
Skript zur Vorlesung Technische Mechanik I

Prof. Dr.-Ing. Thomas Böhlke
Kontinuumsmechanik im Maschinenbau
Institut für Technische Mechanik (ITM)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Wintersemester 2024/2025



Karlsruher Institut für Technologie

Skript zur Vorlesung Technische Mechanik I

Prof. Dr.-Ing. Thomas Böhlke

Kontinuumsmechanik im Maschinenbau

Institut für Technische Mechanik

Fakultät für Maschinenbau

Karlsruher Institut für Technologie

© 2024/2025 Böhlke, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), alle Rechte vorbehalten.

Vorwort

Das vorliegende Skript wird als Arbeitsmaterial für die Lehrveranstaltung Technische Mechanik I angeboten. Es enthält die in der Vorlesung vermittelten theoretischen Grundlagen nahezu vollständig und daneben zu jedem Themenschwerpunkt Beispiele, die die Anwendung der theoretischen Ergebnisse an Hand einfacher Problemstellungen veranschaulichen. Bei der Präsentation des Stoffs wird insbesondere Wert darauf gelegt, die eingeführten Annahmen und den Modellbildungsprozess klar darzustellen, damit der Gültigkeitsbereich und somit die Anwendungsgrenzen der mechanischen Modelle klar erfasst werden können.

Die Lehrveranstaltung Technische Mechanik I setzt sich aus einer Vorlesung, einer Hörsaalübung und einem Rechnerpraktikum zusammen. Wegen der zunehmenden Bedeutung rechnergestützter Methoden in der Mechanik wurde das in früheren Jahren übliche Tafeltutorium durch ein Rechnerpraktikum ersetzt. Dies ermöglicht den Studierenden vom ersten Semester an, Berechnungsaufgaben des Maschinenbaus mit symbolisch und numerisch arbeitender mathematischer Software zu lösen. Dadurch können deutlich komplexere Problemstellungen untersucht werden insbesondere solche, für die keine analytischen Ergebnisse existieren. Die Arbeit mit mathematischer Software kann aber nur erfolgreich sein, wenn der Lehrstoff grundsätzlich verstanden wurde, was nicht ohne Selbststudium gelingen kann. Bei diesem Selbststudium soll dieses Skript Hilfestellung leisten.

Das Skript enthält Ergänzungen (mit ▼ gekennzeichnet) zum Vorlesungsstoff, die in der Regel nicht prüfungsrelevant sind. Mit der Darstellung dieser Ergänzungen werden zwei Ziele verfolgt. Zum einen, sofern sie die mathematischen Grundlagen der Mechanik betreffen, werden für die Vorlesung wichtige mathematische Begriffe eingeführt und veranschaulicht; zum anderen, sofern der Mechanikstoff vertieft wird, soll durch Aufzeigen von wichtigen Zusammenhängen ein umfassendes Verständnis der Mechanik, z.B. bei der Vorbereitung von Mechanik-Prüfungen in höheren Semestern, gefördert werden. Die Darstellung der Ergänzungen zur Mechanik ist so gehalten, dass sich interessierte Studierende auch während des ersten Semesters den Stoff erarbeiten können.

Anmerkungen zum Skript sind immer willkommen und können an die E-Mail-Adresse tm1@itm.kit.edu geschickt werden.

Thomas Böhlke

Karlsruhe, Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	6
2	Grundlagen der Vektorrechnung	9
2.1	Vektoren	9
2.2	Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt	12
2.3	Anwendungen der Vektorrechnung	16
3	Kraftsysteme	24
3.1	Kraft und Drehmoment	24
3.2	Kraftsysteme	27
3.3	Spezielle Kraftsysteme	29
3.4	Volumen-, Flächen- und Linienkraftdichten	30
4	Statik starrer Körper	37
4.1	Gleichgewichtsbedingung für starre Körper	37
4.2	Lagerungsarten und Reaktionsgrößen	40
4.3	Kinematische und statische Bestimmtheit	41
5	Schnittgrößen in Stäben, Balken und Fachwerken	49
5.1	Schnittgrößen in Linientragwerken	49
5.2	Schnittgrößendifferentialgleichung	51
5.3	Stäbe und Balken	53
5.4	Fachwerke	59
6	Schwerpunkt und Massenmittelpunkt	64
6.1	Massendichte, Masse und Massenmittelpunkt	64
6.2	Gewichtskraft und Schwerpunkt	72

7	Arbeit, Energie und Prinzip der virtuellen Verschiebungen	76
7.1	Leistung, Arbeit und Energie	76
7.2	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	81
7.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen	92
8	Zug-Druck-Stäbe	96
8.1	Einachsiger Verzerrungs- und Spannungszustand	96
8.2	Spannungs-Dehnungs-Relation	98
8.3	Randwertproblem für linear-elastische Stäbe	103
8.4	Thermoelastizität	111
9	Statik der undehnbaren Seile	115
9.1	Typische Belastungsfälle und vereinfachende Annahmen	115
9.2	Differentialgleichung der Seilkraft	116
9.3	Die Differentialgleichung der Seilkurve	118
10	Haftung und Gleitreibung	124
10.1	Haften	124
10.2	Haften von Seilen	129
10.3	Gleitreibung	131
	Literatur	133
	Index	134
	Anhang	138
	Symbolverzeichnis	i
	Formelsammlung TM I	vi
	Formelsammlung TM I	I

Kapitel 1

Einführung

Mechanik. Die Mechanik ist die Wissenschaft der Bewegung von materiellen Körpern infolge von Kräften. Sie ist das älteste Teilgebiet der Physik. Mechanische Gesetze wurden schon in der Antike erkannt und genutzt. Man denke beispielsweise an das von Archimedes entdeckte Hebelgesetz. Die Mechanik wird üblicher Weise in die Kinematik und die Dynamik, sowie die Statik und die Kinetik eingeteilt. Die **Kinematik** ist die Lehre der Bewegung von Körpern. Die **Dynamik** ist die Lehre von den Kräften. Im Rahmen der **Statik** wird die innere Beanspruchung und die Deformation von ruhenden Körpern basierend auf den Gleichgewichtsbedingungen untersucht, die **Kinetik** bezieht die Bewegung der Körper in die Betrachtung ein. Die Statik ist also ein Sonderfall der Kinetik. Die Mechanik kann zudem ausgehend von der Art der Modellierung der betrachteten Körper klassifiziert werden. Wird vorausgesetzt, dass der Körper eine kontinuierliche Massendichte besitzt, so spricht man von einer **Kontinuumsmechanik**. Betrachtet man ein Ensemble von Massen, deren räumliche Ausdehnung jeweils vernachlässigt wird, so spricht man von Massenpunkten und einer **Punktmechanik**.

Anwendungen der Mechanik. Anwendungen der Mechanik finden sich im Alltag wie in der Technik. Seit Urzeiten sucht der Mensch sich durch ein Verständnis der Gesetzmäßigkeiten der Mechanik Vorteile zu verschaffen. Die ältesten Werkzeuge des Menschen wie der aus dem Faustkeil hervorgegangene Hammer, Pfeil und Bogen, das aus dem Einbaum erwachsene Schiff, sowie Rad und Wasserrad legen davon Zeugnis ab. Die Anwendung mechanischer Gesetzmäßigkeiten bei dem Bau von Waagen, Flaschenzügen, Brücken, Segelbooten, Windmühlen oder von Wasserschöpfprädern und Pumpen gelang in den letzten Jahrtausenden und Jahrhunderten im Wesentlichen auf der Grundlage langer Erfahrung und vieler Versuche. Seit der Renaissance und verstärkt seit Beginn des 19. Jahrhunderts basiert die Anwendung der mechanischen Gesetzmäßigkeiten bei technischen Problemstellungen wesentlich

auf einer mathematischen Formulierung der Gesetze und der Problemstellungen. Viele Hochtechnologieprodukte wie Flug- oder Kraftfahrzeuge sind ohne die Anwendung der Erkenntnisse der modernen Mechanik nicht denkbar. Dabei wird auf Skalen mit sehr unterschiedlichen Größenordnungen Mechanik betrieben. Bei der Untersuchung von Deformationsmechanismen in Metallen betrachtet man die Bewegung von Materialdefekten im Nanometer-Bereich. Bei der optimalen Gestaltung von Blechbauteilen und bei der Untersuchung von Versagensmechanismen in Werkstoffen stehen die mechanischen Eigenschaften im Mikrometer-Bereich im Blickpunkt. Bei der Berechnung von Formgebungsprozessen und bei der Dimensionierung technischer Konstruktionen analysiert man im Millimeter- und Meter-Bereich.

Technische Mechanik. Die Technische Mechanik ist der Teilbereich der Mechanik, der sich schwerpunktmäßig mit mechanischen Fragestellungen aus der Technik also z.B. den Bereichen Maschinenbau, Bauingenieurwesen und Medizintechnik befasst. Die von der Technischen Mechanik untersuchten Fragestellungen hängen stark von den jeweiligen Entwicklungs- und Forschungsschwerpunkten in den genannten Industriebranchen ab. Traditionell ist die Technische Mechanik eng mit der Konstruktionstechnik und der Werkstofftechnik verbunden. Die Auslegung und die Optimierung von Konstruktionen basiert essentiell auf der Anwendung der Methoden der Technischen Mechanik. Die Durchführung und Auswertung von Experimenten im Rahmen der Werkstoffwissenschaften setzt oft die Anwendung von Begriffen und Methoden der Technischen Mechanik voraus. In den letzten Jahrzehnten ist bedingt durch die rasante Entwicklung der Technik und insbesondere der Rechentechnik eine Mathematisierung der Technischen Mechanik festzustellen, wobei den numerischen Methoden eine besondere Bedeutung zukommt.

Materialmodellierung. Zur Bestimmung der inneren Beanspruchungen und der Deformation von Körpern müssen in der Regel Annahmen zum **Materialverhalten** der betrachteten Körper eingeführt werden. Das Materialverhalten kann beispielsweise dem eines Fluids oder eines Festkörpers entsprechen. Diese Annahmen müssen auf experimentellen Befunden beruhen und widerspruchsfrei sein. Unter Umständen können die Deformationen eines Festkörpers so klein sein, dass sie bei der Berechnung der inneren Beanspruchung von untergeordneter Bedeutung sind und ganz vernachlässigt werden. Das entspricht der Annahme, dass der Körper starr ist. Können die Deformationen nicht vernachlässigt werden oder sind sogar das Ziel der Untersuchung, so ist z.B. zu prüfen, ob die Deformationen des Körpers elastisch oder inelastisch sind. Das elastische Verhalten kann danach klassifiziert werden, ob der Zusammenhang zwischen Beanspruchungen und Deformationen linear oder nichtlinear ist. Metallische Werkstoffe weisen in den

meisten Fällen ein in guter Näherung lineares elastisches Verhalten auf. Das elastische Verhalten von Polymerwerkstoffen ist dagegen, das zeigen Experimente, nichtlinear. Ab einer gewissen Größe der Beanspruchung zeigen alle Festkörper ein inelastisches Materialverhalten. Die Verformung des Materials vollzieht sich teilweise oder vollständig dissipativ. Als Beispiel seien hier Formgebungsprozesse von Blechbauteilen im Flugzeug- und Automobilbau genannt. Das Materialverhalten kann dabei vom elastoplastischen oder vom elastoviskoplastischen Typ sein. Oftmals ist bedingt durch den zu analysierenden Fertigungsprozess die Temperatur in die Betrachtung einzubeziehen. Man spricht dann nicht mehr von einer kontinuumsmechanischen sondern von einer kontinuums-thermodynamischen Modellierung.

Strukturmodellierung. Der Ingenieur ist in aller Regel an Modellansätzen, Simulationen und Berechnungsergebnissen interessiert, die so genau wie nötig und nicht so genau wie möglich sind. Bei der Strukturmodellierung - man denke dabei z.B. an technische Strukturen wie Brücken oder Flugzeuge - sind wie bei der Materialmodellierung vereinfachende Annahmen einzuführen. Sind gewisse Querschnittsabmessungen von Bauteilen deutlich kleiner als andere, so kann man diese unter Umständen vernachlässigen. Man führt in diesen Fällen die Begriffe Linien- und Flächentragwerk ein. Bei einem **Linientragwerk** sind im Vergleich zur Längsabmessung zwei Querschnittsabmessungen klein. Man spricht von Stäben und Balken. Bei **Flächentragwerken** ist die Dickenabmessung klein im Vergleich zu den beiden anderen Bauteilabmessungen. Man spricht dann z.B. von Scheiben, Platten, Membranen und Schalen.

Kapitel 2

Grundlagen der Vektorrechnung

2.1 Vektoren

Skalare und Vektoren. Beispiele für reelle skalare Größen sind die Masse eines Körpers oder die Temperatur in einem bestimmten Punkt. Ein Vektor ist eine Größe, die durch Betrag, Richtung und Richtungssinn gekennzeichnet ist. Beispiele für Vektoren sind die Geschwindigkeit eines Punktes, der Ortsvektor, der dessen Lage beschreibt, oder die Kraft, die auf diesen Punkt wirkt (Abb. 2.1).

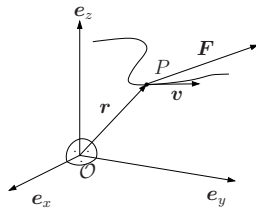


Abb. 2.1: Beispiele für Vektoren

Auf eine axiomatische Einführung der Vektorrechnung wird hier verzichtet. Es sollen aber die grundlegenden Rechenregeln in Erinnerung gerufen werden. Skalare werden im Folgenden durch einfache Buchstaben (z.B. a oder α), Vektoren durch Buchstaben im Fettdruck (z.B. $\mathbf{a}$ oder $\boldsymbol{\alpha}$) angegeben.

