Aufgabe 1

In dem orthonormalen Bezugssystem $\{\mathcal{O}, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ ist das Kraftsystem $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3\}$ durch die folgenden Kraft- und Ortsvektoren gegeben:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= (0\,\mathrm{N}, 2\,\mathrm{N}, 1\,\mathrm{N})^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{F}_2 &= (-1\,\mathrm{N}, 1\,\mathrm{N}, 2\,\mathrm{N})^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{F}_3 &= (-1\,\mathrm{N}, 0\,\mathrm{N}, 0\,\mathrm{N})^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{r}_1 &= (0\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{r}_2 &= (-1\,\mathrm{m}, -1\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{r}_3 &= (0\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, -1\,\mathrm{m})^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Gegeben ist außerdem der Ortsvektor von Punkt C

$$\boldsymbol{c} = (1\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})^{\mathsf{T}}.$$

1) Bestimmen Sie die resultierende Kraft und das resultierende Moment des Kraftsystems bzgl. C.

2) Überprüfen Sie mit Hilfe des Spatprodukts, ob die Kräfte ein ebenes Kraftsystem bilden.

3) Das System wird durch ein äquivalentes System, bestehend aus einer Kraft, im Punkt $\boldsymbol{r}_1$ ersetzt. Bestimmen Sie die Wirkungslinie der Kraft. Was für ein Versetzungsmoment muss im Sinne einer statischen Äquivalenz hinzugefügt werden?

4) Beweisen Sie, dass die Wirkungslinien der Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ windschief sind.

   Anmerkung: Zwei Geraden heißen windschief, wenn sie sich weder schneiden noch parallel zueinander sind.

Aufgabe 1 – Lösung

1) Resultierende Kraft und resultierendes Moment bzgl. C:

$$\boldsymbol{F}_R = \sum_i^3 \boldsymbol{F}_i = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{M}_C = \sum_i^3 (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{F}_i = \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{Nm} \\ 1\,\mathrm{Nm} \\ -2\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{Nm} \\ 5\,\mathrm{Nm} \\ -4\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{Nm} \\ 2\,\mathrm{Nm} \\ 0\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\,\mathrm{Nm} \\ 8\,\mathrm{Nm} \\ -6\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix}$$

2) Überprüfen, ob das System eben ist:

Das Spatprodukt der drei Vektoren ist verschieden Null, d.h. dass die Kräfte nicht in einer Ebene liegen können und dass das System räumlich ist

$$[\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3] = (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) \cdot \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{N}^2 \\ -1\,\mathrm{N}^2 \\ 2\,\mathrm{N}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1\,\mathrm{N} \\ 0\,\mathrm{N} \\ 0\,\mathrm{N} \end{pmatrix} = -3\,\mathrm{N}^3 \neq 0. \tag{1.2}$$

3) Äquivalentes System im Punkt mit Ortsvektor $\boldsymbol{r}_1$:

Die wirkende Kraft ist gleich der resultierenden Kraft aus 1) und hat den Angriffspunkt $\boldsymbol{r}_1$

$$\boldsymbol{r}_W(\lambda) = \boldsymbol{r}_1 + \lambda \frac{\boldsymbol{F}_R}{|\boldsymbol{F}_R|} = \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{m} \\ -2\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \end{pmatrix} + \frac{\lambda\,\mathrm{m}}{\sqrt{22\,\mathrm{N}^2}} \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Das notwendige Versetzungsmoment stellt die Differenz der Momente des ursprünglichen und des neuen Systems bzgl. eines beliebigen Punkts P dar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_V &= \sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{F}_i - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{p}) \times \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{F}_i = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_2 + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_3\,, \\ \boldsymbol{M}_V &= \begin{pmatrix} -1\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \\ -1\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1\,\mathrm{N} \\ 1\,\mathrm{N} \\ 2\,\mathrm{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{m} \\ 3\,\mathrm{m} \\ -2\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1\,\mathrm{N} \\ 0\,\mathrm{N} \\ 0\,\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{Nm} \\ 5\,\mathrm{Nm} \\ 3\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

4) Beweisen, dass $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ windschief sind:

Die Kräfte sind nicht parallel zueinander ($\angle(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \neq 0,\ \pi$)

$$\cos(\angle(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)) = \frac{\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2}{|\boldsymbol{F}_1|\,|\boldsymbol{F}_2|} = \frac{4\,\mathrm{N}^2}{\sqrt{5\,\mathrm{N}^2}\sqrt{6\,\mathrm{N}^2}} = 0,73 \neq \pm 1 \tag{1.5}$$

und ihre Wirkungslinien ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{W_1}(\alpha) &= \boldsymbol{r}_1 + \alpha \frac{\boldsymbol{F}_1}{|\boldsymbol{F}_1|} = \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{m} \\ -2\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \end{pmatrix} + \frac{\alpha\,\mathrm{m}}{\sqrt{5\,\mathrm{N}^2}} \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{N} \\ 2\,\mathrm{N} \\ 1\,\mathrm{N} \end{pmatrix}, \qquad (1.6) \\ \boldsymbol{r}_{W_2}(\beta) &= \boldsymbol{r}_2 + \beta \frac{\boldsymbol{F}_2}{|\boldsymbol{F}_2|} = \begin{pmatrix} -1\,\mathrm{m} \\ -1\,\mathrm{m} \\ 0\,\mathrm{m} \end{pmatrix} + \frac{\beta\,\mathrm{m}}{\sqrt{6\,\mathrm{N}^2}} \begin{pmatrix} -1\,\mathrm{N} \\ 1\,\mathrm{N} \\ 2\,\mathrm{N} \end{pmatrix} \qquad (1.7) \end{aligned}$$

haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt, da das Gleichungssystem $\boldsymbol{r}_{W_1}(\alpha) = \boldsymbol{r}_{W_2}(\beta)$ keine Lösung besitzt

$$1 = -\frac{\beta}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \beta = -\sqrt{6}\,, \qquad (1.8)$$

$$-1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{5}} = \frac{\beta}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{6}}\right) = 0\,, \qquad (1.9)$$

$$1 + \frac{\alpha}{\sqrt{5}} = \frac{2\beta}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{5}\left(-1 + \frac{2\beta}{\sqrt{6}}\right) = -3\sqrt{5}. \qquad (1.10)$$

Aufgabe 2

Ein Balken mit der Länge l wird durch eine dreiecksförmige Streckenlast wie in Abb. 2.1 dargestellt belastet.

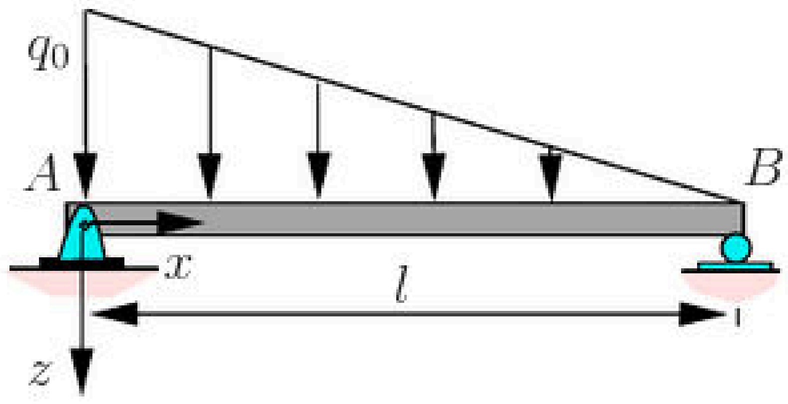

Abbildung 2.1: Balken mit Dreieckslast

1) Geben Sie eine notwendige Bedingung (Formel) für die statische Bestimmtheit des Systems an und überprüfen Sie diese.
2) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B.
3) Bestimmen Sie die Schnittgrößen mit Hilfe der Schnittgrößen-Differentialgleichungen.
4) Zeichnen Sie die Schnittgrößenverläufe und bestimmen Sie den Ort und den Wert des maximalen Schnittmoments und der minimalen Querkraft.

