n_0$  wirken. Zusätzlich dazu wirkt bei  $x = 2L$  ein Moment mit dem Betrag  $M_0$ . Gegeben sind folgende Größen:  $L$ ,  $q_0$ ,  $n_0$  und  $M_0$ .

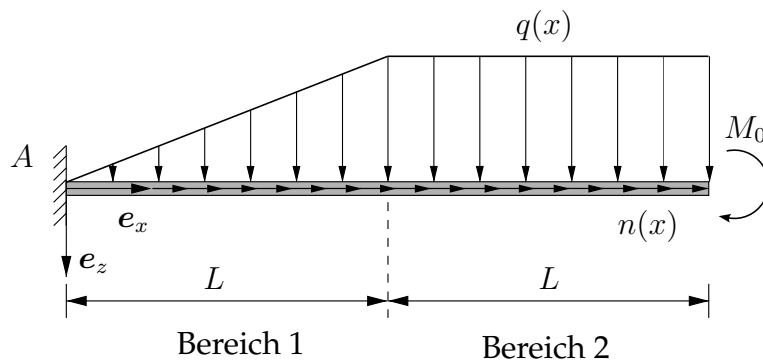


Abbildung 2.1: Statisch bestimmt gelagerter Balken.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

2.1) Die resultierende Kraft der Streckenlasten  $\mathbf{F}_R = F_x \mathbf{e}_x + F_z \mathbf{e}_z$  wirkt am Punkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_R = r_x \mathbf{e}_x + r_z \mathbf{e}_z$ .

Berechnen Sie die Komponenten der Vektoren  $\mathbf{F}_R$  und  $\mathbf{r}_R$  in Abhängigkeit der gegebenen Größen.

**Lösung:**

Punkte: /4

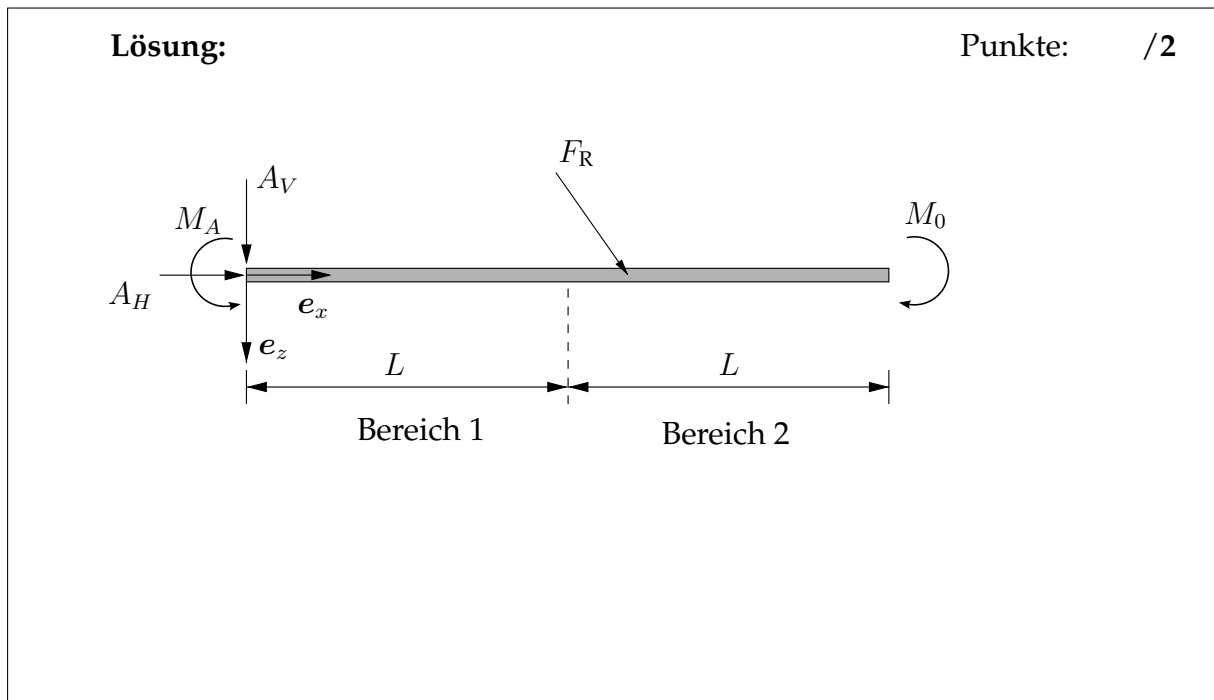
$$F_x = 2n_0L$$

$$F_z = \frac{3}{2}q_0L$$

$$r_x = \frac{11}{9}L$$

$$r_z = 0$$

2.2) Zeichnen Sie das vollständige Freikörperbild des Balkens. Ersetzen Sie dabei die Streckenlasten  $q(x)$  und  $n(x)$  durch deren gemeinsame Resultierende.