Für die **Addition von Vektoren** gelten die folgenden Gesetze:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ Kommutativgesetz
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ Assoziativgesetz
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ Nullvektor

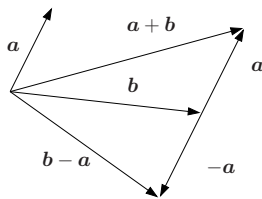


Abb. 2.2: Vektoraddition

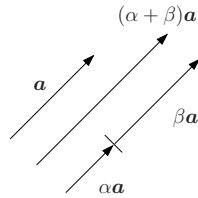


Abb. 2.3: Skalarmultiplikation

- $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ negativer Vektor
- $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ Subtraktion von Vektoren

Für die **Multiplikation von Vektoren** mit einem Skalar gelten

- $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$ Assoziativgesetz
- $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ Distributivgesetze
- $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$

Die anschauliche Bedeutung dieser Operationen ergibt sich aus Abb. 2.2 und Abb. 2.3.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren. Ein Satz von n Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ ungleich null heißt linear unabhängig, wenn aus

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

folgt $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren heißt **Dimension des Vektorraumes**. Im Folgenden betrachten wir im Wesentlichen dreidimensionale Vektorräume. Die drei (Basis-)Vektoren $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ (siehe Abb. 2.1), die senkrecht aufeinander stehen und jeweils den Betrag eins haben, sind beispielsweise linear unabhängig. Der betrachtete Raum ist dreidimensional, da jeder Vektor durch die drei linear unabhängigen Vektoren $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ dargestellt werden kann. Es soll angenommen werden, dass die drei Vektoren ein Rechtssystem bilden.

► **Beispiel: Lineare Unabhängigkeit.** Gegeben sind die drei Vektoren $\underline{a} = \underline{e}_x$, $\underline{b} = \underline{e}_y$ und $\underline{c} = \underline{e}_x + \underline{e}_y$. Prüfen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

Wegen $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ gilt $\underline{0} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{c}$. Die Gleichung $\underline{0} = \alpha_1 \underline{a} + \alpha_2 \underline{b} + \alpha_3 \underline{c}$ hat also eine Lösung für Koeffizienten α_i ungleich null. Damit sind die Vektoren linear abhängig. Dies ist auch anschaulich, da die drei Vektoren in einer Ebene liegen. In einer Ebene gibt es maximal zwei linear unabhängige Vektoren, weil deren Dimension gleich zwei ist.

Komponentendarstellung von Vektoren. Wir beschränken uns auf die Anwendung der Vektorrechnung im zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum. Um zu einer Komponentendarstellung von Vektoren zu gelangen, die für konkrete Berechnungen notwendig ist, führt man zunächst einen **Bezugspunkt** O im euklidischen Raum ein. Diesem Bezugspunkt ordnet man die **Basisvektoren** $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ zu, die normiert sind und senkrecht aufeinander stehen (siehe Abb. 2.1 und Abb. 2.4). Eine solche Vektorbasis nennt man **Orthonormalbasis**. Bezugspunkt und Basis nennt man zusammen **Bezugssystem** $\{O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$. Die Lage eines Punktes P lässt sich bezüglich des Bezugssystems durch den **Ortsvektor** $\underline{r}_P = \overrightarrow{OP}$ angeben (Abb. 2.4).

$$\underline{r}_P = x_P \underline{e}_x + y_P \underline{e}_y + z_P \underline{e}_z. \quad (2.2)$$

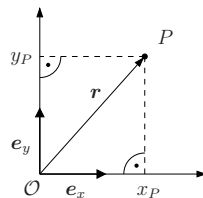


Abb. 2.4: Ortsvektor

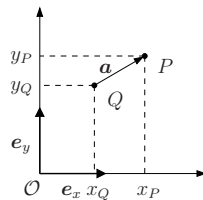
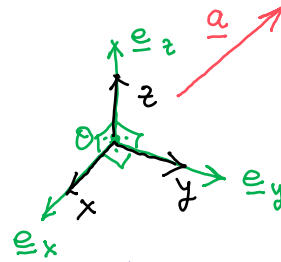


Abb. 2.5: Vektor

Die **Komponenten** $\{x_P, y_P, z_P\}$ des Vektors $\underline{r}_P$ heißen **kartesische Koordinaten** des Punktes P . Der Ortsvektor hängt von der Wahl des Bezugspunktes ab. Das kann man

Vektor : Richtung, Richtungsinus, Betrag



O : Bezugspunkt

$\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$: Basisvektore

$\{x, y, z\}$: kartesische Koordinaten

Spaltenvektordarstellung

Darstellung von Vektoren:

$$\underline{a} = \vec{a} = a = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{\{\underline{e}_x, \dots\}}$$

symbolische Darstellung

gemischte Darstellung

Skalarprodukt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \angle(\underline{a}, \underline{b})$$

$$\underline{e}_x \cdot \underline{e}_x = 1 \quad \underline{e}_y \cdot \underline{e}_y = 1 \quad \dots$$

$$\underline{e}_x \cdot \underline{e}_y = 0 \quad \underline{e}_x \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \dots$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + \dots) \cdot (b_x \underline{e}_x + b_y \underline{e}_y + \dots)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (a_x \ a_y \ a_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z$$

Kreuzprodukt: $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$

Spatprodukt: $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$

Leseschrift: 2.1, 2.2

dadurch einsehen, dass durch eine spezielle Wahl des Bezugspunkts der Ortsvektor zum Nullvektor gemacht werden kann. Vektoren mit einer mechanischen Bedeutung wie z.B. der oben erwähnte Geschwindigkeitsvektor einer Punktmasse sind in der Regel unabhängig vom gewählten Bezugspunkt. Das kann an folgendem Beispiel veranschaulicht werden. Der Vektor $\underline{a} = \overrightarrow{QP}$ geht vom Punkt Q zum Punkt P (Abb. 2.5). Die Komponentendarstellung von $\underline{a}$ lautet

$$\underline{a} = \underline{r}_P - \underline{r}_Q = (x_P - x_Q)\underline{e}_x + (y_P - y_Q)\underline{e}_y + (z_P - z_Q)\underline{e}_z = a_x\underline{e}_x + a_y\underline{e}_y + a_z\underline{e}_z. \quad (2.3)$$

Die Größen $\{a_x, a_y, a_z\}$ heißen Komponenten des Vektors $\underline{a}$. Man sieht, dass auf Grund der Differenzbildung die Wahl eines anderen Bezugspunkts die gleichen Komponenten ergeben würde. Die Wahl einer anderen Orthonormalbasis würde dagegen zu einer Änderung der Komponenten führen.

Um die Notation zu vereinfachen notiert man in vielen Fällen Vektoren ohne Angabe der Basis als **Spaltenvektoren**. Für einen Ortsvektor $\underline{r}$ und einen Vektor $\underline{a}$ ergibt sich beispielsweise

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Es ist aber zu beachten, dass in dieser Darstellung die Basis nicht explizit spezifiziert wird, was bei gleichzeitiger Verwendung von mehreren Basissystemen von Nachteil sein kann.

► **Beispiel: Rechnen mit Vektorkomponenten.** Gegeben sind die beiden Vektoren $\underline{a} = 1\underline{e}_x + 2\underline{e}_y + 3\underline{e}_z$ und $\underline{b} = 0\underline{e}_x + 5\underline{e}_y + 0\underline{e}_z = 5\underline{e}_y$. Berechnen Sie $5\underline{a} + 3\underline{b}$.

Es folgt unmittelbar $5\underline{a} + 3\underline{b} = (5+0)\underline{e}_x + (10+15)\underline{e}_y + (15+0)\underline{e}_z = 5\underline{e}_x + 25\underline{e}_y + 15\underline{e}_z$. Man kann die Rechnung auch unter Verwendung der Spaltenvektorkonvention durchführen

$$5\underline{a} + 3\underline{b} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

2.2 Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt

Skalarprodukt. Das Skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b}$ zweier Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ liefert einen Skalar

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos(\angle(\underline{a}, \underline{b})). \quad (2.6)$$

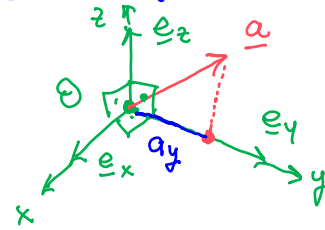
Mit $|\underline{a}|$ wird der Betrag von $\underline{a}$ bezeichnet. $\angle(\underline{a}, \underline{b})$ kennzeichnet den Winkel zwischen

Vektor : Betrag, Richtung, Richtungsinn

Darstellung: $\underline{a} = \vec{a} = a = a_x\underline{e}_x + a_y\underline{e}_y + a_z\underline{e}_z = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{\{\underline{e}_x, \dots\}}$

komponenten des Vektors bez. $\{\underline{0}, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ Richtungsvektoren

komponenten abhängig von gewählte Basis



Rechenoperationen

Multiplikation mit einem Skalar: $\alpha \underline{a} = \alpha \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{bmatrix}$

Addition / Subtraktion von Vektoren: $\underline{a} \pm \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix}$

alle Komponenten bez. einer Basis $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren:

Ein Satz von n Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ heißt linear unabhängig, wenn aus

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

folgt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Beispiel 1: $n=2$ 2D-Beispiel

$\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ sind linear unabhängig

linear Kombination

Beispiel 2: $n=3$ 2D-Beispiel

$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3 = \underline{0}$
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \approx 1 \neq 0$
 hier lin. Bsp. ($\alpha_i \in \mathbb{R}$)

den Vektoren a und b . Ist e ein Vektor mit dem Betrag eins, so entspricht das Skalarprodukt $a \cdot e = |a| \cos(\angle(a, e))$ dem Anteil eines Vektors a in Richtung eines Einheitsvektors e (Abb. 2.6). Man spricht in diesem Fall von der **Projektion** von a auf e . Für das Skalarprodukt gelten folgende Rechenregeln:

- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ Distributivgesetz
- $(\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b)$ Assoziativgesetz
- $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativgesetz
- $a \cdot a > 0 \quad \forall a \neq 0$
- $a \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$

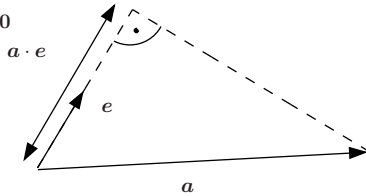


Abb. 2.6: Projektion

Aus der Definition des Skalarproduktes und den Eigenschaften einer Orthonormalbasis folgt die alternative Darstellung des Skalarproduktes

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.7)$$

Der **Betrag eines Vektors** lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes folgendermaßen angeben

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.8)$$

Für den **Winkel zwischen zwei Vektoren** ($a \neq 0$ und $b \neq 0$) gilt

$$\cos(\angle(a, b)) = \frac{a \cdot b}{|a||b|}. \quad (2.9)$$

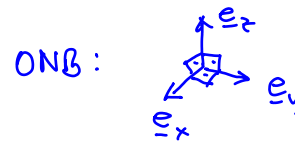
► **Beispiel: Skalarprodukt.** Gegeben sind die beiden Vektoren $a = 1e_x + 2e_y + 3e_z$ und $b = 0e_x + 5e_y + 0e_z = 5e_y$. Berechnen Sie die Beträge der Vektoren sowie das Skalarprodukt $a \cdot b$.

Für die Beträge der Vektoren gilt $|a| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ und $|b| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5$.

Für das Skalarprodukt erhält man $a \cdot b = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 10$.

Skalarprodukt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \angle(\underline{a}, \underline{b})$$



ONB:

$$e_x \cdot e_x = 1 \quad e_x \cdot e_y = 0 \quad e_x \cdot e_z = 0$$

usw.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_x e_x + \dots) \cdot (b_x e_x + b_y e_y + \dots) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos \angle(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|}$$

Beispiel:

geg: 1) $\underline{a}$: beliebiger Vektor

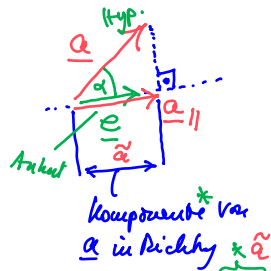
2) $\underline{e}$: Richtungseinheitsvektor

$$\underline{e} \cdot \underline{e} = |\underline{e}|^2 = 1$$

ges: Anteil von $\underline{a}$ in Richtung $\underline{e}$

$$\text{Lös: } \underline{a}_{||} = \underbrace{(\underline{a} \cdot \underline{e})}_{\tilde{a}} \underline{e}$$

$\tilde{a}$: Anteil (Skalar) von $\underline{a}$ in Richtung $\underline{e}$



$$\frac{\tilde{a}}{|\underline{a}|} = \cos(\alpha) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{e}}{|\underline{a}| |\underline{e}|} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{e}}{|\underline{a}|}$$

$$\tilde{a} = |\underline{a}| \cos \alpha$$

► **Beispiel: Winkel zwischen Vektoren.** Berechnen Sie den Winkel zwischen der Raumdiagonalen und den Basisvektoren in einem kartesischen Koordinatensystem.

Wir betrachten nur die Raumdiagonale $\underline{d}$, die mit allen drei Basisvektoren $\{e_x, e_y, e_z\}$ einen spitzen Winkel einschließt. Diese Raumdiagonale hat die Komponentendarstellung $\underline{d} = \alpha(e_x + e_y + e_z)$. Wir wählen α so, dass der Vektor $\underline{d}$ den Betrag eins hat, also ein Richtungs(einheits)vektor ist. Der Betrag von $\underline{d}$ ist: $|\underline{d}| = \sqrt{\underline{d} \cdot \underline{d}} = \sqrt{3}|\alpha|$. Aus $|\underline{d}| = 1$ folgt also $|\alpha| = 1/\sqrt{3}$. Da die Basisvektoren und $\underline{d}$ normiert sind, ergibt sich für den Winkel $\cos(\beta) = \cos(\angle(e_x, \underline{d})) = e_x \cdot \underline{d} = \pm 1/\sqrt{3}$. Für den Winkel folgt dann bei positivem α : $\beta \approx 55^\circ$. Bei negativem α gilt entsprechend $\beta \approx 125^\circ$. Die Winkelsumme ist 180° .

Kreuzprodukt. Das Kreuzprodukt oder **Vektorprodukt** $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ liefert einen Vektor mit dem Betrag

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin(\angle(\underline{a}, \underline{b})). \quad (2.10)$$

Für die Richtung von $\underline{a} \times \underline{b}$ gilt: 1) $\underline{a} \times \underline{b}$ steht senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$, 2) $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden ein Rechtssystem. Der Betrag des Kreuzproduktes $\underline{a} \times \underline{b}$ ist gleich dem Betrag der Fläche des durch $\underline{a}$ und $\underline{b}$ definierten Parallelogramms (Abb. 2.7).