Aufgabe 2 – Lösung

1) Notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit:

$$a_R + v_R = 3n \quad \text{(2D Fall)} \tag{2.1}$$

Anzahl der starren Körper	$n = 1$
Anzahl der Reaktionsgrößen in Auflagern	$a_R = 3$
Anzahl der Reaktionsgrößen in Verbindungselementen	$v_R = 0$
	$a_R + v_R = 3n = 3$

2) Berechnung der Auflagerreaktionen (Abb. 2.2):

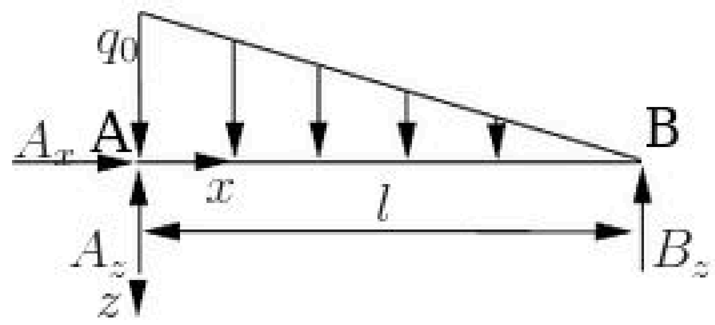

Abbildung 2.2: Balken mit Dreieckslast

Die Streckenlast hat die folgende Funktion

$$q(x) = q_0 \frac{l - x}{l}. \tag{2.2}$$

Damit gilt für die Auflagerreaktionen

$$\sum F_{xi} = A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,, \tag{2.3}$$

$$\sum M_{A,yi} = B_z l - \int_0^l x q(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z = \frac{q_0 l}{6}\,, \tag{2.4}$$

$$\sum M_{B,yi} = -A_z l + \int_0^l (l - x) q(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = \frac{q_0 l}{3}. \tag{2.5}$$

3) Schnittgrößen mit Hilfe der Schnittgrößen-Differentialgleichungen:

Die allgemeinen Lösungen der Schnittgrößen-Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}Q_z(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x) \quad \Rightarrow \quad Q_z(x) = q_0 \frac{(l - x)^2}{2l} + C_1\,, \tag{2.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_y(x)}{\mathrm{d}x} = Q_z(x) \quad \Rightarrow \quad M_y(x) = -q_0 \frac{(l - x)^3}{6l} + C_1 x + C_2 \tag{2.7}$$

sind von zwei Konstanten abhängig, die durch die Randbedingungen für das Schnittmoment berechnet werden

$$M_y(0) = -q_0 \frac{l^2}{6} + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = q_0 \frac{l^2}{6}\,, \tag{2.8}$$

$$M_y(l) = C_1 l + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -q_0 \frac{l}{6}. \tag{2.9}$$

Die Schnittgrößenfunktionen lauten

$$Q_z(x) = q_0\frac{(l-x)^2}{2l} - q_0\frac{l}{6}, \quad M_y(x) = -q_0\frac{(l-x)^3}{6l} - q_0\frac{l}{6}x + q_0\frac{l^2}{6}. \tag{2.10}$$

4) Graphische Darstellung:

– Kurvendiskussion für die Querkraft

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_z(x)}{\mathrm{d}x}\right|_l = -q(l) = 0 \Rightarrow \text{Extremalwert bei } x = l \tag{2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_z^2(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q_0}{l} > 0 \Rightarrow \text{Minimum für } x = l \text{ (konvex)} \tag{2.12}$$

$$Q_z(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{(3-\sqrt{3})l}{3} \in [0;l],\ x_2 = \frac{(3+\sqrt{3})l}{3} \notin [0;l] \tag{2.13}$$

$$Q_{max} = Q_z(0) = q_0\frac{l}{3}, \quad Q_{min} = Q_z(l) = -q_0\frac{l}{6} \tag{2.14}$$

– Kurvendiskussion für das Moment

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_z(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{\frac{l(3-\sqrt{3})}{3}} = -q_0\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \tag{2.15}$$

$$M_{max} = M_y\left(\frac{l(3-\sqrt{3})}{3}\right) = q_0\frac{l^2\sqrt{3}}{27} \tag{2.16}$$

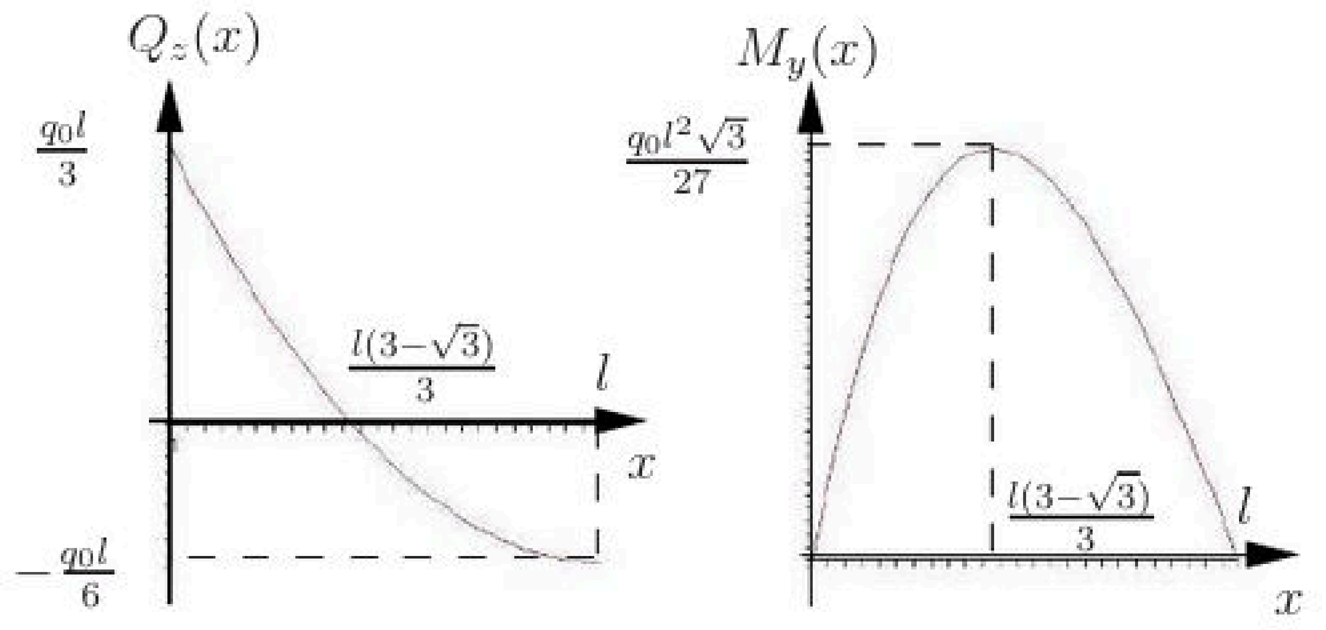

Abbildung 2.3: Querkraft (links), Schnittmoment (rechts)

Aufgabe 3

Ein Waagebalken mit rechteckigem Querschnitt, Dicke d und Länge $l_1 + l_2$ (Abb. 3.1) ist mit einer dreieckigen Öse mit der Dicke d zum Aufhängen von Lasten ausgerüstet. Zum Ausgleichen der Waage dient ein Gewicht mit dem Radius R und der Länge l. Die Dichte des Balkens ist $\rho_1 = \rho$ und des Ausgleichsgewichts $\rho_2 = 2\rho$. Für die geometrischen Abmessungen gilt: $d = a/2$, $l = 3a$, $l_1 = 6a$, $l_2 = 4l_1$, $R = 2a$. Die Masse der Öse kann vernachlässigt werden.