2.3) Berechnen Sie die Lagerreaktionen im Punkt A mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen. Verwenden Sie hierzu das Freikörperbild aus Teilaufgabe 2.2) und die resultierende Kraft  $\mathbf{F}_R = F_x \mathbf{e}_x + F_z \mathbf{e}_z$  mit ihrem Angriffspunkt  $\mathbf{r}_R = r_x \mathbf{e}_x + r_z \mathbf{e}_z$ . Setzen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe 2.1) nicht ein.

**Lösung:** Punkte: /3

$$\begin{aligned} \uparrow: 0 &= A_V + F_z & \Rightarrow A_V &= -F_z \\ \rightarrow: 0 &= A_H + F_x & \Rightarrow A_H &= -F_x \\ \hat{A}: 0 &= M_A - F_z r_x - M_0 & \Rightarrow M_A &= M_0 + F_z r_x \end{aligned}$$

2.4) Zeichnen Sie den vollständigen Freischnitt des positiven Schnittufers des Balkens im Bereich  $x \in [0, L)$ .

**Lösung:** Punkte: /2

2.5) Berechnen Sie die Schnittgrößen  $N(x)$ ,  $Q_z(x)$  und  $M_y(x)$  im Bereich  $x \in [0, L)$  mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen. Die Lagerreaktionen in Punkt A seien bekannt. Setzen Sie ihr Ergebnis aus Teilaufgabe 2.3) nicht ein.

**Lösung:** Punkte: /4

$$\rightarrow: 0 = A_H + N(x) + \int_0^x n(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

$$\Rightarrow N(x) = -A_H - \int_0^x n_0 d\tilde{x} = -A_H - n_0 x$$

$$\downarrow: 0 = A_V + Q_z(x) + \int_0^x q_z(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

$$\Rightarrow Q_z(x) = -A_V - \int_0^x q_0 \frac{\tilde{x}}{L} d\tilde{x} = -A_V - q_0 \frac{x^2}{2L}$$

$$\hat{x}: 0 = M_A + A_V x + \int_0^x (x - \tilde{x}) q_z(\tilde{x}) d\tilde{x} + M_y(x)$$

$$\Rightarrow M_y(x) = -M_A - A_V x - \int_0^x \frac{q_0 \tilde{x}}{L} (x - \tilde{x}) d\tilde{x} = -M_A - A_V x - q_0 \frac{x^3}{6L}$$

2.6) Geben Sie die Randbedingungen für die Normalkraft  $N(x)$ , die Querkraft  $Q_z(x)$  und das Schnittmoment  $M_y(x)$  an der Stelle  $x = 2L$  an.

**Lösung:**

Punkte: /3

$$\begin{aligned} N(2L) &= 0 \\ Q_z(2L) &= 0 \\ M_y(2L) &= -M_0 \end{aligned}$$

2.7) Berechnen Sie die Schnittgrößen  $N(x)$ ,  $Q_z(x)$  und  $M_y(x)$  im Bereich  $x \in [L, 2L]$  mithilfe der Schnittgrößendifferentialgleichungen.

**Lösung:**

Punkte: /6

$$\begin{aligned} \frac{dN(x)}{dx} &= -n(x) = -n_0 & \Rightarrow N(x) &= -n_0x + c_1 \\ N(2L) &= 0 & \Rightarrow N(x) &= -n_0x + 2n_0L \\ \frac{dQ_z(x)}{dx} &= -q(x) = -q_0 & \Rightarrow Q(x) &= -q_0x + c_2 \\ Q(2L) &= 0 & \Rightarrow Q(x) &= -q_0x + 2q_0L \\ \frac{dM_y(x)}{dx} &= Q_z(x) & \Rightarrow M_y(x) &= -q_0 \frac{x^2}{2} + 2q_0Lx + c_3 \\ M(2L) &= -M_0 & \Rightarrow M(x) &= -q_0 \frac{x^2}{2} + 2q_0Lx - 2q_0L^2 - M_0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3 – Lösung**

(Insgesamt 13 Punkte)

Gegeben ist der in Abb. 3.1 gezeigte Zylinder mit der Höhe  $H$  und dem Radius  $R$ . Nutzen Sie zur Lösung der Aufgaben Zylinderkoordinaten mit  $r \in [0, R]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  und  $z \in [0, H]$ .