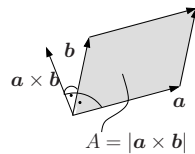


Abb. 2.7: Kreuzprodukt

Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ Antikommutativgesetz
- $\alpha(\underline{a} \times \underline{b}) = (\alpha \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\alpha \underline{b})$ Assoziativgesetz
- $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$ Distributivgesetz

Aus der Definition des Kreuzproduktes und den Eigenschaften einer Orthonormalbasis folgt für die Kreuzprodukte der Basisvektoren

$$e_x \times e_y = -e_y \times e_x = e_z, \quad e_y \times e_z = -e_z \times e_y = e_x, \quad e_z \times e_x = -e_x \times e_z = e_y. \quad (2.11)$$

Vektorprodukt, Kreuzprodukt geg: $\underline{a}, \underline{b}$ ges: $\underline{c}$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$$

- $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}\}$ bilden Rechtssystem
- $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$ steht senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{c}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin(\angle(\underline{a}, \underline{b}))$$

Folgend:

$$\begin{aligned} e_x \times e_y &= e_z = -e_y \times e_x \\ e_y \times e_z &= e_x = -e_z \times e_y \\ e_z \times e_x &= e_y = -e_x \times e_z \end{aligned}$$

usw

$$e_x \times e_x = 0 \quad \text{usw}$$

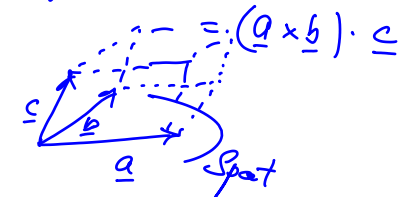
$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= (a_x e_x + \dots) \times (b_x e_x + \dots) \\ &= a_x b_x \underbrace{e_x \times e_x}_{=0} + \dots \end{aligned}$$

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

skalare Übrige

Spatprodukt : geg: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ges: $\underline{d} = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] := (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$$



$$[\dots] = 0 \quad \text{Vekt. lin. abhängig}$$

$$[\dots] \neq 0 \quad \text{Vekt. lin. unabhängig}$$

$$|[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]| : \text{Spatvolumen}$$

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] > 0 \Rightarrow \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \text{ linear unabhängig, Rechtssystem}$$

Infolge dessen lässt sich das Kreuzprodukt zweier Vektoren folgendermaßen schreiben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

► **Beispiel: Kreuzprodukt.** Berechnen Sie das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{a} = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{b} = 0\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z = 5\mathbf{e}_y$.

Die Anwendung der Berechnungsvorschrift ergibt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Eine Dreiecksfläche lässt sich durch $A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|/2$ berechnen, wobei die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ von einem beliebigen Eckpunkt des Dreiecks zu den beiden anderen Eckpunkten gehen.

Spatprodukt. Das Spatprodukt $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ dreier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ liefert einen Skalar

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (2.14)$$

Der Betrag des Spatprodukts $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ist gleich dem Volumeninhalt des durch die drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (Abb. 2.8). Für das Spatprodukt gelten folgende Rechenregeln, die aus den Eigenschaften des Skalar- und des Kreuzproduktes abgeleitet werden können:

- $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$
- $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}]$

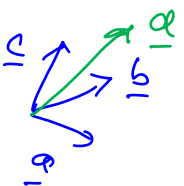
Von Bedeutung ist noch die vektoralgebraische Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (2.15)$$

Ein Tetraeder wird durch vier Raumpunkte bestimmt, die nicht in einer Ebene liegen. Das Volumen des Tetraeders lässt sich aus $V = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|/6$ bestimmen. Die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ gehen von einem beliebig wählbaren Eckpunkt des Tetraeders zu den drei anderen Eckpunkten. Man beachte, dass der Betrag des Spatprodukts zu nehmen ist, wenn die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ kein Rechtssystem bilden.

Darstellung eines Vektors in einer rechtwinkligen Basis

geg: $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$: lin. unabhängig
 $\underline{\mathbf{d}}$ nicht orthogonal



$$\text{ges: } \underline{\mathbf{d}} = \alpha \underline{\mathbf{a}} + \beta \underline{\mathbf{b}} + \gamma \underline{\mathbf{c}}$$

$$\underline{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{c}} = \alpha \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}} + \beta \underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}} + \gamma \overbrace{\underline{\mathbf{c}} \times \underline{\mathbf{c}}}^0$$

$$(\underline{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{c}}) \cdot \underline{\mathbf{b}} = \alpha (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}}) \cdot \underline{\mathbf{b}} + \beta \underbrace{(\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}) \cdot \underline{\mathbf{b}}}_{0 \text{ weil beide } \perp}$$

$$[\underline{\mathbf{d}}, \underline{\mathbf{c}}, \underline{\mathbf{b}}] = \alpha [\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{c}}, \underline{\mathbf{b}}]$$

$$\alpha = \frac{[\underline{\mathbf{d}}, \underline{\mathbf{c}}, \underline{\mathbf{b}}]}{[\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{c}}, \underline{\mathbf{b}}]} = \frac{[\underline{\mathbf{d}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}]}{[\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}]}$$

$$\beta = \frac{[\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{c}}]}{[\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}]}$$

Lesestoff: 2.1, 2.2, 2.3

Kapitel !

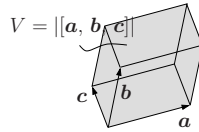


Abb. 2.8: Interpretation des Spatprodukts

► **Beispiel: Spatprodukt.** Berechnen Sie das Spatprodukt der Vektoren $\mathbf{a} = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$, $\mathbf{b} = 0\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z = 5\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 1\mathbf{e}_z$.

Für das Kreuzprodukt wurde bereits $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -15\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z$ gezeigt. Damit folgt für das Spatprodukt $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -15 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = -40$. Da das Spatprodukt der drei Vektoren ungleich null ist, spannen die drei Vektoren ein Volumen auf und liegen nicht in einer Ebene. Sie sind also linear unabhängig. Da das Spatprodukt negativ ist, bilden die drei Vektoren ein Linkssystem.

► **Beispiel: Dreiecksfläche und Spatvolumen.** Gegeben sind die drei Vektoren $\mathbf{r}_A = 4\mathbf{m}\mathbf{e}_z$, $\mathbf{r}_B = 4\mathbf{m}\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{r}_C = 4\mathbf{m}\mathbf{e}_x + 2\mathbf{m}\mathbf{e}_y$. Bestimmen Sie die Größe der durch die Punkte $\{\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C\}$ definierten Dreiecksfläche sowie das Volumen des durch $\{\mathbf{O}, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C\}$ bestimmten Tetraeders.

Zunächst führen wir die Vektoren $\mathbf{r}_{AO} = -\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = 4\mathbf{m}\mathbf{e}_x - 4\mathbf{m}\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A = 4\mathbf{m}\mathbf{e}_x + 2\mathbf{m}\mathbf{e}_y - 4\mathbf{m}\mathbf{e}_z$ ein. Die Ergebnisse folgen durch Anwendung der oben angegebenen Formeln. Für die Dreiecksfläche gilt: $A = |\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC}|/2 = 4\sqrt{2}\text{m}^2$. Das Tetraedervolumen ist $V = |[\mathbf{r}_{AB}, \mathbf{r}_{AC}, \mathbf{r}_{AO}]|/6 = 16/3\text{m}^3$.

2.3 Anwendungen der Vektorrechnung

Geradengleichung. Eine durch die Punkte P und Q verlaufende Gerade im dreidimensionalen Raum kann auf einfache Weise durch eine Geradengleichung dargestellt und parametrisiert werden. Abb. 2.9 entnimmt man

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_P + \lambda(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Für $\lambda = 0$ stimmt $\mathbf{r}$ mit $\mathbf{r}_P$ überein, für $\lambda = 1$ mit $\mathbf{r}_Q$. Der Parameter λ dient der Parametrisierung der Geraden. Die Differentiation von Vektoren erfolgt komponentenweise. Für $d\mathbf{r}(\lambda)/d\lambda$ erhält man mit $\mathbf{g} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$

$$\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d(r_{Px} + \lambda g_x)}{d\lambda} \mathbf{e}_x + \frac{d(r_{Py} + \lambda g_y)}{d\lambda} \mathbf{e}_y + \frac{d(r_{Pz} + \lambda g_z)}{d\lambda} \mathbf{e}_z = \mathbf{g}. \quad (2.17)$$

Geradengleichung:

$\mathbf{r}_P = x_P \mathbf{e}_x + y_P \mathbf{e}_y + z_P \mathbf{e}_z$

$\mathbf{r}_Q = x_Q \mathbf{e}_x + \dots$

$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P}{|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P|}$ Richtungs-
einheits-
vektor

$\lambda \in \mathbb{R} : \text{reelles Parameter} (-\infty, +\infty)$

$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_P + \lambda(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P)$
Geradengleichung

$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_P + \tilde{\lambda} \mathbf{e}$

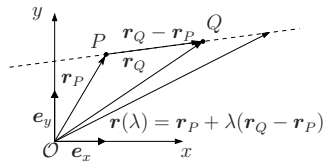


Abb. 2.9: Geradengleichung

► **Beispiel: Geradengleichung.** Bestimmen Sie die Geradengleichung, die durch die beiden Punkte $r_P = e_x$ und $r_Q = e_y$ verläuft. Berechnen Sie den minimalen Abstand des Koordinatenursprungs mit der Geraden und interpretieren Sie das Ergebnis.

Die Anwendung von Gleichung (2.16) ergibt: $r(\lambda) = e_x + \lambda(e_y - e_x) = (1 - \lambda)e_x + \lambda e_y$. Der Abstand zwischen dem Koordinatenursprung und einem Punkt auf der Geraden ist gleich dem Betrag des zugehörigen Vektors $r(\lambda)$. Der minimale Abstand ist also gleich dem minimalen Betrag von $r(\lambda)$. Das Betragsquadrat ist gleich $|r(\lambda)|^2 = (1 - \lambda)^2 + \lambda^2$. Das zum minimalen Abstand gehörige λ_0 erhält man durch Differentiation dieser Gleichung und Nullsetzen der Ableitung: $-2(1 - \lambda) + 2\lambda = 4\lambda - 2 = 0$. Es gilt also: $\lambda_0 = 1/2$. Der zugehörige Punkt auf der Geraden ist $r(\lambda_0) = (e_x + e_y)/2$. Der minimale Abstand ist gleich $|r(\lambda_0)| = 1/\sqrt{2}$. Den Punkt mit dem minimalen Abstand zum Koordinatenursprung erhält man durch Konstruktion der Lotrechten vom Koordinatenursprung auf die Gerade.

Ebenengleichung. Analog zur Geradengleichung lässt sich eine durch die Punkte P, Q und R verlaufende Ebene im dreidimensionalen euklidischen Raum parametrisieren. Abb. 2.10 entnimmt man folgende (explizite) Form der Ebenengleichung

$$r(\lambda, \mu) = r_P + \lambda(r_Q - r_P) + \mu(r_R - r_P) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Es gilt

$$\frac{\partial r(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = r_Q - r_P, \quad \frac{\partial r(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = r_R - r_P. \quad (2.19)$$

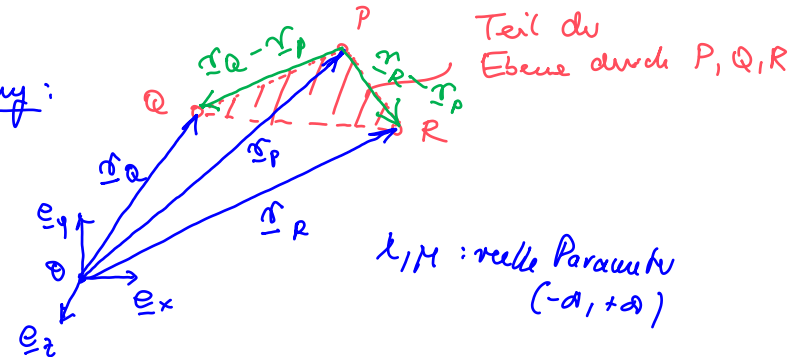
Eine implizite Darstellung einer Ebene ist durch

$$n \cdot (r - r_C) = 0 \quad (2.20)$$

gegeben, wobei n ein **Normaleneinheitsvektor** der Ebene und r_C ein Punkt in der Ebene ist. Alle Ortsvektoren r , die diese Gleichung erfüllen, liegen in der durch n und r_C eindeutig bestimmten Ebene.

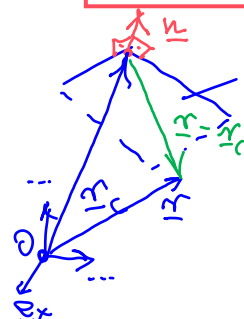
Ebenengleichung:

$\underline{r}_P, \underline{r}_Q, \underline{r}_R$:
Ortsvektoren der
Punkte P, Q, R



$$\underline{r}(\lambda, \mu) = \underline{r}_P + \lambda(\underline{r}_Q - \underline{r}_P) + \mu(\underline{r}_R - \underline{r}_P)$$

Ebenengleichung (explizit)



Ebene im Raum (3D)

glt: $\underline{r}_C, \underline{n}, \underline{r}$

Frage: liegt $\underline{r}$ in Ebene?

$$(\underline{r} - \underline{r}_C) \cdot \underline{n} = 0$$

implizite Definition

$\underline{n}$: Normalenvektor der Ebene

$\underline{r}_C$: Ortsvektor eines Punktes in der Ebene

Gleichgültig, falls $\underline{r}$ in Ebene liegt

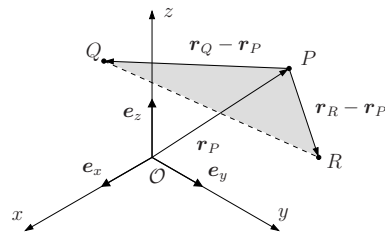


Abb. 2.10: Ebenengleichung

► **Beispiel: Ebenengleichung.** Bestimmen Sie eine explizite und eine implizite Gleichung der Ebene, die die drei Punkte $\mathbf{r}_A = \mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{r}_B = \mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{r}_C = \mathbf{e}_z = \{0, 0, 1\}$ enthält.

Aus

$$\mathbf{r}(\lambda, \mu) = \mathbf{r}_C + \lambda(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) + \mu(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \quad (2.21)$$

folgt

$$\mathbf{r}(\lambda, \mu) = \lambda \mathbf{e}_x + \mu \mathbf{e}_y + (1 - \lambda - \mu) \mathbf{e}_z. \quad (2.22)$$

Der Normaleneinheitsvektor der Ebene ist

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z). \quad (2.23)$$

Damit folgt für die implizite Darstellung beispielsweise

$$(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{e}_z) = 0, \quad (2.24)$$

wobei auf die Normierung des Normalenvektors verzichtet wurde.