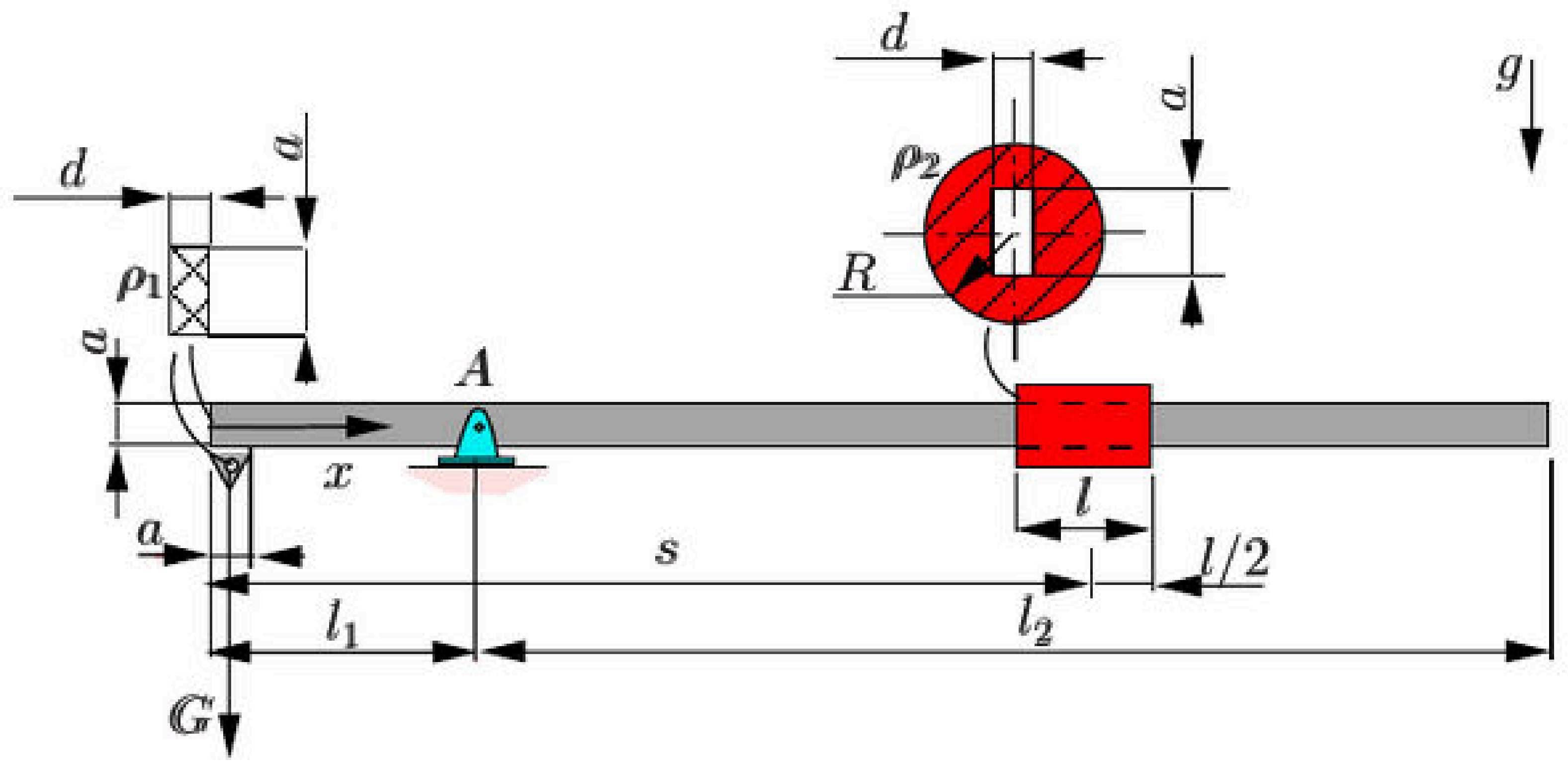

Abbildung 3.1: Waagebalken

1) **Bestimmen Sie die x-Koordinate der Lage des Massenmittelpunkts der ganzen** Waage in Abhängigkeit von der Lage des Massenmittelpunkts des Ausgleichsgewichts s.

2) Berechnen Sie die Lage des Ausgleichgewichts s, so dass die Waage ausgeglichen wird, wenn eine Last mit der Gewichtskraft $G = 150a^3 g\rho$ aufgehängt wird.

Aufgabe 3 – Lösung

1) Berechnung der x- Koordinate des Massenmittelpunkts:

   Zunächst werden die Massen und die x-Lagen der Massenmittelpunkte der einzelnen Komponenten der Waage bestimmt:

   – Massenmittelpunkt und Masse des Balkens

$$m_1 = (l_1 + l_2) a d \rho_1 = 15a^3\rho, \qquad x_{m_1} = \frac{l_1 + l_2}{2} = 15a, \tag{3.1}$$

   – Massenmittelpunkt und Masse des Gewichts

$$m_2 = l\rho_2 \left(\pi R^2 - ad\right) = 3a^3\rho\,(8\pi - 1)\,, \qquad x_{m_2} = s. \tag{3.2}$$

   Damit ergibt sich für die Gesamtmasse

$$m = \sum_{i=1}^{2} m_i = 12a^3\rho\,(1 + 2\pi)\ , \tag{3.3}$$

$$x_m = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{m} x_{mi} = \frac{75a + (8\pi - 1)\,s}{4\,(1 + 2\pi)}. \tag{3.4}$$

2) Berechnung der Lage des Gewichts s:

   Damit die Waage ausgeglichen wird, soll das resultierende Moment bzgl. A verschwinden

$$\underset{A}{\circlearrowleft}: \quad G\left(l_1 - \frac{a}{2}\right) - mg(x_m - l_1) = 0 \Rightarrow s = \frac{16a\,(14 + 3\pi)}{8\pi - 1} \approx 15,5a. \tag{3.5}$$

Aufgabe 4

Der in Abb. 4.1 dargestellte Mechanismus besteht aus einem Winkelhebel und einem exzentrisch gelagerten Rad mit der Gewichtskraft G. Auf das System wirkt ein gegebenes Drehmoment M bzgl. Punkt A, das durch eine Kraft F im Winkelhebel ausgeglichen wird, so dass das System in statischem Gleichgewicht ist. Die Haftgrenzzahl im Punkt B ist μ_0 und die Lagerung in C ist reibungsfrei.

Anmerkung: Verwenden Sie für die Lösung nur das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen*.

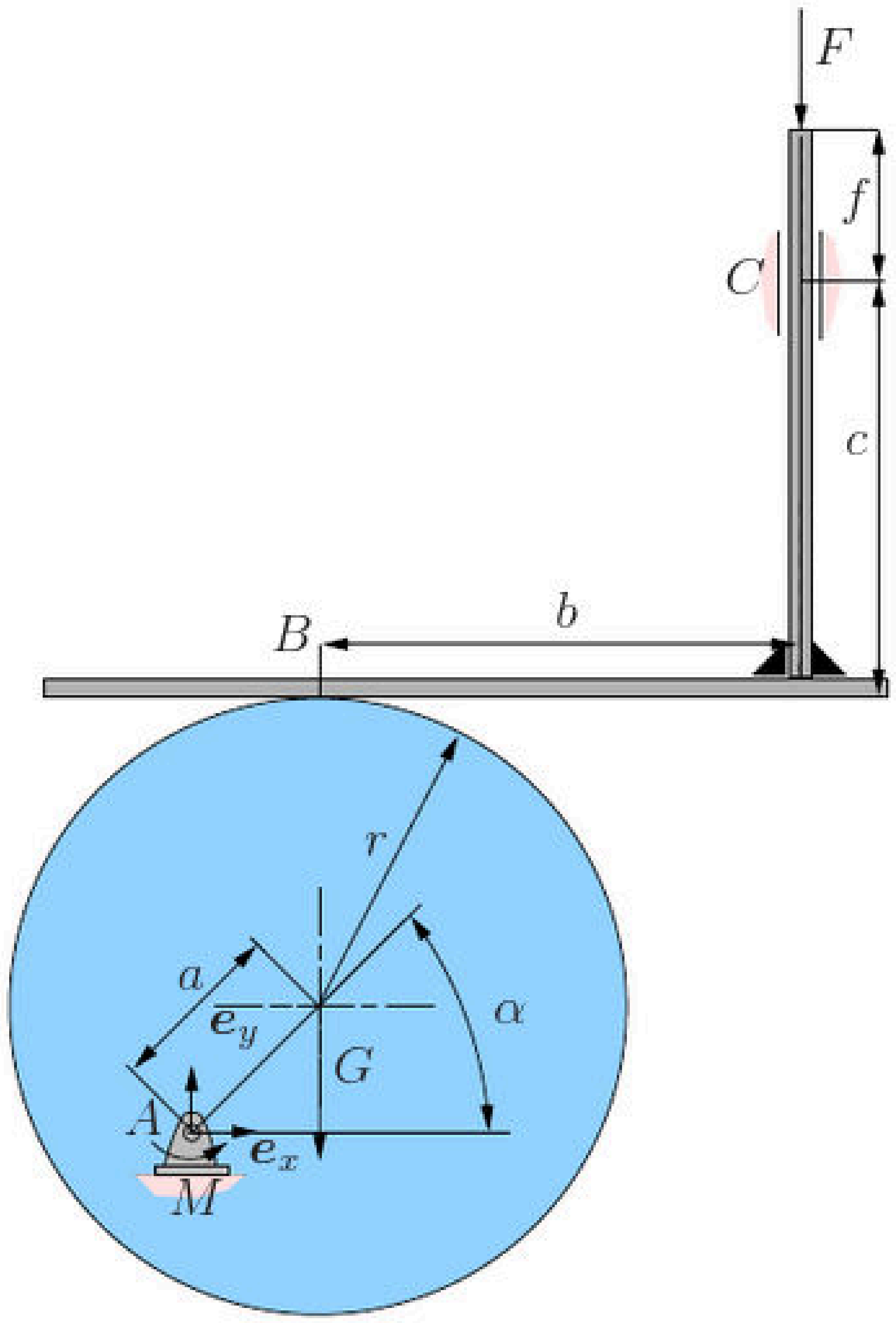

Abbildung 4.1: Exzenter mit Winkelhebel

1) Zeichnen Sie die Freikörperbilder des Exzenters und des Winkelhebels.