Gegeben sind folgende Größen:  $R$ ,  $H$  und  $\rho_0$ .

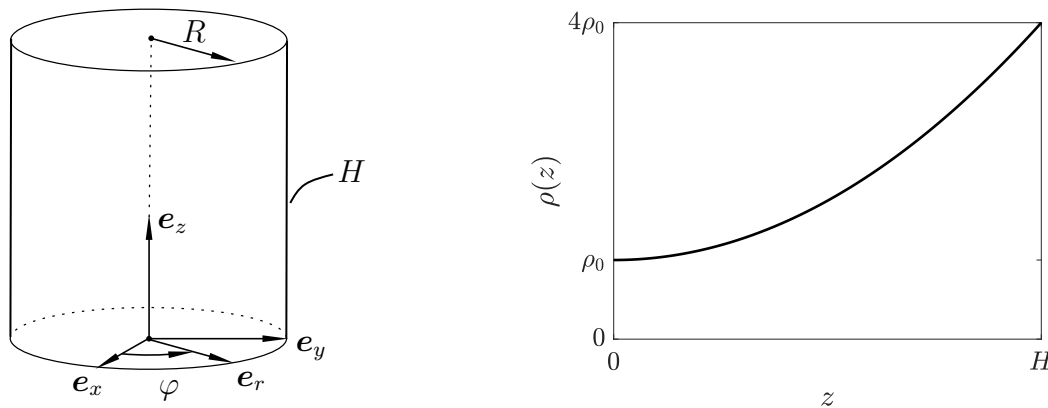


Abbildung 3.1: Zylinder und Funktion der Massendichte  $\rho(z)$  für Aufgabenteil 3.1

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- 3.1) Der Verlauf der Massendichte wird mit der folgenden Polynomfunktion beschrieben:

$$\rho(z) = az^2 + bz + c.$$

Berechnen Sie die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit dem in Abb. 3.1 gegebenen Verlauf, der bei  $z = 0$  einen Scheitelpunkt aufweist.

**Lösung:**

Punkte: /3

$$a = \frac{3\rho_0}{H^2}, \quad b = 0, \quad c = \rho_0$$

- 3.2) Berechnen Sie mittels Integration die Masse  $m$  des Zylinders, dessen Massendichte nun durch folgende Funktion gegeben ist:

$$\rho(z) = 2\rho_0 \exp\left(\frac{5z}{H}\right).$$

**Lösung:**

Punkte: /4

$$\begin{aligned} m &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(z) r dr d\varphi dz \\ &= \frac{2}{5} \rho_0 \pi R^2 H (\exp(5) - 1) \end{aligned}$$

3.3) Geben Sie für den in Teilaufgabe 3.2 gegebenen Verlauf der Massendichte die Koordinaten  $r_m$  und  $\varphi_m$  des Massenmittelpunkts ohne Rechnung an und begründen Sie Ihre Angaben.

**Lösung:**

Punkte: /2

$$r_m = 0 \text{ und } \varphi_m \in \mathbb{R},$$

Begründung: Geometrie und  $\rho(z)$  symmetrisch bzgl.  $z$ -Achse.

- 3.4) Der in Abb. 3.1 gegebene Zylinder hat nun die konstante Massendichte  $\rho_1 = \rho_0$ . Auf diesen Zylinder wird ein zweiter Zylinder gleicher Geometrie mit der konstanten Massendichte  $\rho_2 = 2\rho_0$  gesetzt. Das Koordinatensystem liegt weiterhin im unteren Zylinder wie in Abb. 3.1 gezeigt. Berechnen Sie die Koordinate  $z_m$  des Massenmittelpunkts dieses zusammengesetzten Körpers ohne Integration.