Schiefwinklige Basissysteme. Soll ein Vektor $\mathbf{v}$ in einer durch drei linear unabhängige Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ gegebenen Basis dargestellt werden, wobei die drei Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ im Allgemeinen weder normiert sind, noch senkrecht aufeinander stehen, dann kann man dafür eine sehr kompakte Darstellung finden. Für gegebene Vektoren $\mathbf{v}$ und $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ sind also drei Skalare α , β und γ zu bestimmen, derart dass

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \quad (2.25)$$

gilt.

Notiert man Gleichung (2.25) in Komponenten, so erhält man das lineare

Gleichungssystem

$$a_x\alpha + b_x\beta + c_x\gamma = v_x, \quad (2.26)$$

$$a_y\alpha + b_y\beta + c_y\gamma = v_y, \quad (2.27)$$

$$a_z\alpha + b_z\beta + c_z\gamma = v_z, \quad (2.28)$$

das auch mittels einer Koeffizientenmatrix dargestellt werden kann

$$\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lässt sich explizit darstellen. Kreuzt man diese Gleichung zunächst mit $\mathbf{a}$ und multipliziert das Ergebnis skalar mit $\mathbf{b}$, so erhält man: $(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \gamma(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$. Es folgt auf diese Weise eine lineare Gleichung für γ . Auf gleiche Art können β und α bestimmt werden. Die Komponenten α , β und γ haben also die Form

$$\alpha = \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}, \quad \beta = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}, \quad \gamma = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}. \quad (2.30)$$

►**Beispiel: Zerlegung eines Vektors.** Gegeben sind die vier Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{d} = 2\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z$. Zerlegen Sie den Vektor $\mathbf{d}$ in die drei Richtungen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, d.h. bestimmen Sie die drei Skalare $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ derart, dass $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ gilt. 

Die Zerlegung des Vektors $\mathbf{d}$ entspricht der Lösung des linearen Gleichungssystems $\alpha - 2\beta = 2$, $\alpha + \beta + \gamma = 4$, $\alpha + \beta - \gamma = 8$. Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $\alpha = 14/3$, $\beta = 4/3$, $\gamma = -2$.

▼ **Ergänzung: Lineare Gleichungssysteme.** Ein lineares Gleichungssystem lässt sich durch eine Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, einen unbekannten Vektor $\mathbf{x}$ und einen die rechte Seite des Gleichungssystems bestimmenden Vektor $\mathbf{b}$ symbolisch darstellen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (2.31)$$

Die **Matrix** $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{b}$ sind gegeben. Der Vektor $\mathbf{x}$ ist gesucht. Die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{b}$ sind im Allgemeinen n -dimensional. $\mathbf{A}$ ist eine $m \times n$ -Matrix, wobei wir uns hier auf den Sonderfall $m = n$ beschränken. Formuliert man das Gleichungssystem in Komponenten, so erhält man die n Gleichungen ($i = 1 \dots n$)

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i. \quad (2.32)$$

Für $n = 2$ lauten diese Gleichungen

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2. \quad (2.33)$$

Hat das Gleichungssystem eine Lösung, so ist diese formal durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad x_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{-1}b_j \quad (2.34)$$

gegeben. Für $n = 2$ gilt speziell

$$x_1 = (\mathbf{A}^{-1})_{11}b_1 + (\mathbf{A}^{-1})_{12}b_2, \quad x_2 = (\mathbf{A}^{-1})_{21}b_1 + (\mathbf{A}^{-1})_{22}b_2. \quad (2.35)$$

$\mathbf{A}^{-1}$ ist die inverse Matrix von $\mathbf{A}$. Es gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (2.36)$$

mit der **Einsmatrix** oder **Einheitsmatrix** $\mathbf{I}$, die beispielsweise für $n = 3$ die Form

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

hat. Lineare Gleichungssysteme lassen sich beispielsweise mittels der Cramer'schen Regel oder mit dem Gauss-Algorithmus lösen.

▼ **Ergänzung: Lösbarkeit von Gleichungssystemen.** Ein **inhomogenes lineares Gleichungssystem**

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad (2.38)$$

hat genau dann eine eindeutige Lösung $\{x_i, i = 1 \dots n\}$, wenn die **Determinante** der Koeffizientenmatrix A_{ij} ungleich null ist, im Falle von $n = 2$ also $\det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$ gilt.

Ein **homogenes Gleichungssystem**

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0 \quad (2.39)$$

hat genau dann eine Lösung $\{x_i, i = 1 \dots n\}$ ungleich dem Nullvektor, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix A_{ij} gleich null ist. In diesem Fall ist die Lösung nicht eindeutig. Jedes skalare Vielfache einer Lösung ist ebenfalls eine Lösung.

▼ **Ergänzung: Raumkurven.** Sind die drei Komponenten des Ortsvektors als Funktion eines skalaren Parameters gegeben, so definiert

$$\mathbf{r}(\lambda) = x(\lambda)\mathbf{e}_x + y(\lambda)\mathbf{e}_y + z(\lambda)\mathbf{e}_z \quad (2.40)$$

eine Raumkurve (Abb. 2.11). Wählt man einen Punkt dieser Raumkurve aus und misst von diesem Punkt aus die Länge der Raumkurve, d.h. die **Bogenlänge** s , so gelangt man zu einer

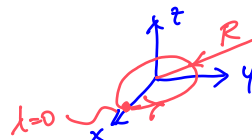
Raumkurven:

$$\underline{\mathbf{r}}(\lambda) = x(\lambda)\mathbf{e}_x + y(\lambda)\mathbf{e}_y + z(\lambda)\mathbf{e}_z$$

allg. Form einer Raumkurve

Beispiele: • Linearität in $\lambda \rightarrow$ Geradengleichung

• Kreis: $\underline{\mathbf{r}}(\lambda) = R \cos(\varphi(\lambda))\mathbf{e}_x + R \sin(\varphi(\lambda))\mathbf{e}_y$
 $\varphi = \lambda$



• Spirale: $\underline{\mathbf{r}}(\lambda) = R \cos(\varphi(\lambda))\mathbf{e}_x + R \sin(\varphi(\lambda))\mathbf{e}_y + z(\lambda)\mathbf{e}_z$
 $z(\lambda) = z_0 + \lambda$



Bogenlängendarstellung

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e}_x + y(s)\mathbf{e}_y + z(s)\mathbf{e}_z \quad (2.41)$$

einer Raumkurve. Die Ableitung der Bogenlängendarstellung $\mathbf{r}(s)$ nach s ergibt den **Tangenteneinheitsvektor**

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{r}'(s) = \mathbf{e}_T(s) \quad (2.42)$$

der Raumkurve an der Stelle s (Abb. 2.12).

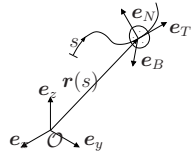


Abb. 2.11: Begleitendes Dreiein

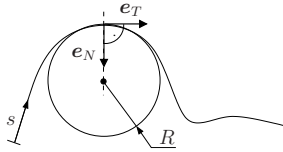


Abb. 2.12: Krümmungsradius

▼ **Ergänzung: Krümmung und Torsion.** Die Ableitung des Tangentenvektors nach der Bogenlänge kann man folgendermaßen darstellen

$$\frac{d\mathbf{e}_T(s)}{ds} = \kappa \mathbf{e}_N(s) = \frac{1}{R} \mathbf{e}_N(s). \quad (2.43)$$

Wegen $(\mathbf{e}_T(s) \cdot \mathbf{e}_T(s))' = 0$ gilt $\mathbf{e}_T(s) \cdot \mathbf{e}_N(s) = 0$. Der Normaleneinheitsvektor $\mathbf{e}_N(s)$ weist zum **Krümmungsmittelpunkt** der Raumkurve im Punkt s (Abb. 2.12). Der Betrag κ der Ableitung des Tangentenvektors heißt **Krümmung** der Raumkurve. Der Kehrwert der Krümmung ist der **Krümmungsradius** R .

Der Vektor

$$\mathbf{e}_B(s) = \mathbf{e}_T(s) \times \mathbf{e}_N(s) \quad (2.44)$$

heißt **Binormalenvektor**. Die drei Vektoren $\{\mathbf{e}_T, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_B\}$ bilden ein **begleitendes Dreiein** der Raumkurve. Als **Torsion** oder **Windung** ς einer Raumkurve bezeichnet man den Anteil von $\mathbf{e}_N'(s)$ in Richtung $\mathbf{e}_B$

$$\varsigma = \frac{d\mathbf{e}_N(s)}{ds} \cdot \mathbf{e}_B(s). \quad (2.45)$$

Die Windung ebener Raumkurven ist null. Beachtet man $\mathbf{e}_N' \cdot \mathbf{e}_T = -\mathbf{e}_N \cdot \mathbf{e}_T' = -\kappa = -1/R$

und $e'_N \cdot e_B = \varsigma$, so folgt $e_N(s)' = -\kappa e_T(s) + \varsigma e_B(s)$. Auf ähnliche Weise zeigt man $e_B(s)' = -\varsigma e_N(s)$. Die drei Gleichungen

$$\frac{de_T(s)}{ds} = \kappa e_N(s), \quad \frac{de_N(s)}{ds} = -\kappa e_T(s) + \varsigma e_B(s), \quad \frac{de_B(s)}{ds} = -\varsigma e_N(s) \quad (2.46)$$

heißen **Frenet'sche Formeln**. Für gegebene Funktionen $\kappa(s)$ und $\varsigma(s)$ stellen diese Formeln ein **Differentialgleichungssystem** zur Bestimmung des begleitenden Dreieins dar. Die Geradengleichung ist ein Sonderfall der Raumkurve.

►**Beispiel: Raumkurven.** Spezifizieren Sie die Komponenten $\{x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\}$ des Ortsvektors

$$\mathbf{r}(\lambda) = x(\lambda)\mathbf{e}_x + y(\lambda)\mathbf{e}_y + z(\lambda)\mathbf{e}_z \quad (2.47)$$

so, dass ein Kreis, eine ebene Spirale und eine räumliche Spirale beschrieben werden.

Einen **Kreis** erhält man für

$$x(\lambda) = R_0 \cos(2\pi\lambda), \quad y(\lambda) = R_0 \sin(2\pi\lambda), \quad z(\lambda) = 0. \quad (2.48)$$

Der Tangenteneinheitsvektor und der Normaleneinheitsvektor liegen in der x - y -Ebene. Der Binormalenvektor weist in z -Richtung. Die Krümmung ist konstant und gleich $1/R_0$. Die Windung ist null, da Normaleneinheitsvektor für alle λ in der x - y -Ebene liegt.

Durch die Modifikation $R_0 \rightarrow R_0\lambda$ gelangt zur Parametrisierung einer **ebenen Spirale**

$$x(\lambda) = R_0\lambda \cos(2\pi\lambda), \quad y(\lambda) = R_0\lambda \sin(2\pi\lambda), \quad z(\lambda) = 0. \quad (2.49)$$

Krümmung ist variabel und hängt von λ ab. Die Windung ist wie beim Kreis null.

Eine **räumliche Spirale** wird beispielsweise durch

$$x(\lambda) = R_0\lambda \cos(2\pi\lambda), \quad y(\lambda) = R_0\lambda \sin(2\pi\lambda), \quad z(\lambda) = H_0\lambda \quad (2.50)$$

beschrieben. In diesem Fall sind sowohl die Krümmung als auch die Torsion von λ abhängig.

▼ **Ergänzung: Geschwindigkeit und Beschleunigung.** Wählt man zur Parametrisierung des Ortsvektors eines Punktes P die Zeit t , d.h.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z, \quad (2.51)$$

so ergibt dessen Ableitung nach der Zeit den **Geschwindigkeitsvektor**

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{e}_x + v_y(t)\mathbf{e}_y + v_z(t)\mathbf{e}_z. \quad (2.52)$$

Die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit ergibt den **Beschleunigungsvektor**

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{e}_x + a_y(t)\mathbf{e}_y + a_z(t)\mathbf{e}_z. \quad (2.53)$$

Als **Verschiebungsvektor** eines Punktes P bezeichnet man die Differenz der Ortsvektoren

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0). \quad (2.54)$$

Unter Verwendung des Verschiebungsvektors haben der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor folgende Darstellungen: $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$, $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{u}}(t)$. Der Geschwindigkeitsvektor liegt tangential zur Raumkurve des Punktes P und hat deshalb die alternative Darstellung $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{e}_T(t)$ mit der **Bahngeschwindigkeit** $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ und dem im Allgemeinen ebenfalls zeitabhängigen Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{e}_T$. Leitet man diesen Ausdruck für die Geschwindigkeit nach der Zeit ab, so folgt unter Beachtung von $\dot{\mathbf{e}}_T = \mathbf{e}'_T \dot{s} = v/R \mathbf{e}_N$ eine alternative Darstellung der Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{e}_T(t) + v^2(t)/R(t)\mathbf{e}_N(t)$. Die Beschleunigung hat keinen Anteil in Binormalenrichtung.

Bewegung eines Punktes im Raum (3D)

Beschreibung durch Angabe eines Ortsvektor im Raum:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

t : Zeit Lage des Punktes als Funktion der Zeit

Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{\mathbf{v}}(t) := \frac{d\underline{\mathbf{r}}(t)}{dt} := \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = v_x(t)\mathbf{e}_x + v_y(t)\mathbf{e}_y + v_z(t)\mathbf{e}_z$$

Beschleunigungsvektor

$$\underline{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\underline{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d^2\underline{\mathbf{r}}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{e}_x + \dots$$

Kapitel 3

Kraftsysteme

3.1 Kraft und Drehmoment

Einzelkraft. Der Begriff der **Kraft** ist für die Mechanik von elementarer Bedeutung. Beispiele für Einzelkräfte sind die **Gewichtskraft** eines Körpers im Schwerfeld der Erde oder die Auftriebskraft eines Körpers in einer Flüssigkeit. Eine **Einzelkraft** ist durch Betrag, Richtung und Richtungssinn gekennzeichnet und kann deshalb durch einen Vektor dargestellt werden. Zur vollständigen Kennzeichnung einer Einzelkraft ist neben dem Kraftvektor

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z \quad (3.1)$$

der Ortsvektor des **Angriffspunktes** der Kraft

$$\underline{r} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z \quad (3.2)$$

anzugeben (Abb. 3.1).