2) Bestimmen Sie die Kräfte im Punkt B.

3) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen im Punkt A.

4) Bestimmen Sie die Kraft F.

5) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in C.

   Hinweis: Die Teilaufgaben 2) und 3) lassen sie sich nur unter der Betrachtung des Exzenters bzw. Teilaufgaben 4) und 5) nur unter der Betrachtung des Winkelhebels lösen.

Aufgabe 4 – Lösung

1) Freikörperbilder (Abb. 4.2):

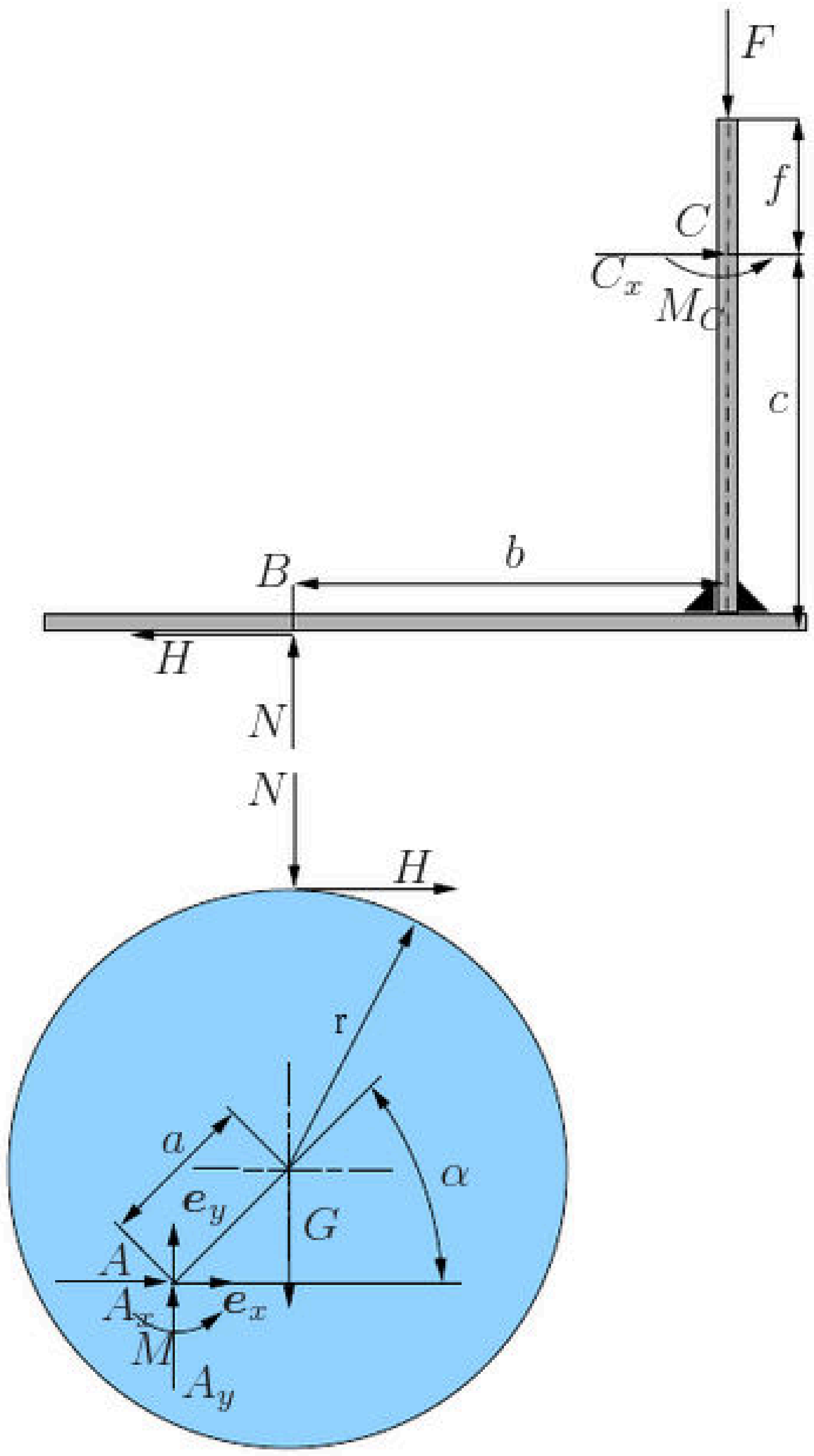

Abbildung 4.2: Freikörperbilder

Für die Berechnung mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen werden die folgenden Vektoren für die wirkenden Momente und Kräfte definiert

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \left(A_x,\, A_y,\, 0 \right)^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{G} = \left(0,\, -G,\, 0 \right)^\mathsf{T}, \\
\boldsymbol{F} &= \left(0,\, -F,\, 0 \right)^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{C} = \left(C_x,\, 0,\, 0 \right)^\mathsf{T}, \\
\boldsymbol{M} &= \left(0,\, 0,\, M \right)^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{M}_C = \left(0,\, 0,\, M_C \right)^\mathsf{T}, \\
\boldsymbol{B}_1 &= \left(H,\, -N,\, 0 \right)^\mathsf{T} \quad \text{für den Exzenter}, \\
\boldsymbol{B}_2 &= \left(-H,\, +N,\, 0 \right)^\mathsf{T} \quad \text{für den Winkelhebel}.
\end{aligned}
$$

2) Kräfte in Punkt B:

In B wirken die Normalkraft N und die Haftkraft H. Für H gilt im Grenzfall

$$H = \mu_0 N. \tag{4.1}$$

Die einzige verträgliche virtuelle Verschiebung des gelagerten Exzenters ist eine virtuelle Verdrehung $\delta\varphi$ bzgl. A (Abb.4.3).

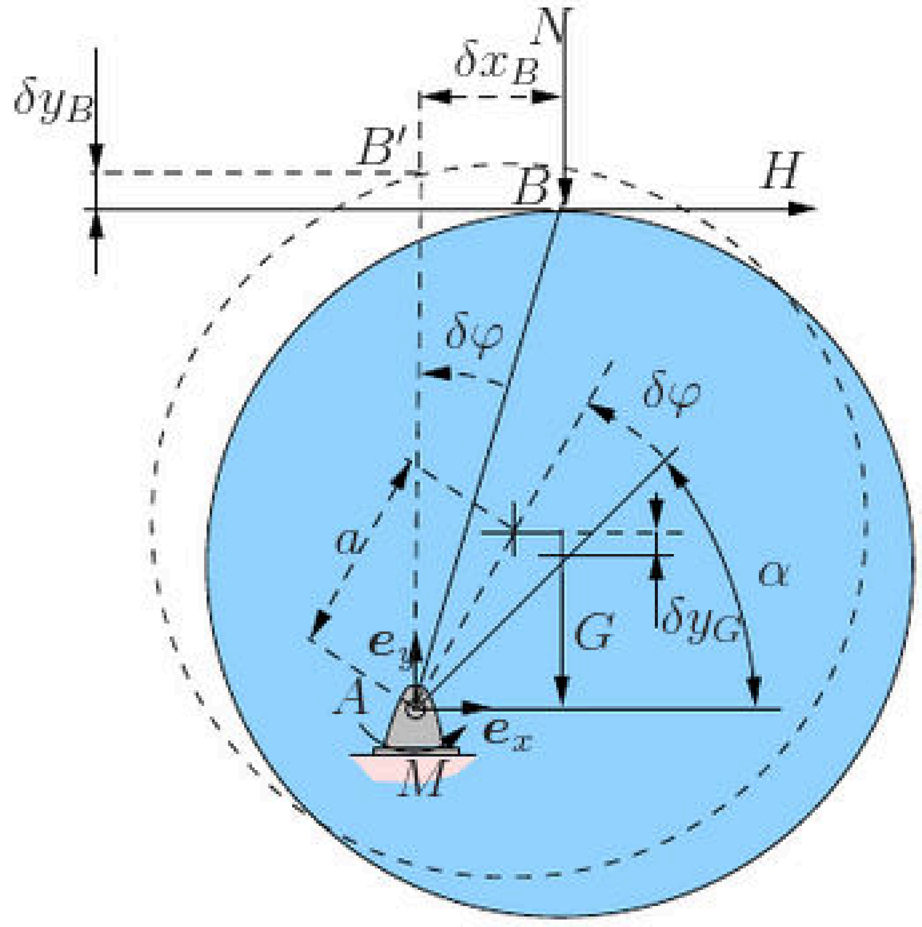

Abbildung 4.3: Berechnung der Normalkraft N mittels PdvV

Die virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen sind

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_A = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \delta\varphi \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \tag{4.2}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_G = \begin{pmatrix} -\delta x_G, & \delta y_G, & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -a\sin\alpha, & a\cos\alpha, & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \delta\varphi\,, \tag{4.3}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_B = \begin{pmatrix} -\delta x_B, & \delta y_B, & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -(r+a\sin\alpha), & a\cos\alpha, & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \delta\varphi. \tag{4.4}$$