**Lösung:**

Punkte: /4

$$z_m = \frac{m_1}{m} z_{m,1} + \frac{m_2}{m} z_{m,2}$$

$$z_{m,1} = \frac{H}{2}$$

$$z_{m,2} = \frac{3H}{2}$$

$$m_1 = \rho_0 \pi R^2 H$$

$$m_2 = 2\rho_0 \pi R^2 H$$

$$m = 3\rho_0 \pi R^2 H$$

$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{m_2}{m} = \frac{2}{3}$$

$$z_m = \frac{7H}{6}$$

**Aufgabe 4 – Lösung**

(Insgesamt 15 Punkte)

Gegeben ist der in Abb. 4.1 dargestellte Zugstab der Länge  $L$  mit konstantem Elastizitätsmodul  $E$  und konstanter Querschnittsfläche  $A$ . Der Zugstab ist beidseitig fest eingespannt und durch eine Linienkraftdichte  $n(x)$  belastet.

Gegeben sind folgende Größen:  $E$ ,  $A$  und  $L$ .

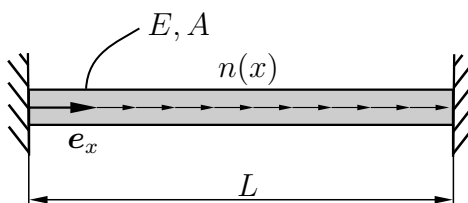


Abbildung 4.1: Beidseitig fest eingespannter Zugstab mit Belastung  $n(x)$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

4.1) Für eine konstante Linienkraftdichte  $n(x) = n_0$  ergibt sich die Verschiebung zu

$$u(x) = \frac{n_0}{2EA} (Lx - x^2).$$

Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Verschiebung den Normalkraftverlauf  $N(x)$ . Berechnen Sie hiermit durch Freischneiden des negativen Schnittufers die Reaktionskraft bei  $x = L$ . Zeichnen Sie das notwendige Freikörperbild vollständig.

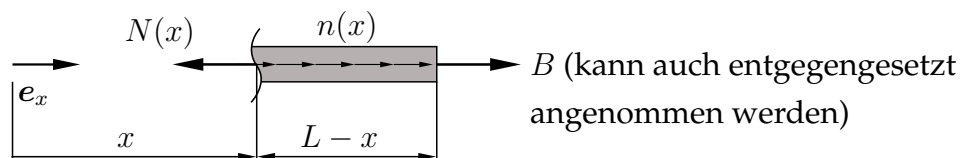
**Lösung:**

Punkte: /4

Normalkraftverlauf:

$$N(x) = EAu'(x) = \frac{n_0}{2} (L - 2x)$$

Freikörperbild (negatives Schnittufer):



Reaktionskraft:

$$\begin{aligned} B &= N(L) \\ &= -\frac{n_0 L}{2} \end{aligned}$$

(bei entgegengesetzter Reaktionskraft:  $B = -N(L) = n_0 L/2$ )

4.2) Geben Sie die zur Lösung der Verschiebungsdifferentialgleichung 2. Ordnung notwendigen zwei geometrischen Randbedingungen an.

**Lösung:**

Punkte: /2

$$u(x=0) = 0 \text{ und } u(x=L) = 0$$

4.3) Nehmen Sie für die Linienkraftdichte  $n(x) = n_0x/L$  an. Berechnen Sie hiermit die Lösung der Verschiebungsdifferentialgleichung 2. Ordnung. Berechnen Sie mit den Randbedingungen aus Aufgabe 4.2) die Integrationskonstanten.

**Lösung:**

Punkte: /4

$$u(x) = -\frac{n_0x^3}{6EAL} + c_1x + c_2$$

Randbedingung:  $u(x=0) = 0$ :

$$u(x=0) = 0 \stackrel{!}{=} c_2$$

Randbedingung:  $u(x=L) = 0$ :

$$u(x=L) = 0 \stackrel{!}{=} -\frac{n_0L^2}{6EA} + c_1L$$
$$\implies c_1 = \frac{n_0L}{6EA}$$

Im Weiteren wird der Zugstab in Abb. 4.2 mit Länge  $L$  betrachtet, der bei  $x = 0$  fest eingespannt ist. Der Stab wird einem inhomogenen Temperaturfeld  $\theta(x)$  ausgesetzt. Der E-Modul  $E$ , die Querschnittsfläche  $A$  und der Temperatureausdehnungskoeffizient  $\alpha$  sind über den gesamten Stab konstant.

Gegeben sind folgende Größen:  $E$ ,  $A$ ,  $L$  und  $\alpha$ .