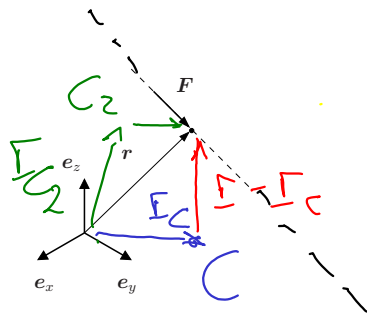


Abb. 3.1: Kraftvektor $\underline{F}$

Die **Dimension** der Kraft ist gleich $M \times L/T^2$ (M: Masse, L: Länge, T: Zeit). Die **Einheit**

Einzelkraft : $\{ \underline{r}, \underline{F} \}$
Einzelkraft

$\underline{r}$: Ortsvektor des Angriffspunktes
 Dimension: Länge

$\underline{F}$: Kraftvektor
 Dimension: $\frac{ML}{T^2}$

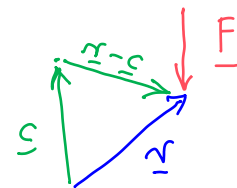
Einzelmoment :

$$1N = \frac{kgm}{s^2}$$

$\{ \underline{r}, \underline{F} \}$ + Bezugspunkt $\underline{c}$
Einzelkraft

$$\underline{M}_c = (\underline{r} - \underline{r}_c) \times \underline{F}$$

Drehmomentenvektor der Einzelkraft $\{ \underline{r}, \underline{F} \}$ bez. Punkt $\underline{c}$.



Gesucht 3.1 und 3.2

$$\text{Dimension } \underline{M}_c \sim \frac{ML^2}{T^2}$$

typ Einheit: 1 Nm

Richtungssinn von $\underline{M}_c$: $\{ \underline{r} - \underline{r}_c, \underline{F}, \underline{M}_c \}$
 bilden Rechtssystem

h

der Kraft ist N (Newton):

$$1 \cdot \text{N} = 1 \cdot \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}. \quad (3.3)$$

Die Gerade

$$\mathbf{r}_W(\lambda) = \mathbf{r} + \lambda \mathbf{e}_F, \quad \mathbf{e}_F = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

die durch den Angriffspunkt und den Kraftvektor bestimmt wird, heißt **Wirkungsgerade** oder **Wirkungslinie** der Kraft („m“ steht für die Einheit Meter). Die Richtung der Kraft $\mathbf{F}$ wird durch den dimensionslosen **Richtungsvektor** $\mathbf{e}_F$ bestimmt.

► **Beispiel: Zur Einheit N.** Um eine Vorstellung von der Größenordnung eines **Newtons** zu bekommen, kann man die Gewichtskraft betrachten. Die Gewichtskraft G eines Körpers ist durch $G = mg$ gegeben. m ist die Masse des Körpers. $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ ist die Erdbeschleunigung. Der Masse eines Kilogramms entspricht eine Gewichtskraft von ca. 10N.

Drehmoment. Jeder Einzelkraft $\mathbf{F}$ mit dem Angriffspunkt $\mathbf{r}$ lässt sich ein Drehmoment oder **Moment** bezüglich Punkt C

$$\mathbf{M}_C = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F} \quad (3.5)$$

zuordnen (Abb. 3.2). Man spricht von einem **Einzelmoment** der Einzelkraft $\mathbf{F}$ bezüglich Punkt C . Der Vektor $\mathbf{c}$ ist der Ortsvektor des Punktes C . Die Komponenten von $\mathbf{M}_C$ haben bei Verwendung von $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$ folgende Form

$$\mathbf{M}_C = \begin{pmatrix} \Delta r_y F_z - \Delta r_z F_y \\ \Delta r_z F_x - \Delta r_x F_z \\ \Delta r_x F_y - \Delta r_y F_x \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Die Dimension von $\mathbf{M}_C$ ist $\text{M} \times \text{L}^2/\text{T}^2$. Die Einheit des Momentenvektors ist N m

$$1 \cdot \text{N m} = 1 \cdot \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}. \quad (3.7)$$

Der Vektor $\mathbf{M}_C$ steht senkrecht auf den Vektoren $\mathbf{r} - \mathbf{c}$ und $\mathbf{F}$. Die Vektoren $\{\mathbf{r} - \mathbf{c}, \mathbf{F}, \mathbf{M}_C\}$ bilden ein Rechtssystem.

Jede Kraft $\mathbf{F}$ kann in einen Anteil $\mathbf{F}_{\parallel}$ parallel zu $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$ und einen Anteil $\mathbf{F}_{\perp}$ senkrecht zu $\Delta \mathbf{r}$ zerlegt werden

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}, \quad \mathbf{F}_{\parallel} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{F})\mathbf{e}, \quad \mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\parallel}, \quad (3.8)$$

Notation

→ Vektor (Kraft, ...)

2. Rechte-Hand-Regel:

↻ Moment
Drehrichtung

Momentenberechnung

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= (\underbrace{\mathbf{r} - \mathbf{c}}_{\Delta \mathbf{r}}) \times \mathbf{F} = (\Delta \mathbf{r}_{\parallel} + \Delta \mathbf{r}_{\perp}) \times \mathbf{F} \\ &= \underbrace{\Delta \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{F}}_{=0} + \underbrace{\Delta \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}} \end{aligned}$$

Analog

$$\mathbf{M}_C = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_{\perp}$$

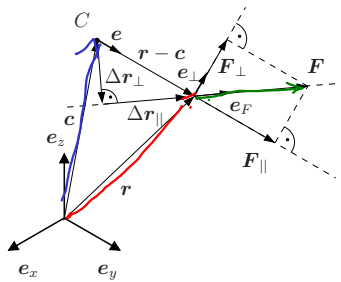


Abb. 3.2: Moment einer Kraft

wobei $e = \Delta \mathbf{r} / |\Delta \mathbf{r}|$ der Richtungsvektor ist, der vom Bezugspunkt zum Angriffspunkt der Kraft weist. Da in das Kreuzprodukt $(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}$ nur der Anteil $\mathbf{F}_\perp$ von $\mathbf{F}$ eingeht, kann der Momentenvektor auch folgendermaßen notiert werden (Abb. 3.2)

$$\mathbf{M}_C = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_\perp. \quad (3.9)$$

Zerlegt man alternativ den Vektor $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$ in einen Anteil senkrecht und parallel zur Kraft $\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \mathbf{e}_F$

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_\parallel + \Delta \mathbf{r}_\perp, \quad \Delta \mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{e}_F \cdot \Delta \mathbf{r}) \mathbf{e}_F, \quad \Delta \mathbf{r}_\perp = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}_\parallel, \quad (3.10)$$

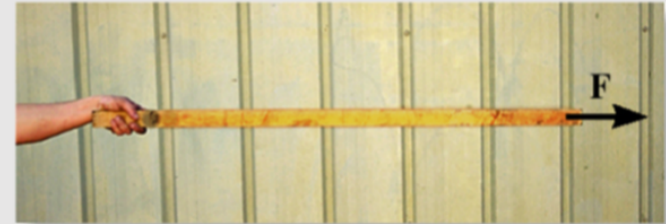
dann folgt für den Drehmomentenvektor

$$\mathbf{M}_C = (\mathbf{r} - \mathbf{c})_\perp \times \mathbf{F}. \quad (3.11)$$

► **Beispiel: Zur Einheit Nm.** Um eine Anschauung von der Größenordnung eines Newtonmeter zu bekommen, kann wiederum die Gewichtskraft herangezogen werden. Der Masse eines Kilogramms entspricht eine **Gewichtskraft von ca. 10 N**. Erzeugt diese Gewichtskraft ein Drehmoment mit einem **Hebelarm der Länge 1m**, dann hat dieses Moment einen Betrag von ca. **10 Nm**.

► **Beispiel: Zur Interpretation von $\mathbf{M}_C = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}$.** Gegeben sind die Kraft $\mathbf{F} = 1\text{N} \mathbf{e}_x + 2\text{N} \mathbf{e}_y$ mit dem Angriffspunkt $\mathbf{r} = 3\text{m} \mathbf{e}_x + 2\text{m} \mathbf{e}_y$ sowie der Bezugspunkt $\mathbf{c} = 1\text{m} \mathbf{e}_x + 1\text{m} \mathbf{e}_y$. Berechnen Sie das Moment bezüglich des Punktes C (siehe Abb. 3.2).

Zunächst berechnen wir $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{c} = 2\text{m} \mathbf{e}_x + 1\text{m} \mathbf{e}_y$. Für das Moment folgt durch Berechnung des Kreuzprodukts $\mathbf{M}_C = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F} = 3\text{Nm} \mathbf{e}_z$. Würde man das Drehmoment nach der "Formel" Moment gleich "Kraft mal Hebelarm" berechnen, so könnte man folgendermaßen vorgehen: Der Abstand von Kraftangriffspunkt und Bezugspunkt ist $|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = \sqrt{5}\text{m}$. Ein Einheitsvektor $\mathbf{e}_\perp$, der senkrecht auf $\mathbf{r} - \mathbf{c}$ steht, ist



Hibbeler: Technische Mechanik 1 –
Statik, Pearson Studium 2005

Bsp bitte nachrechnen

durch $e_{\perp} = (-e_x + 2e_y)/\sqrt{5}$ gegeben. Von der Kraft geht nur der Anteil $F_{\perp}$ von F in Richtung e in die Berechnung ein. Dieser kann durch Projektion von F auf die Richtung $e_{\perp}$ berechnet werden: $|F_{\perp}| = |F \cdot e_{\perp}| = 3/\sqrt{5}N$. Das Produkt von Kraft und Hebelarm ist also: $|M_C| = |\Delta r||F_{\perp}| = \sqrt{5}m \cdot 3/\sqrt{5}N = 3Nm$. Man sieht, dass die erste Rechnung basierend auf dem Kreuzprodukt deutlich kürzer ist. Äquivalent hätte man den minimalen Abstand der Wirkungslinie der Kraft zum Bezugspunkt mit dem Betrag von F zur Berechnung von M_C multiplizieren können. Dieser Abstand beträgt $3\sqrt{5}/5m$, so dass gilt $|M_C| = |\Delta r_{\perp}||F| = 3\sqrt{5}/5m \cdot \sqrt{5}N = 3Nm$.

3.2 Kraftsysteme

Kraftsystem und resultierende Kraft. Ein Satz von n Kräften $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ mit den Angriffspunkten $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ heißt Kraftsystem und wird im Folgenden zusammenfassend mittels

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n; r_1, r_2, \dots, r_n\} = \{F_i; r_i\} \quad (3.12)$$

notiert, wobei der Einfachheit halber der Wertebereich ($i = 1 \dots n$) in der Regel nicht mit notiert wird. Jedem Kraftsystem kann die **resultierende Kraft**

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3.13)$$

zugeordnet werden.

Resultierendes Moment. Jedem Kraftsystem $\{F_i; r_i\}$ kann ein **resultierendes Moment** bezüglich Punkt C

$$M_C = \sum_{i=1}^n (r_i - c) \times F_i \quad (3.14)$$

zugeordnet werden. Man sieht, dass das resultierende Moment sowohl von den Angriffspunkten der Einzelkräfte als auch vom gewählten **Bezugspunkt** abhängt. Die Berechnung der resultierenden Kraft und des resultierenden Moments nennt man **Reduktion eines Kraftsystems**.

Es stellt sich die Frage, wie man bei einer Änderung des Bezugspunktes von $c = c_1$ nach c_2 das resultierende Moment M_{C_2} aus M_{C_1} berechnen kann. Dazu bildet man die Differenz der beiden Momente M_{C_2} und M_{C_1}

$$M_{C_2} - M_{C_1} = \sum_{i=1}^n ((r_i - c_2) - (r_i - c_1)) \times F_i = \sum_{i=1}^n (c_1 - c_2) \times F_i, \quad (3.15)$$

Kraftsystem: $\{F_1, \dots, F_n; r_1, \dots, r_n\}$
aus N Einzelkräften

Resultierende Kraft

$$F_R = \sum_{i=1}^N F_i$$

Resultierendes Moment

$$M_{R,C} = \sum_{i=1}^N (r_i - c) \times F_i$$

gemeinsamer Bezugspunkt

Reduktion eines Kraftsystems

Berechnung von F_R und $M_{R,C}$

woraus

$$M_{C_2} = M_{C_1} + (c_1 - c_2) \times F \quad F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3.16)$$

folgt. Das resultierende Moment bezüglich eines anderen Bezugspunktes kann also auf einfache Weise berechnet werden.

Äquivalenz von Kraftsystemen. Für statische Untersuchungen ist der Begriff der Äquivalenz von Kraftsystemen von grundsätzlicher Bedeutung. Zwei Kraftsysteme $\{F_i; r_i\}$ und $\{F_i^*; r_i^*\}$ heißen äquivalent, wenn die zugehörigen resultierenden Kräfte und Momente gleich sind, also

$$F = F^*, \quad M_C = M_C^* \quad (3.17)$$

mit

$$F = \sum_{i=1}^n F_i, \quad F^* = \sum_{i=1}^{n^*} F_i^* \quad (3.18)$$

und

$$M_C = \sum_{i=1}^n (r_i - c) \times F_i, \quad M_C^* = \sum_{i=1}^{n^*} (r_i^* - c) \times F_i^* \quad (3.19)$$

gilt. Es bleibt zu prüfen, ob der Begriff der Äquivalenz von der speziellen Wahl des Bezugspunktes abhängt. Es lässt sich zeigen, dass der Äquivalenzbegriff unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes ist. Fordert man zunächst nur, dass $M_{C_1} = M_{C_1}^*$ gilt, so ergibt sich aus Gleichung (3.16) wegen $F = F^*$ unmittelbar $M_{C_2} = M_{C_2}^*$.

Versetzungsmoment. Verschiebt man die Angriffspunkte eines Kraftsystems auf den Wirkungslinien der zugehörigen Kraftvektoren, so erhält man ein äquivalentes Kraftsystem. Für Verschiebungen quer zur Wirkungslinie erhält man im Allgemeinen kein äquivalentes Kraftsystem.