Aus dem Ausdruck für die virtuelle Arbeit erhält man die Normalkraft N

$$\delta W = (M - a\cos\alpha G - (r + a\sin\alpha)\,\mu_0 N - a\cos\alpha N)\,\delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \tag{4.5}$$

$$N = \frac{M - a\cos\alpha G}{\mu_0\,(r + a\sin\alpha) + a\cos\alpha}. \tag{4.6}$$

3) Auflagerreaktionen in A:

Für die Bestimmung von A_x wird eine äußere Kraft eingeführt und das Lager durch ein Rollenlager ersetzt (Abb. 4.4)

$$\delta\boldsymbol{r}_A = \delta\boldsymbol{r}_B = \delta\boldsymbol{r}_G = \begin{pmatrix} \delta x_A, & 0, & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \tag{4.7}$$

$$\delta W = A_x \delta x_A + \mu_0 N \delta x_A = 0 \quad \Rightarrow A_x = -\mu_0 N = -\frac{\mu_0\,(M - a\cos\alpha G)}{\mu_0\,(r + a\sin\alpha) + a\cos\alpha}. \tag{4.8}$$

Analog wird A_y bestimmt (vgl. Abb. 4.5)

$$\delta\boldsymbol{r}_A = \delta\boldsymbol{r}_B = \delta\boldsymbol{r}_G = \begin{pmatrix} 0, & \delta y_A, & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \tag{4.9}$$

$$\delta W = A_y \delta y_A - N\delta y_A - G\delta y_A = 0 \Rightarrow A_y = N + G = \frac{M + G\mu_0\,(r + a\sin\alpha)}{\mu_0\,(r + a\sin\alpha) + a\cos\alpha}. \tag{4.10}$$

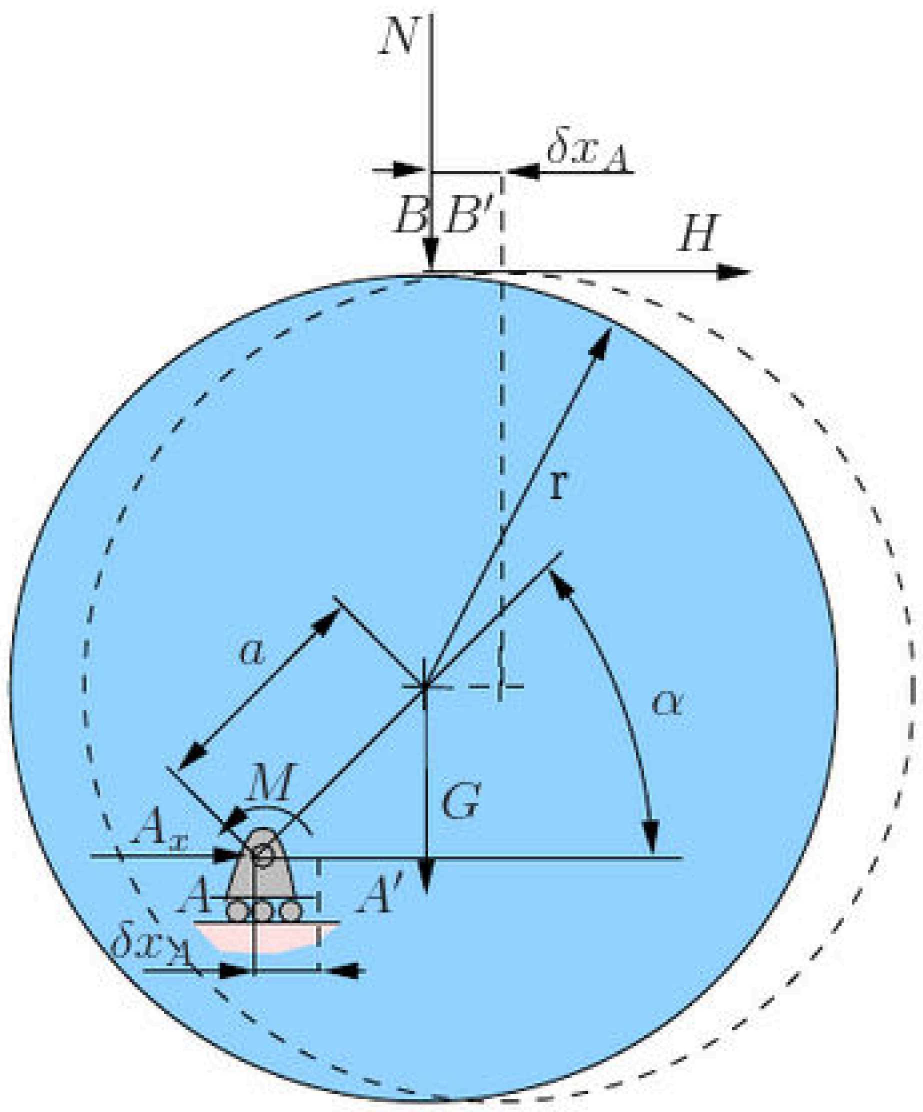

Abbildung 4.4: Berechnung der Lagerreaktion A_x mittels PdvV

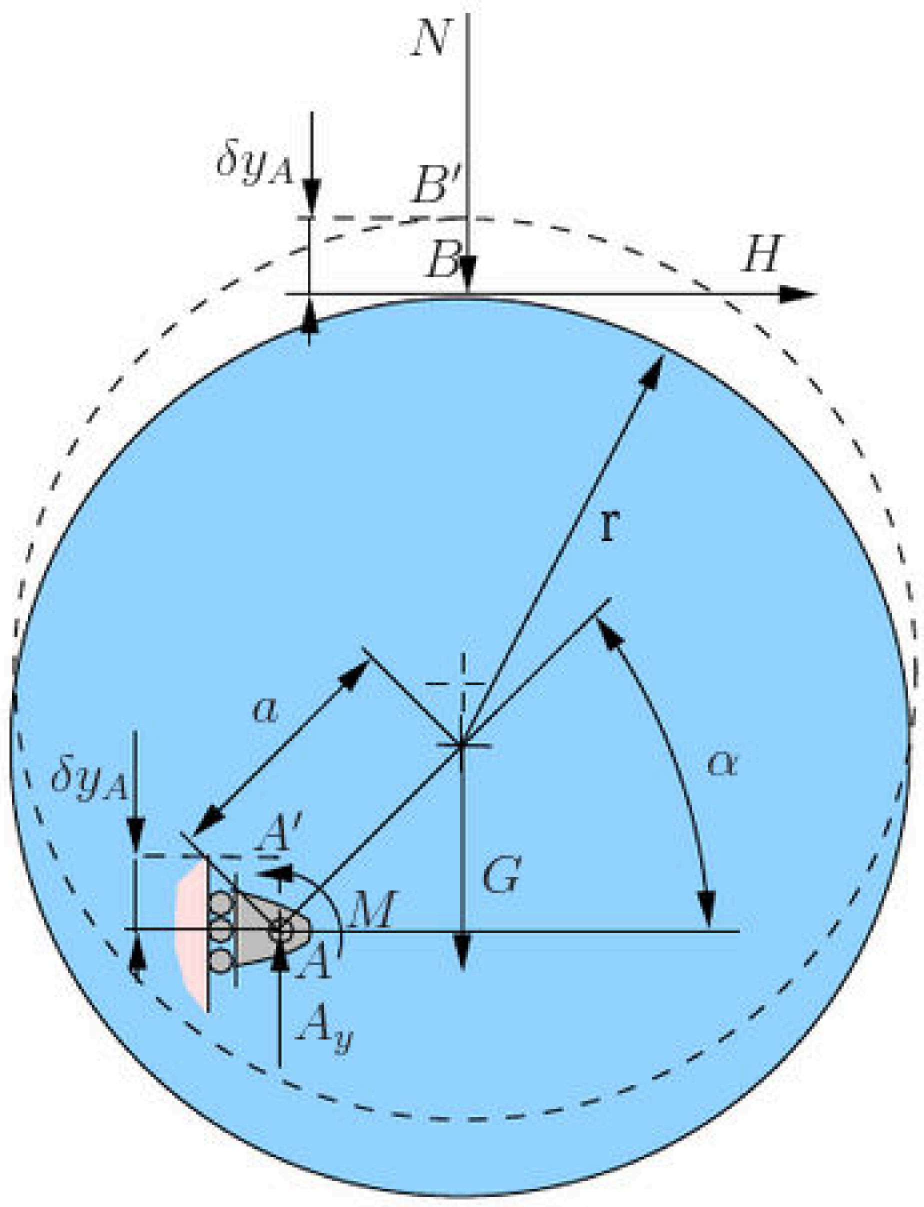

Abbildung 4.5: Berechnung der Lagerreaktion A_y mittels PdvV

4) Berechnung der Kraft F:

Für die Bestimmung von F wird nun der Winkelhebel betrachtet (Abb. 4.6)

$$\delta \boldsymbol{r}_F = \delta \boldsymbol{r}_B = \delta \boldsymbol{r}_C = \left(\; 0, \, -\delta y_F, \, 0 \; \right)^{\mathsf{T}}, \tag{4.11}$$

$$\delta W = F \delta y_F - N \delta y_F = 0 \quad \Rightarrow \; F = N = \frac{M - a\cos\alpha G}{\mu_0\,(r + a\sin\alpha) + a\cos\alpha}. \tag{4.12}$$

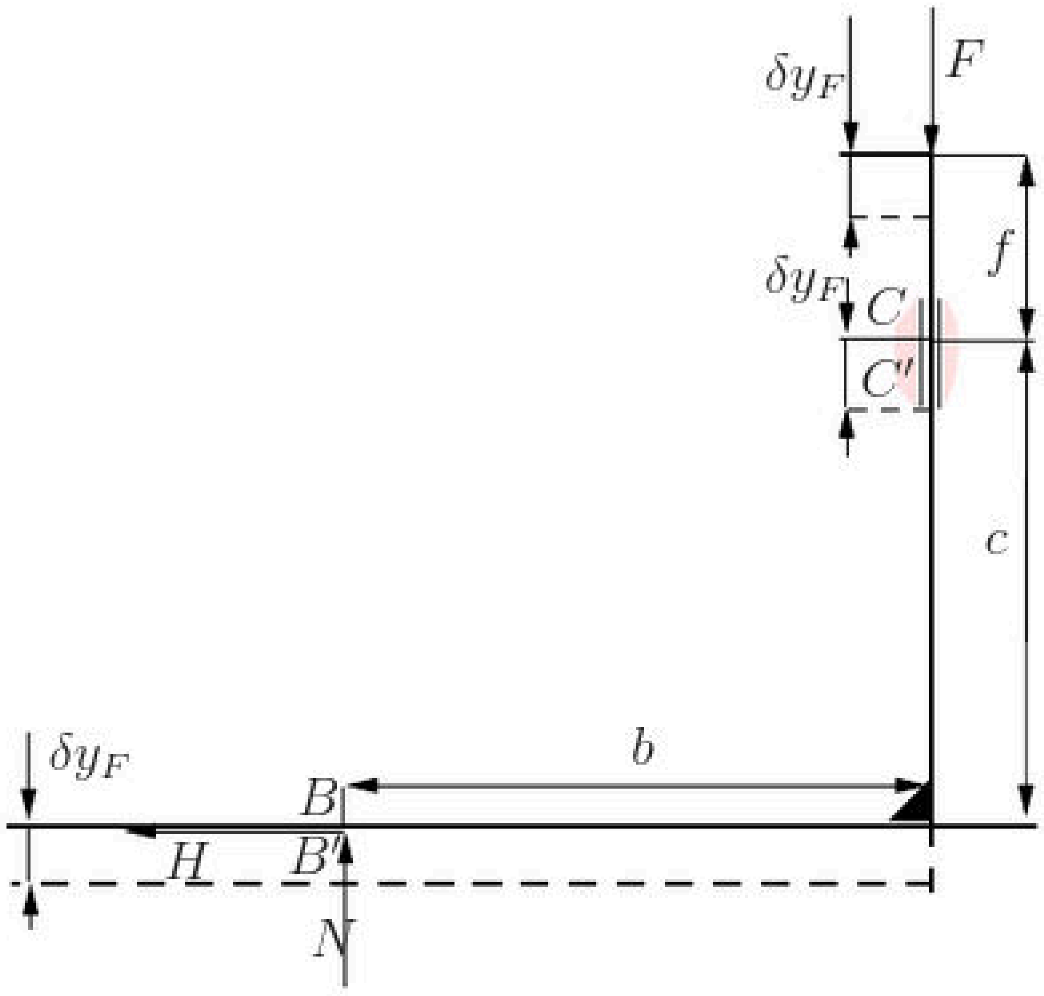

Abbildung 4.6: Berechnung der Kraft F mittels PdvV

5) Auflagerreaktionen in C:

Die horizontale Auflagerreaktion in C wird mit Hilfe einer ausgeprägten Kraft C_x berechnet (Abb. 4.7). Es soll dabei beachtet werden, dass im Punkt C keine virtuellen Verdrehungen zulässig sind

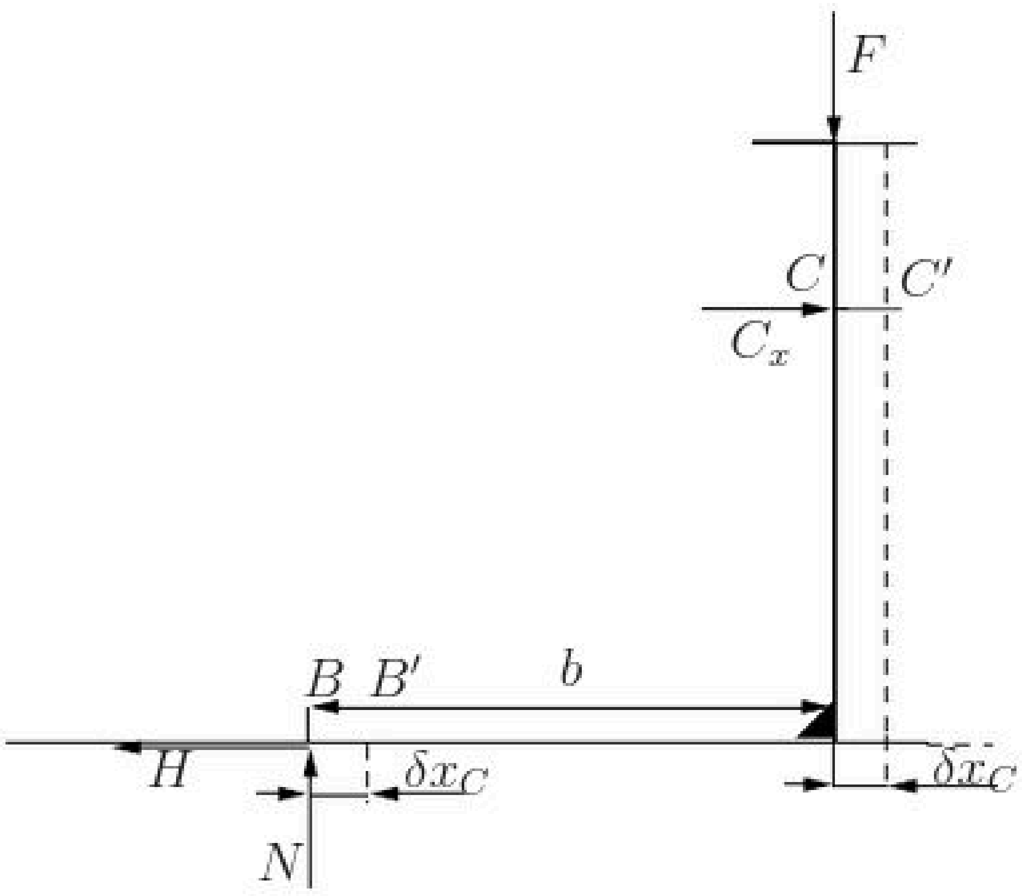

Abbildung 4.7: Berechnung der Lagerreaktion C_x mittels PdvV

$$\delta \boldsymbol{r}_C = \delta \boldsymbol{r}_B = \delta \boldsymbol{r}_F = \begin{pmatrix} \delta x_C, \; 0, \; 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \tag{4.13}$$

$$\delta W = C_x \delta x_C - \mu_0 N \delta x_C = 0 \quad \Rightarrow C_x = \mu_0 N = \frac{\mu_0 \left(M - a\cos\alpha G\right)}{\mu_0 \left(r + a\sin\alpha\right) + a\cos\alpha}. \tag{4.14}$$