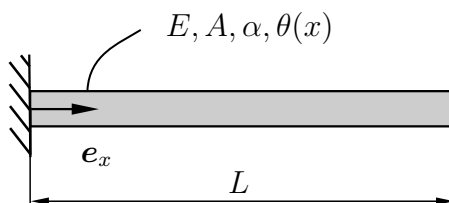


Abbildung 4.2: Einseitig fest eingespannter Zugstab unter thermischer Belastung

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- 4.4) Wie lautet die Verschiebungsdifferentialgleichung 1. Ordnung für dieses System? Gehen Sie von der allgemeinen Verschiebungsdifferentialgleichung 2. Ordnung aus

$$\frac{d}{dx} \left( A(x)E(x) \left( \frac{du}{dx} - \alpha \Delta \theta(x) \right) \right) + n(x) = 0$$

und spezifizieren Sie diese für das gegebene System.

**Lösung:**

Punkte: /1

$$u'(x) - \alpha \Delta \theta(x) = 0$$

- 4.5) Geben Sie die zur Lösung der Verschiebungsdifferentialgleichung 1. Ordnung notwendige Randbedingung an.

**Lösung:**

Punkte: /1

$$u(x=0) = 0$$

- 4.6) Berechnen Sie die Lösung der Verschiebungsdifferentialgleichung 1. Ordnung unter Berücksichtigung des Temperaturfeldes  $\theta(x) = \theta_0(2 + x/L)$  mit Referenztemperatur  $\theta_0$ . Berechnen Sie mit der Randbedingung aus Aufgabe 4.5) die Integrationskonstante.

**Lösung:**

Punkte: /3

$$u(x) = \alpha \theta_0 \left( x + \frac{x^2}{2L} \right)$$

## Aufgabe 5 – Lösung

(Insgesamt 9 Punkte)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben und achten Sie dabei auf eine präzise Beantwortung aller Fragen und Aufgabenstellungen.

- 5.1) Geben Sie an, ob die Eigenschaft der statischen Äquivalenz zweier Kraftsysteme von der Wahl des Bezugspunkts des resultierenden Moments abhängig ist.

**Lösung:**

Punkte: /1

Nein.

- 5.2) Formulieren Sie die Impulsbilanz eines materiellen Körpers in Worten.

**Lösung:**

Punkte: /1

Die zeitliche Impulsänderung eines materiellen Körpers entspricht der Summe aller angreifenden Kräfte.

- 5.3) Formulieren Sie die Definition einer konservativen Kraft in Worten.

**Lösung:**

Punkte: /1

Eine konservative Kraft ist rein ortsabhängig und leitet sich aus einem Potential her.

- 5.4) Geben Sie die Einheit der Federsteifigkeit eines Druckstabs unter Verwendung von kg, m und s an.

**Lösung:**

Punkte: /1

$\text{kg/s}^2$

5.5) Geben Sie ein Beispiel für eine reale Last an, die durch eine Linienkraftdichte modelliert werden kann.

**Lösung:**

Punkte: /1

Eigengewicht eines Seils.

5.6) Ein einfach um einen Pfahl gewickeltes Seil haftet mit der maximalen Reibkraft  $F$ . Der Haftreibungskoeffizient ist  $\mu_0$ . Geben Sie die Reibkraft an, mit welcher dasselbe Seil haftet, wenn man es zweifach um den Pfahl wickelt.

**Lösung:**

Punkte: /1

$$S = e^{\mu_0 2\pi} F$$

5.7) Geben Sie eine Bedingung an, unter welcher der Schwerpunkt und der Massmittelpunkt eines Körpers gleich sind.

**Lösung:**

Punkte: /1

Homogenes Schwerfeld.

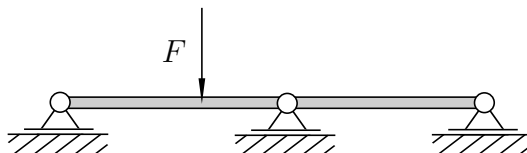
5.8) In einem statisch bestimmten System entsteht durch eine Temperaturänderung Wärmeausdehnung. Geben Sie an, ob dadurch Reaktionskräfte entstehen können.

**Lösung:**

Punkte: /1

Nein.

5.9) Geben Sie an, ob das abgebildete System statisch bestimmt ist.



**Lösung:**

Punkte: /1

Nein.