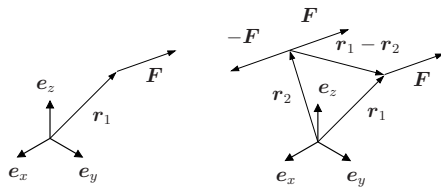


Abb. 3.3: Versetzungsmoment

Verschiebt man eine Kraft des Kraftsystems quer zur Wirkungslinie, so muss man, um ein äquivalentes Kraftsystem zu erhalten, ein Versetzungsmoment einführen. Das kann an dem einfachen Kraftsystem $\{F; r_1\}$ veranschaulicht werden. Soll die Kraft F

Änderung des Moments bei Änderung des Bezugspunktes

c_1, c_2

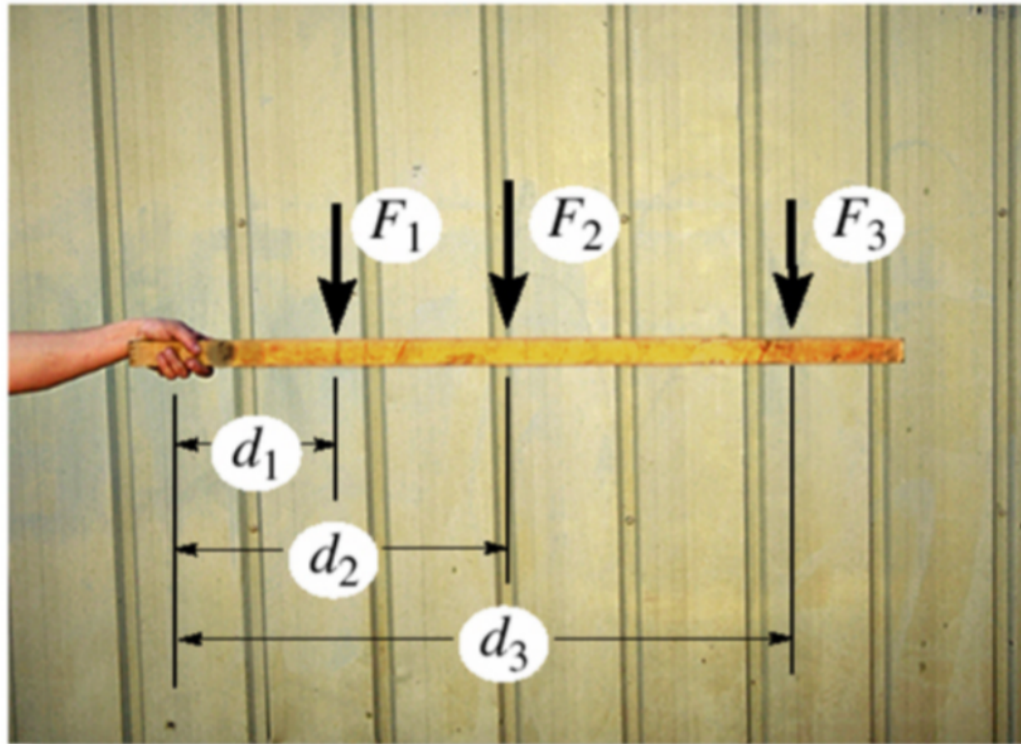
$$M_{R, c_1} = \sum_{i=1}^N (r_i - c_1) \times F_i$$

$$M_{R, c_2} = \sum_{i=1}^N (r_i - c_2) \times F_i$$

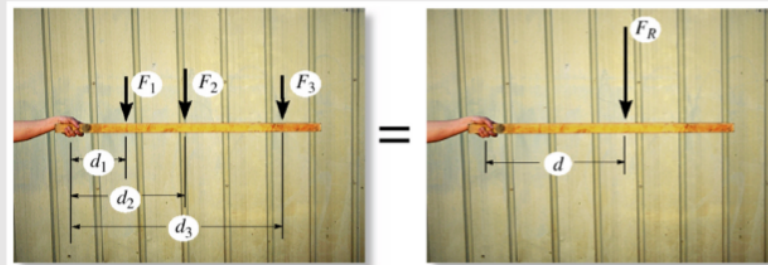
$$\Rightarrow M_{R, c_2} - M_{R, c_1} = c_1 \times \sum_{i=1}^N F_i - c_2 \times \sum_{i=1}^N F_i = (c_1 - c_2) \times F_R$$

Äquivalenz von Kraftsystemen.

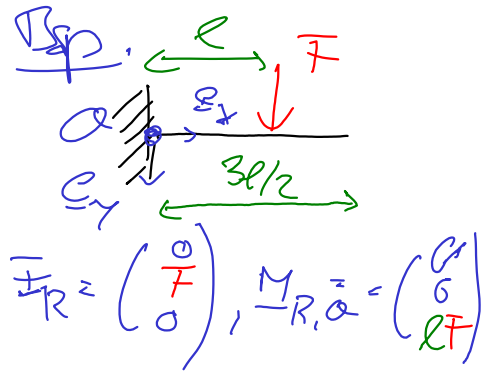
Kraftsysteme mit gleichen Größen $F_R, M_{R, c}$ heißen äquivalent



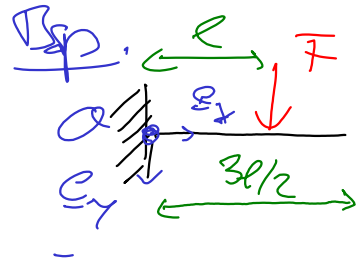
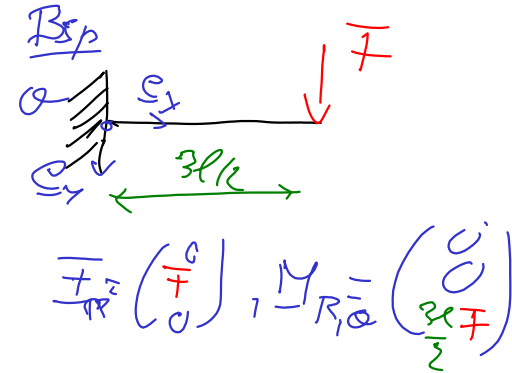
Hibbeler: Technische Mechanik 1 –
Statik, Pearson Studium 2005



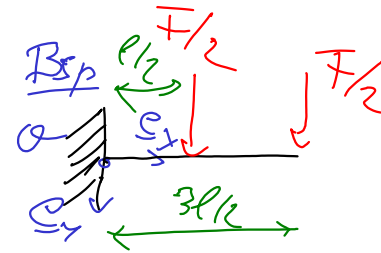
Hibbeler: Technische Mechanik 1 –
Statik, Pearson Studium 2005



nicht
äquivalent



äquivalent



$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}, M_{RC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ lF \end{pmatrix}$

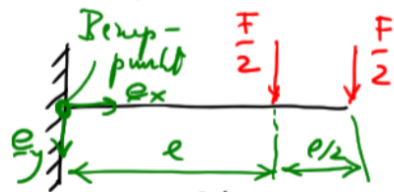
$(le_x) \times (F e_y) = lF (e_x \times e_y) = lF e_z$

Beispiel 1: zwei nicht-äquivalente Kraftsysteme



$$\underline{F}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_{R0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Fe \end{pmatrix}$$

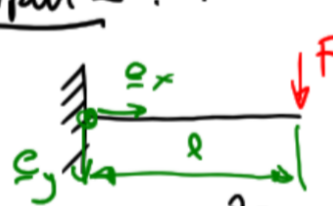


$$\underline{F}_R^* = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_{R0}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4}Fe \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ wg $\underline{M}_{R0} \neq \underline{M}_{R0}^*$ sind beide Systeme nicht äquivalent

Beispiel 2: zwei äquivalente Kraftsysteme



$$\underline{F}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_{R0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Fe \end{pmatrix}$$



$$\underline{F}_R^* = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_{R0}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Fe \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ beide Systeme sind äquivalent

Aum: Äquivalenz unabhängig von gewähltem Bezugspunkt!

KS: $\underline{F}_R, \underline{M}_{RC1}$
Kraftsystem

KS* $\underline{F}_R^*, \underline{M}_{RC1}^*$



Äquivalenz:

$$\underline{F}_R = \underline{F}_R^*$$

unabh. von $\underline{C}$

$$\underline{M}_{RC1} = \underline{M}_{RC1}^*$$

?

$\underline{M}_{RC2}$

$$? = \underline{M}_{RC2}^*$$

$$? = \underline{M}_{RC1}^* + \underbrace{(C_1 - C_2) \times \underline{F}_R^*}_{\underline{F}_R}$$

so.

$$\underline{M}_{RC1} + (C_1 - C_2) \times \underline{F}_R$$

$$\underline{M}_{RC2} = \underline{M}_{RC2}^*$$

in den Punkt r_2 verschoben werden, so kann im Sinne der Äquivalenz beispielsweise das Kraftsystem $\{-F, F; r_2, r_2\}$ ergänzt werden (Abb. 3.3). Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Kraftsysteme $\{F; r_1\}$ und $\{F, -F, F; r_1, r_2, r_2\}$ äquivalent sind. Das durch $\{F, -F; r_1, r_2\}$ induzierte Moment M_V heißt Versetzungsmoment. Für M_V bezüglich O gilt $M_{V0} = r_1 \times F - r_2 \times F$, also

$$M_{V0} = (r_1 - r_2) \times F. \quad (3.20)$$

3.3 Spezielle Kraftsysteme

Ebenes Kraftsystem. Ein ebenes Kraftsystem liegt vor, wenn alle Angriffspunkte der Kräfte und die Kraftvektoren in ein und derselben Ebene liegen. Stimmt diese Ebene mit der e_x - e_y -Ebene überein, so haben die Kraftvektoren und deren Angriffspunkte die Darstellung

$$F_i = F_{ix}e_x + F_{iy}e_y, \quad r_i = x_i e_x + y_i e_y. \quad (3.21)$$

Man kann die Berechnung der resultierenden Kraft also in einem zweidimensionalen Raum durchführen. Es ist aber zu beachten, dass das resultierende Moment die Richtung e_z hat, sofern es nicht null ist.

Zentrales Kraftsystem. Ein zentrales Kraftsystem ist dann gegeben, wenn alle Angriffspunkte der Einzelkräfte identisch sind ($r_i = r$) oder allgemeiner wenn ein äquivalentes Kraftsystem gefunden werden kann, bei dem alle Angriffspunkte identisch sind. In diesem Fall, schneiden sich alle Wirkungslinien der Einzelkräfte in einem Punkt. Für ein zentrales Kraftsystem kann das resultierende Moment auf einfache Weise aus der resultierenden Kraft berechnet werden

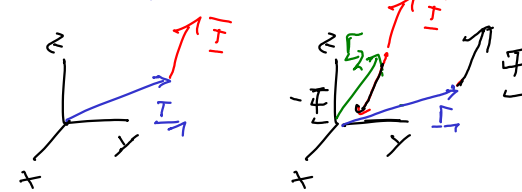
$$M_C = \sum_{i=1}^n (r_i - c) \times F_i = \sum_{i=1}^n (r - c) \times F_i = (r - c) \times F. \quad (3.22)$$

Kräftepaar. Von einem Kräftepaar spricht man dann, wenn das Kraftsystem aus zwei Einzelkräften mit verschiedenen Angriffspunkten besteht, und außerdem gilt: $F_2 = -F_1$. Die resultierende Kraft eines Kräftepaares ist null. Für ein Kräftepaar kann das resultierende Moment leicht aus dem vektoriellen Abstand der beiden Kraftangriffspunkte berechnet werden:

$$M_C = \sum_{i=1}^2 (r_i - c) \times F_i = (r_1 - r_2) \times F_1. \quad (3.23)$$

Man sieht, dass für ein Kräftepaar das resultierende Moment unabhängig vom Bezugspunkt ist. Man nennt es deshalb auch freies Moment.

Versetzungsmoment



altes System

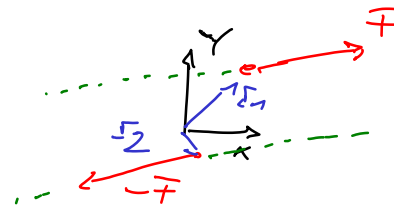
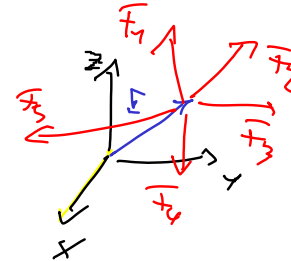
Kräftepaar addiert

$$M_{R,O} = r_1 \times F$$

$$M_{R,O} = r_1 \times F + r_2 \times F + r_2 \times (-F)$$

$$= r_2 \times F + M_V$$

Versetzungsmoment $M_V = (r_1 - r_2) \times F$



$$F_0 = F + (-F) = 0$$

$$M_{R,O} = r_1 \times F + r_2 \times (-F)$$

$$= (r_1 - r_2) \times F$$

Zusammenfassung:

Einzelkraft: $\{\underline{r}, \underline{F}\}$

Einzelmoment: $\underline{r}, \underline{c}, \underline{F} : \underline{M}_c = (\underline{r} - \underline{c}) \times \underline{F}$

Kraftsystem: $(KS) \quad \{\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N; \underline{F}_1, \dots, \underline{F}_N\}$

Reduktion eines KS:

$$\underline{F} = \underline{F}_R = \sum_{\alpha=1}^N \underline{F}_\alpha \quad \text{resultierende Kraft}$$

KS u. Bezugspunkt

$$\underline{c} \quad \underline{M}_c = \underline{M}_{cR} = \sum_{\alpha=1}^N (\underline{r}_\alpha - \underline{c}) \times \underline{F}_\alpha \quad \text{resultierendes Moment}$$

Äquivalenz von KSe:

$$\underline{F}_R = \underline{F}_R^*$$

$$\underline{M}_{cR} = \underline{M}_{cR}^*$$

3.4 Volumen-, Flächen- und Linienkraftdichten

Volumenkraftdichten. In Natur und Technik sind volumen- und flächenverteilte Kräfte die Regel und der Begriff der **Einzelkraft** entspricht einer Idealisierung. Volumen-, flächen- und linienverteilten Kräften lassen sich aber durch Integration resultierende Kräfte zuordnen. Die durch die Gravitation in jedem materiellen Körper auf der Erde hervorgerufene Massenkraftdichte hat beispielsweise als Resultierende die Gewichtskraft.