Die Berechnung des Moments im Lager C erfolgt durch die Berücksichtigung einer virtuellen Verdrehung $\delta\varphi$ bzgl. C (Abb. 4.8)

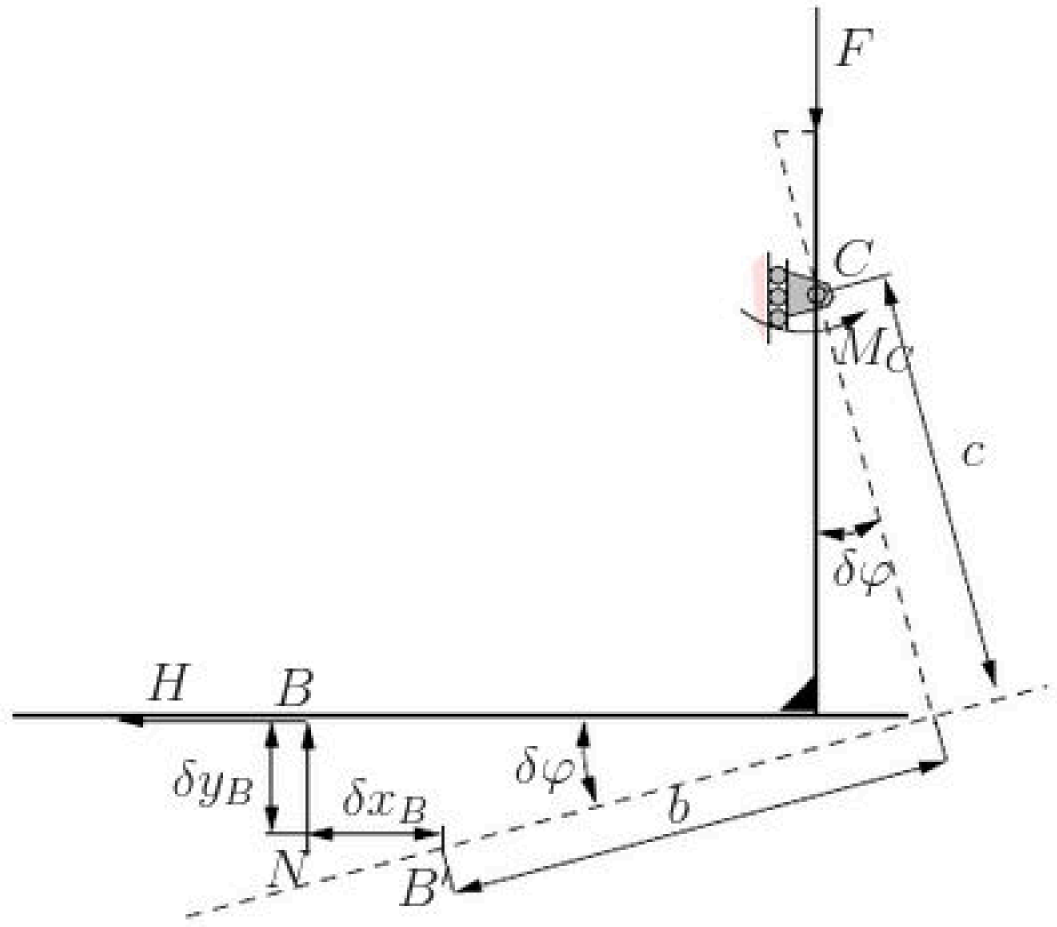

Abbildung 4.8: Berechnung des Moments M_C mittels PdvV

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_C = \left(0,\, 0,\, \delta\varphi \right)^{\mathsf{T}}, \tag{4.15}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_F = \left(-f\delta\varphi,\, 0,\, 0 \right)^{\mathsf{T}}, \tag{4.16}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_B = \left(\delta x_B,\, -\delta y_B,\, 0 \right)^{\mathsf{T}} = \left(c\delta\varphi,\, -b\delta\varphi,\, 0 \right)^{\mathsf{T}}, \tag{4.17}$$

$$\delta W = M_C\delta\varphi - \mu_0 N c\delta\varphi - Nb\delta\varphi = 0 \Rightarrow \tag{4.18}$$

$$M_C = N(\mu_0 c + b) = \frac{(\mu_0 c + b)\,(M - a\cos\alpha G)}{\mu_0\,(r + a\sin\alpha) + a\cos\alpha}. \tag{4.19}$$

Aufgabe 5

Gegeben ist eine Konstruktion bestehend aus einem elastischen Stab (Länge l_1, Durchmesser d_1, Elastizitätsmodul E) und einem elastischen Zylinder (Länge l_2, Außendurchmesser $d_3 = \sqrt{2}d_2$, Innendurchmesser d_2, Elastizitätsmodul E), die miteinander zwischen den Punkten A und B starr verbunden sind. Die Konstruktion wird durch die Kraft F wie in Abb. 5.1 gezeigt belastet. Die Dicke der starren Verbindung in horizontaler Richtung kann vernachlässigt werden.

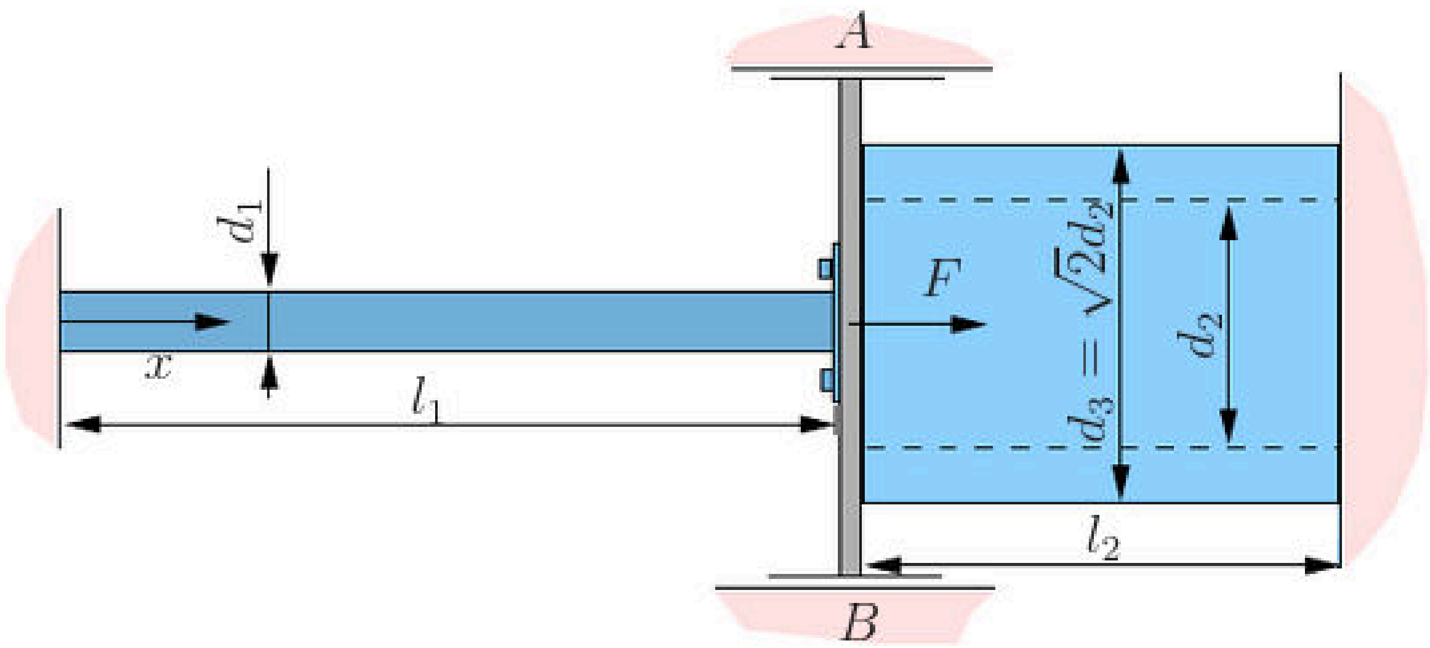

Abbildung 5.1: Starr verbundene Stab und Zylinder

1) Berechnen Sie die Normalspannungen $\sigma(x)$, Verzerrungen $\varepsilon(x)$ und Verschiebungen $u(x)$ im Stab und im Zylinder.