Von einer **Volumenkraftdichte** $\underline{f}_V$ spricht man dann, wenn eine Kraft pro Volumeneinheit gegeben ist (Abb. 3.4)

$$\underline{f}_V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta V}. \quad (3.24)$$

ΔV ist ein Volumenelement des Körpers. Ein Beispiel für eine Volumenkraftdichte ist das (volumen-)spezifische Gewicht ϱg mit der Massendichte ϱ und der Erdbeschleunigung g . Beide Größen werden später noch eingehend behandelt. Die aus der im Allgemeinen ortsabhängigen Volumenkraftdichte $\underline{f}_V(\underline{r})$ **resultierende Kraft** berechnet sich durch Integration über das Volumen

$$\underline{F} = \int_V \underline{f}_V(\underline{r}) dV. \quad (3.25)$$

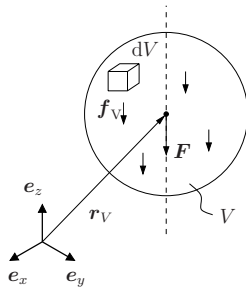


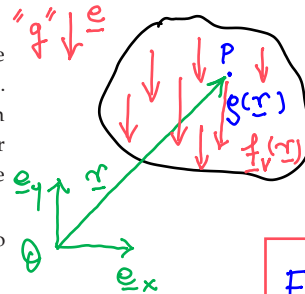
Abb. 3.4: Volumenkraftdichte

Die resultierende Kraft des spezifischen Gewichts ist die Gewichtskraft des Körpers. Die Auswertung des Integrals wird besonders einfach, wenn nur der Betrag von $\underline{f}_V$ vom Ort abhängt, die Richtung von $\underline{f}_V$ aber ortsunabhängig ist: $\underline{f}_V = f_V(\underline{r})\underline{e}$. Für die resultierende Kraft gilt dann

$$\underline{F} = F\underline{e}, \quad F = \int_V f_V(\underline{r}) dV. \quad (3.26)$$

Volumenkraftdichten

Beispiel: Schwerkraftwirkung



ϱ : Massendichte, ortsabhängig $\varrho = \varrho(\underline{r})$

$\underline{f}_V$: Volumenkraftdichte Kraft pro Volumeneinheit
Volumenelement $dV = dx dy dz$

$$\underline{F}_R = \int_V \underline{f}_V(\underline{r}) dV$$

$$\underline{F}_R = F_{Rx}\underline{e}_x + F_{Ry}\underline{e}_y + \dots = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}_V = f_{Vx}\underline{e}_x + f_{Vy}\underline{e}_y + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{z.B. } F_{Rx} &= \int_V f_{Vx} dV \\ F_{Ry} &= \int_V f_{Vy} dV \\ \text{u.w.} \end{aligned}$$

(g : konst. $9,81 \frac{m}{s^2}$)

Beispiel: Gewichtskraft: $\underline{f}_V = \varrho g \underline{e}$ konst.

$$\underline{G} = \int_V \underline{f}_V dV = \int_V \varrho g \underline{e} dV = \int_V \varrho g dV \underline{e} = \int_V \varrho dV g \underline{e}$$

$$m = \int_V \varrho dV : \text{Masse}$$

$$= m g \underline{e}$$

$$= G \underline{e} \quad G = |G|$$

$$G = m g = \varrho \cdot V g$$

$$\underline{G} = \int_V \varrho g dV = \int g dm = \int g \underline{e} dm$$

g : Massenkraftdichte

$g = \varrho g$: Massenkraftdichte

$$\underline{M}_{RC} = \int_V (\underline{r} - \underline{c}) \times \underline{f}_V(\underline{r}) dV$$

Ist auch der Betrag der Kraftdichte konstant, so folgt: $F = f_V V$. Beim spezifischen Gewicht ist das genau dann im erdnahen Schwerfeld der Fall, wenn der Körper eine konstante Massendichte ϱ_0 besitzt. In diesem Fall ergibt sich für die Gewichtskraft $G = F = \varrho_0 g V = mg$ mit der Masse m des Körpers. Auf Volumenkraftdichten wird in dem den Massenmittelpunkt behandelnden Kapitel genauer eingegangen.

Das resultierende Moment einer Volumenkraftdichte bezüglich Punkt C wird mit der Formel

$$\mathbf{M}_C = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_V(\mathbf{r}) dV \quad (3.27)$$

berechnet. Diese Formel kann so interpretiert werden, dass die Momente pro Volumeneinheit $(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_V(\mathbf{r})$ zum resultierenden Moment $\mathbf{M}_C$ aufsummiert werden.

Flächenkraftdichte. Eine Flächenkraftdichte $\mathbf{f}_A$ liegt dann vor, wenn eine Kraft pro Flächeneinheit gegeben ist (Abb. 3.5)

$$\mathbf{f}_A = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \quad (3.28)$$

ΔA ist ein Flächenelement des Körpers. Flächenkraftdichten werden oft auch als Druck, Spannung oder **Flächenlast** bezeichnet. Flächenlasten treten in vielen technischen Fragestellungen auf. Man denke beispielsweise an Schneelasten auf Baukonstruktionen oder den **Druck**, den eine Wassersäule auf ihre Unterlage ausübt. Die resultierende Kraft und das resultierende Moment einer im Allgemeinen ortsabhängigen Flächenkraftdichte $\mathbf{f}_A(\mathbf{r})$ berechnen sich durch Integration über die Fläche, auf der die Last angreift

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{f}_A(\mathbf{r}) dA, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{M}_C = \int_A (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_A(\mathbf{r}) dA. \quad (3.30)$$

dA ist der Betrag des infinitesimalen Flächenelements. Die Auswertung des Integrals wird wieder besonders einfach, wenn nur der Betrag der Kraftdichte vom Ort abhängt, deren Richtung aber ortsunabhängig ist: $\mathbf{f}_A = f_A(\mathbf{r})\mathbf{e}$. Für die resultierende Kraft folgt dann

$$\mathbf{F} = F\mathbf{e}, \quad F = \int_A f_A(\mathbf{r}) dA. \quad (3.31)$$

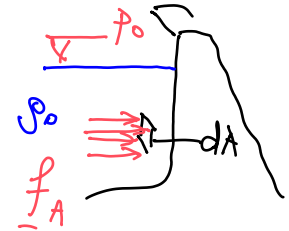
Ist auch der Betrag der Kraftdichte konstant, so folgt $F = f_A A$, bei einem konstanten Druck $p = f_A$ also $F = pA$. Auf Flächenkraftdichten wird im Rahmen der Elastostatik genauer eingegangen.

Flächenkraftdichten:

$\underline{f}_A(\underline{r})$: Kraft pro Flächeneinheit
 $dA \stackrel{\text{z.B.}}{=} dx dy$

$$\underline{F}_R = \int_A \underline{f}_A(\underline{r}) dA$$

$$\underline{M}_{RC} = \int_A (\underline{r} - \underline{c}) \times \underline{f}_A(\underline{r}) dA$$



$$F_{Rx} = \int_A f_{Ax}(\underline{r}) dA \quad \text{usw.}$$

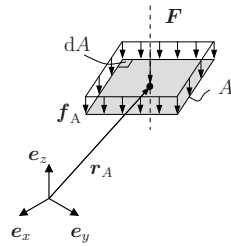


Abb. 3.5: Flächenkraftdichte

Zwei für die Kontinuumsmechanik außerordentlich wichtige Kraftdichten sind Normalspannungen und Schubspannungen. Bei **Normalspannungen** steht die Kraftdichte senkrecht auf der betrachteten Fläche, bei einer **Schubspannung** liegt sie in der Fläche (siehe Abb. 3.6). Normalspannungen werden in der Regel mit σ , Schubspannungen mit τ bezeichnet.

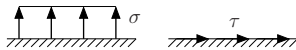


Abb. 3.6: Normalspannung (links), Schubspannung (rechts)

Ein Beispiel für eine Normalspannung ist der hydrostatische Spannungszustand oder kurz Druck. Spannungen die das Haften von Körpern verursachen sind ein Beispiel für Schubspannungen.

► **Beispiel: Luftdruck.** Der mittlere Luftdruck (Normalspannung) der Atmosphäre beträgt auf Meereshöhe ca. $p = 101325 \text{ Pa}$ oder äquivalent $1013,25 \text{ hPa}$ (Hektopascal), $1013,25 \text{ mbar}$ (Millibar) und $0,1013 \text{ MPa}$ (Megapascal). Die Tagesschwankungen betragen $0,5$ bis 1 hPa . Die resultierende Kraft des Luftdrucks auf einen Quadratmeter ist $F = pA = 101325 \text{ N}$. Diese Gewichtskraft entspricht einer Masse von 10 Tonnen im erdnahen Schwerfeld.

Linienkraftdichte. Von einer Linienkraftdichte f_L ist dann die Rede, wenn eine Kraft pro Längeneinheit gegeben ist (Abb. 3.7)

$$f_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta L}. \quad (3.32)$$

ΔL ist ein Linienelement des Körpers. Linienkraftdichten werden oft auch als **Streckenlasten** bezeichnet. Ein Beispiel für eine solche Streckenlast ist das Eigengewicht eines dünnen Seils, wenn man die Querschnittsabmessungen des Seils gegenüber dessen Längsabmessungen vernachlässigt.

Linien kraft dichte

$\underline{f}_L(\underline{r})$: Kraft pro Längeneinheit
 $dL = dx$

$$\underline{F}_K = \int_L \underline{f}_L(\underline{r}) dL$$

$$\underline{M}_{Kc} = \int_L (\underline{r} - \underline{c}) \times \underline{f}_L(\underline{r}) dL$$

Linienintegrale
 Flächenintegrale
 (2D)
 Volumenintegrale
 (3D)

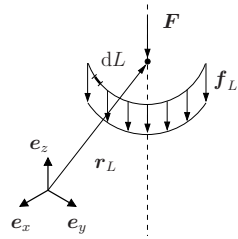


Abb. 3.7: Linienkraftdichte

Die resultierende Kraft und das resultierende Moment einer im Allgemeinen ortsabhängigen Linienkraftdichte $\mathbf{f}_L(\mathbf{r})$ berechnen sich durch Integration über die Länge der Raumkurve an der die Linienkraftdichte angreift

$$\mathbf{F} = \int_L \mathbf{f}_L(\mathbf{r}) dL, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{M}_C = \int_L (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_L(\mathbf{r}) dL. \quad (3.34)$$

dL ist der Betrag des infinitesimalen Linienelements. Die Auswertung des Integrals vereinfacht sich, wenn nur der Betrag der Kraftdichte vom Ort abhängt, deren Richtung aber ortsunabhängig ist: $\mathbf{f}_L = f_L(\mathbf{r})\mathbf{e}$. Für die resultierende Kraft folgt dann

$$\mathbf{F} = F\mathbf{e}, \quad F = \int_L f_L(\mathbf{r}) dL. \quad (3.35)$$

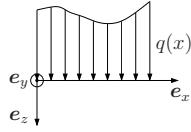
Ist auch der Betrag der Kraftdichte konstant, so gilt $F = f_L L$.

Im Rahmen der Statik starrer Körper ist insbesondere der Fall von Interesse, dass eine Streckenlast $\mathbf{q}$ mit der Richtung $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$ als Funktion der kartesischen Koordinate x gegeben ist ($\mathbf{q} = q(x)\mathbf{e}_z$) und entlang eines endlichen Bereiches der x -Achse angreift (Abb. 3.8). Für die resultierende Kraft gilt in diesem Fall

$$\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z, \quad F = \int_x q(x) dx. \quad (3.36)$$

Analog zu den Kraftdichten lassen sich **Momentendichten** einführen. Bedeutung haben insbesondere Momentendichten $\mathbf{m} = \mathbf{m}_L$, die entlang einer Raumkurve gegeben sind. Das zugehörige resultierende Moment, das bezugspunktunabhängig ist, ergibt sich durch Integration von $\mathbf{m}$ entlang der Raumkurve

$$\mathbf{M} = \int_L \mathbf{m}_L(\mathbf{r}) dL. \quad (3.37)$$

Abb. 3.8: Streckenlast in e_z -Richtung

Wirkungslinien der Resultierenden von Kraftdichten. Wie die Resultierenden von Kraftdichten berechnet werden können, wurde in den letzten Abschnitten diskutiert. Es stellt sich die Frage, ob sich diesen Resultierenden eindeutig ein Angriffspunkt zuordnen lässt. Die resultierende Kraft und der zugehörige Angriffspunkt sollten ein zur Kraftdichte äquivalentes Kraftsystem bilden. Auf Grund des Umstandes, dass man für jede Verschiebung einer Einzelkraft eines Kraftsystems entlang ihrer Wirkungslinie wiederum ein äquivalentes Kraftsystem erhält, kann bestenfalls die Wirkungslinie der Resultierenden eindeutig sein. Im Folgenden sollen die Wirkungslinien der Resultierenden von Volumen-, Flächen- und Liniendichten bestimmt werden.

Die resultierende Kraft und das resultierende Moment bezüglich Punkt C einer Volumenkraftdichte berechnen sich aus den Gleichungen

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}_V(\mathbf{r}) dV, \quad \mathbf{M}_C = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_V(\mathbf{r}) dV. \quad (3.38)$$

Die **Wirkungslinie** der resultierenden Kraft lässt sich durch die Forderung

$$(\mathbf{r}_W - \mathbf{c}) \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_C \quad (3.39)$$

festlegen, wobei $\mathbf{r}_W$ ein Punkt der Wirkungslinie ist. Da die spezielle Wahl des Bezugspunktes im Sinne der Äquivalenz nicht relevant ist und folglich $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ gesetzt werden kann, lautet die Bestimmungsgleichung für $\mathbf{r}_W$

$$\mathbf{r}_W \times \int_V \mathbf{f}_V(\mathbf{r}) dV = \mathbf{r}_W \times \mathbf{F} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V(\mathbf{r}) dV. \quad (3.40)$$

Für den Sonderfall einer konstanten Kraftdichte $\mathbf{f}_V(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_{V0} = \mathbf{F}/V$ ergibt sich

$$\left(\mathbf{r}_W - \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV \right) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Die Größe

$$\mathbf{r}_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV \quad (3.42)$$

heißt **Volumenmittelpunkt**. Um die Notation nicht zu schwerfällig zu gestalten,

werden das Volumen und der Integrationsbereich mit V bezeichnet. Aus Gleichung (3.41) folgt nicht, dass $\mathbf{r}_W = \mathbf{r}_V$ gilt, da aus $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ nicht zwingend $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ folgt (Gegenbeispiel: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$). Es kann gefolgert werden, dass $\mathbf{r}_W(\lambda) - \mathbf{r}_V$ kollinear zu $\mathbf{F}$ ist und die Wirkungslinie durch den Volumenmittelpunkt verläuft. Es gilt also

$$\mathbf{r}_W(\lambda) = \mathbf{r}_V + \lambda \mathbf{m} \mathbf{e}_F, \quad \mathbf{e}_F = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.43)$$

Ist die resultierende Kraft null, so handelt es sich bei dem resultierenden Moment um ein **freies Moment**.