2) Bestimmen Sie die Verschiebung des Kraftangriffspunkts?

Aufgabe 5 – Lösung

1) Berechnung der Normalspannungen, Verzerrungen und Verschiebungen:

Bei der vorgegebenen Belastung (nur Einzelkraft, keine Streckenlast in Längsrichtung) sind die Normalkräfte im Stab und im Zylinder konstant. Die Verschiebungsfunktionen $u_1(x)$ des Stabs für $0 \le x \le l_1$ und $u_2(x)$ des Zylinders für $l_1 \le x \le l_1 + l_2$ haben die folgende Form

$$u_1(x) = \frac{4N_1}{\pi d_1^2 E}x + C_1, \qquad u_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0\,, \tag{5.1}$$

$$u_2(x) = \frac{4N_2}{\pi d_2^2 E}x + C_2, \qquad u_2(l_1 + l_2) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{4N_2}{\pi d_2^2 E}(l_1 + l_2)\,. \tag{5.2}$$

Die Verschiebungen der beiden Bereiche in der starren Verbindung sind gleich. Daraus kann die Relation zwischen N_1 und N_2 abgeleitet werden

$$u_1(l_1) = u_2(l_1) \quad \Rightarrow \quad N_2 = -N_1\frac{l_1 d_2^2}{l_2 d_1^2}. \tag{5.3}$$

Die Kraft N_1 wird mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung in $x-$Richtung für die starre Verbindung berechnet (Abb. 5.2)

$$\sum F_{xi} = F - N_1 + N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = F\frac{l_2 d_1^2}{l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2}. \tag{5.4}$$

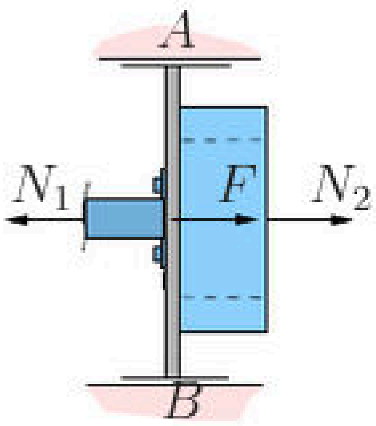

Abbildung 5.2: Kräftegleichgewicht

Für die Normalkraft N_2 gilt

$$N_2 = -F\frac{l_1 d_2^2}{l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2}. \tag{5.5}$$

Mit (5.4) und (5.5) erhält man für die Verschiebungsfunktionen

$$0 \le x \le l_1: \qquad u_1(x) = \frac{4Fl_2}{\pi E\left(l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2\right)}x\,, \tag{5.6}$$

$$l_1 \le x \le l_1 + l_2: \qquad u_2(x) = \frac{4Fl_1}{\pi E\left(l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2\right)}(l_1 + l_2 - x)\,. \tag{5.7}$$

Die Spannungen und Verzerrungen in den beiden Bereichen sind konstant

$$
\begin{aligned}
0 \leq x \leq l_1: \qquad \sigma_1(x) &= \frac{4N_1}{\pi d_1^2} = \frac{4Fl_2}{\pi(l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2)}, && (5.8)\\
\varepsilon_1(x) &= \frac{4N_1}{\pi d_1^2 E} = \frac{4Fl_2}{\pi E(l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2)}, && (5.9)\\
l_1 \leq x \leq l_1 + l_2: \qquad \sigma_2(x) &= \frac{4N_2}{\pi d_2^2} = -\frac{4Fl_1}{\pi(l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2)}, && (5.10)\\
\varepsilon_2(x) &= \frac{4N_2}{\pi d_2^2 E} = -\frac{4Fl_1}{\pi E(l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2)}. && (5.11)
\end{aligned}
$$

2) Verschiebung des Kraftangriffspunkts:

Die Verschiebung der starren Verbindung kann entweder mit Hilfe von (5.6) oder (5.7) bestimmt werden

$$
u_1(l_1) = u_2(l_1) = \frac{4Fl_1 l_2}{\pi E\left(l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2\right)}. \tag{5.12}
$$

Aufgabe 6 – Musterlösung

1) Gegeben sind in MAPLE die Vektoren `a`, `b` und `c` und der Ausdruck `F`, der durch die drei Vektoren definiert ist.

```
[> a := vector([1,2,3]);
[> b := vector([0,5,0]);
[> c := vector([3,2,1]);
[> F := 1/6*abs(dotprod(crossprod(a,b),c));
```

   a) Geben Sie den Ausdruck für `F` in symbolischer Vektornotation an.

   Lösung:

$$F = \frac{1}{6}\,|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = \frac{1}{6}\,|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|$$

   b) Welche Größe wird durch die Definition von `F` in MAPLE beschrieben?

   Lösung: Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Tetraeders

2) Interpretieren Sie den nachfolgenden in MAPLE gegebenen Ausdruck geometrisch. `rho_0`, `R` und `H` seien bereits in MAPLE als positive Zahlen definiert.

```
[> int(int(int(rho_0*r,r=0..R),phi=0..2*Pi),z=0..H);
```

Lösung: Masse eines homogenen Zylinders mit Radius R, Höhe H und Massendichte ρ_0

3) Geben Sie die Gleichungen an, die durch den nachfolgenden MAPLE-Code für das mechanische System eines Balkens der Länge l beschrieben werden. Die positive Zahl `q_0` ist in MAPLE bereits definiert. Die x-Achse ist die Balkenmittelachse. Gehen Sie davon aus, dass der Balken statisch bestimmt gelagert ist. Ergänzen Sie in der Abb. 6.1 die Lagerung und die Belastung.

```
[> gleichung1:= diff(Q(x),x) + q_0*sin(Pi*x/l) = 0:
[> gleichung2:= diff(M(x),x) - Q(x) = 0:
[> gleichung3:= M(0) = 0:
[> gleichung4:= M(l) = 0:
[> gleichungen:={gleichung1,gleichung2,gleichung3,gleichung4}:
[> loesung1:= dsolve(gleichungen,{Q(x),M(x)}):
```

Lösung:

`gleichung1`: $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

`gleichung2`: $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q(x)$

`gleichung3`: $M(0) = 0$

`gleichung4`: $M(l) = 0$

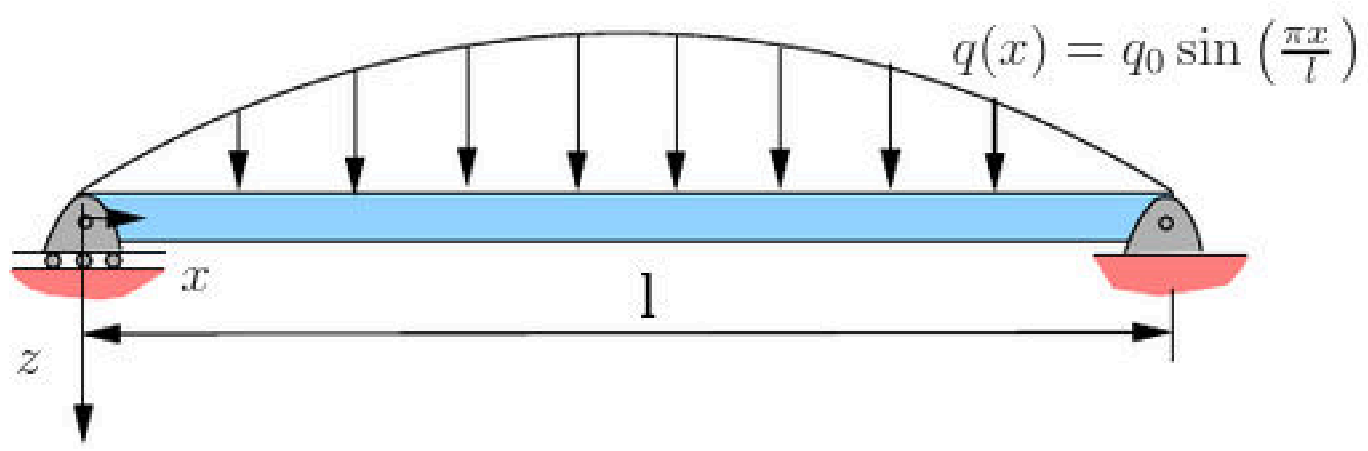

Abbildung 6.1: Balkensystem