Für den Sonderfall einer konstanten Flächenkraftdichte oder einer konstanten Linienkraftdichte erhält man analoge Formeln

$$\left(\mathbf{r}_W - \frac{1}{A} \int_A \mathbf{r} dA \right) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \left(\mathbf{r}_W - \frac{1}{L} \int_L \mathbf{r} dL \right) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

Die Größen

$$\mathbf{r}_A = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{r} dA \quad (3.45)$$

und

$$\mathbf{r}_L = \frac{1}{L} \int_L \mathbf{r} dL \quad (3.46)$$

heißen **Flächenmittelpunkt** (FMP) bzw. **Linienmittelpunkt**. A und L bezeichnen die Größe der Fläche und die Länge der Raumkurve. Für die Wirkungslinien ergibt sich jeweils

$$\mathbf{r}_W(\lambda) = \mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{m} \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_W(\lambda) = \mathbf{r}_L + \lambda \mathbf{m} \mathbf{e}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.47)$$

wobei $\mathbf{e}$ wieder die Richtung der jeweiligen Resultierenden bezeichnet. Wir können also festhalten, dass bei Volumina, Flächen und Raumkurven beliebiger Form im Falle einer konstanten Kraftdichte die Wirkungslinie durch den zugehörigen Mittelpunkt verläuft und deren Richtung mit der Richtung der Resultierenden übereinstimmt. Sind die Kraftdichten nicht ortsunabhängig, so gelten die eben gemachten Aussagen im Allgemeinen nicht.

►**Beispiel: Resultierende einer Streckenlast.** Den für die Statik relevanten Fall einer Streckenlast der Form $\mathbf{q} = q(x)\mathbf{e}_z$, die entlang eines endlichen Bereiches der x -Achse angreift (Abb. 3.8), wollen wir auch für den allgemeinen Fall einer variablen Kraftdichte genauer betrachten. Für die resultierende Kraft und das resultierende Moment gilt $\mathbf{F} = F_z \mathbf{e}_z$, $\mathbf{M}_C = M_{Cy} \mathbf{e}_y$ mit

$$F_z = \int_x q(x) dx, \quad M_{Cy} = - \int_x (x - c_x) q(x) dx. \quad (3.48)$$

Fordert man nun $(\mathbf{r}_W - \mathbf{c}) \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_C$, so entspricht dies nur einer nichttrivialen skalaren Gleichung $-(x_W - c_x)F_z = M_{Cy}$. Setzt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_x = 0$, so folgt

$$x_W \int_x q(x) dx = \int_x xq(x) dx \quad (3.49)$$

und daraus

$$x_W = \frac{\int_x xq(x) dx}{\int_x q(x) dx}. \quad (3.50)$$

Die Wirkungslinie geht also durch den Punkt $\{x_W, 0, 0\}$ und hat die Richtung $\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{r}_W(\lambda) = \mathbf{r}_L + \lambda \mathbf{m} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_L = x_W \mathbf{e}_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.51)$$

Interpretiert man $q(x)$ geometrisch als Funktion, die eine Fläche definiert, so entspricht x_W der Lage des Flächenschwerpunkts.

► **Beispiel: Dreieckslast.** Eine Streckenlast $q(x) = q_0 x/l \mathbf{e}_z$ wirkt im Bereich $x \in [0, l]$ (siehe Abb. 3.9). Berechnen Sie die resultierende Kraft, deren Wirkungslinie und das resultierende Moment bezüglich des Koordinatenursprungs.

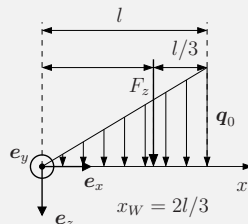


Abb. 3.9: Dreieckslast

Die resultierende Kraft berechnen wir gemäß (3.48). Es folgt

$$F_z = \int_{x=0}^l q(x) dx = \int_{x=0}^l \frac{q_0 x}{l} dx = \frac{q_0 x^2}{2l} \Big|_0^l = \frac{q_0 l}{2}. \quad (3.52)$$

Das resultierende Moment ergibt sich zu

$$M_{0y} = - \int_{x=0}^l xq(x) dx = - \int_{x=0}^l \frac{q_0 x^2}{l} dx = - \frac{q_0 x^3}{3l} \Big|_0^l = - \frac{q_0 l^2}{3}. \quad (3.53)$$

Für die Wirkungslinie gilt

$$\mathbf{r}(\lambda) = x_W \mathbf{e}_x + \lambda \mathbf{m} \mathbf{e}_z, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.54)$$

mit

$$x_W = \int_x xq(x) dx / \int_x q(x) dx = \frac{2}{3}l. \quad (3.55)$$

Beispiel: Resultierende einer Streckenlast

Streckenlast = Liniendicht

geg: $q(x)$ $x \in [0, l]$

ges: $\underline{F}_R, \underline{M}_{R0}, \underline{r}_W$

lös: $\underline{f}_L = q(x) \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{F}_R = \int_L \underline{f}_L dL = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_0^L q(x) dx \end{pmatrix}$

$$\underline{M}_{R0} = \int_L \underline{r} \times \underline{f}_L dL = \int_0^L \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix} dx = \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ -xq(x) \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

$$\underline{r}_W \times \underline{F}_R = \underline{M}_{R0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_W \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_W F_{Rz} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{R0y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -x_W F_{Rz} = M_{R0y}$$

$$\rightarrow x_W = \frac{\int_0^L xq(x) dx}{\int_0^L q(x) dx}$$

$$F_{Rz} = \int_0^L q(x) dx$$

$$M_{R0y} = - \int_0^L xq(x) dx$$

Geraden
gleich

Beispiel: Sonderfall: $q(x)$ ist Dreieckslast

geg: q_0 ($\hat{=}$ Maximalwert der Streckenlast)

$l, c = 0$

ges: F_{Rz}, M_{R0y}, x_W (siehe Aufgabe)

$$\text{lös: } F_{Rz} = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l q_0 \frac{x}{l} dx = \frac{q_0 x^2}{2l} \Big|_0^l = \frac{q_0 l}{2}$$

$$M_{R0y} = - \int_0^l xq(x) dx = - \int_0^l q_0 \frac{x^2}{l} dx = - \frac{q_0 x^3}{3l} \Big|_0^l = - \frac{q_0 l^2}{3}$$

$$q(x) = q_0 \frac{x}{l}$$

$$x_W = \frac{2}{3}l$$

Kapitel 4

Statik starrer Körper

4.1 Gleichgewichtsbedingung für starre Körper

Gleichgewichtssystem. Ein Kraftsystem $\{F_i; r_i\}$ heißt Gleichgewichtssystem, wenn die resultierende Kraft und das resultierende Moment null sind

$$F = \sum_{i=1}^n F_i = 0, \quad M_C = \sum_{i=1}^n (r_i - c) \times F_i = 0. \quad (4.1)$$

Dieser Gleichungssatz entspricht sechs skalaren Gleichungen - drei für das Kräftegleichgewicht und drei für das Momentengleichgewicht. Auch hier ist die Rolle des Bezugspunktes zu untersuchen. Dabei können die Ergebnisse aus der Untersuchung der Äquivalenz von Kraftsystemen angewendet werden. Transformiert man Gleichung (4.1)₂ mittels Gleichung (3.16) auf einen anderen Bezugspunkt, so erhält man im Falle eines Kräftegleichgewichts aus $M_C = M_{C1} = 0$ die Gleichung $M_{C2} = 0$. Die Aussage, dass es sich bei einem Kraftsystem um ein Gleichgewichtssystem handelt, ist also unabhängig vom gewählten Bezugspunkt. Treten Einzelmomente auf, so können diese als Kräftepaar in der obigen Formel für das Momentengleichgewicht berücksichtigt werden.

Gleichgewichtsbedingung für starre Körper. Der *starre Körper* ist eine wichtige Idealisierung der Technischen Mechanik. Zu dieser Idealisierung gelangt man durch die Annahme, dass die Abstände von jeweils zwei beliebigen materiellen Punkten des Körpers zeitunabhängig sind. Die Anwendbarkeit dieser Annahme, die sich bei einer Vielzahl mechanischer Analysen bewährt hat, ist von Fall zu Fall zu prüfen.

Die **Gleichgewichtsbedingung** für starre Körper lässt sich folgendermaßen formulieren: Ein ruhender Körper bleibt in Ruhe, wenn das angreifende Kraftsystem ein Gleichgewichtssystem ist. Es handelt sich hierbei um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren

Kraftsystem : $\{r_i, F_i\} \quad i=1 \dots N$

Reduktion :

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \quad \text{z.B.} \quad F_{Rx} = \sum_{i=1}^N F_{ix}$$

Wirkungslinie von $\underline{F}_R$

$$\underline{M}_{RC} = (\underline{r}_W - \underline{c}) \times \underline{F}_R$$

$$\underline{M}_{RC} = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{c}) \times \underline{F}_i$$

Starrer Körper : Abstände zweier beliebiger Punkte des Körpers konstant

GABen für starre Körper : Starrer Körper bleibt in Ruhe, wenn das angreifende Kraftsystem ein Gleichgewichtssystem ist

Gleichgewichtssystem :

$$\underline{F}_R = \underline{0} \quad (1)$$

$$\underline{M}_{RC} = \underline{0} \quad (2)$$

Gleichgewichtsbedingungen (GAB)

Darstellung in Komponenten

3D-Fall : (1) $\hat{=}$ 3 Gleichungen } $\hat{=}$ 6 Gleichungen
(2) $\hat{=}$ 3 Gleichungen

2D-Fall : (1) $\hat{=}$ 2 Gleichungen } $\hat{=}$ 3 Gleichungen
(2) $\hat{=}$ 1 Gleichung

(FG)
Freiheitsgrade (kinematische) : 3D : 6 FGe
1 starrer Körper 2D : 3 FGe

Mehrere starre Körper : Multiplikation mit deren Anzahl, dabei kinematische Kopplungen beachten

Körper sollen hier noch einmal in Komponenten angegeben werden: Im allgemeinen dreidimensionalen Fall erhält man aus Gleichung (4.1) drei skalare Gleichgewichtsbedingungen für die Einzelkräfte

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (4.2)$$

sowie drei skalare Gleichgewichtsbedingungen für die resultierenden Momente

$$M_{Cx} = \sum_{i=1}^m M_{Cix} = 0, \quad M_{Cy} = \sum_{i=1}^m M_{Ciy} = 0, \quad M_{Cz} = \sum_{i=1}^m M_{Ciz} = 0. \quad (4.3)$$

Bei der Berechnung der resultierenden Momente sind Einzelmomente einzubeziehen. In dem Fall, dass der dreidimensionale Körper durch ein **ebenes Kraftsystem** belastet ist, bei dem alle Kräfte in der x - y -Ebene liegen, reduzieren sich die sechs skalaren Gleichgewichtsbedingungen auf die drei Gleichungen

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad M_{Cz} = \sum_{i=1}^n M_{Ciz} = 0. \quad (4.4)$$

Es ist zu beachten, dass es sich streng genommen noch um ein dreidimensionales Problem handelt, da der Momentenvektor in z -Richtung weist.

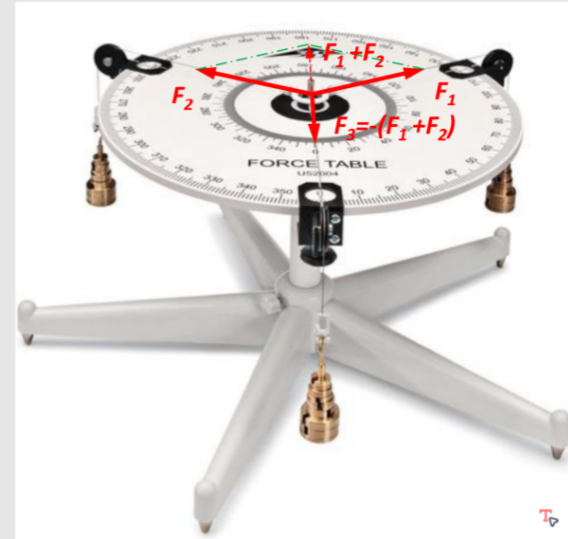
Bei der vorangegangenen Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen wurde scheinbar vorausgesetzt, dass nur Einzelkräfte an dem starren Körper angreifen. Fasst man aber die Einzelkräfte als Resultierende von Kraftdichten auf, so kann die Aussage als sehr allgemein erkannt werden.

▼ **Ergänzung: Gleichgewichtsbedingung für Volumen- und Flächenkraftdichten.** Wie bereits erwähnt sind die meisten Kräfte Resultierende von Volumen- oder Flächenkraftdichten. Bezeichnet man die im Körper wirkende Volumenkraftdichte mit $\mathbf{f}_V$ und die auf der Körperoberfläche angreifende Flächenkraftdichte mit $\mathbf{t} = \mathbf{f}_A$, so erhalten wir folgende äquivalente Formulierung der statischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\int_V \mathbf{f}_V dV + \int_A \mathbf{t} dA = \mathbf{0}, \quad \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_V dV + \int_A (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{t} dA = \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

Die erste Gleichung entspricht dem Kräftegleichgewicht, die zweite dem Momentengleichgewicht. Die vektorielle Größe $\mathbf{t}$ heißt **Spannungsvektor**.

Freischneiden. Die Anwendung des Begriffs des Gleichgewichtssystems ist untrennbar mit dem **Freischneiden (Schnittprinzip)** verbunden. Will man prüfen, ob ein spezielles mechanisches System im Gleichgewicht ist, so muss man das System zuerst definieren. Nun existiert kein technisches System für sich allein, sondern ist eingebettet in eine Umgebung. Die Anwendung des **Schnittprinzips**, d.h. das Freischneiden, besteht aus drei Schritten. Im ersten Schritt werden die Grenzen des



Parallelogrammregel (Experiment von Varignon, 1654-1722)

Systems oder des Körpers definiert. Im zweiten Schritt wird das betrachtete System aus der Umgebung herausgelöst. Im dritten Schritt wird der Einfluss der Umgebung auf das System durch ein äquivalentes Kraftsystem dargestellt und dem System aufgeprägt (Abb. 4.1). Die grafische Darstellung des freigeschnittenen mechanischen Systems und des äquivalenten Kraftsystems heißt **Freikörperbild**. Zu beachten ist, dass in diesen und folgenden Abbildungen teilweise auf den Fettdruck bei vektoriellen Größen verzichtet wird, und statt dessen der Betrag des Vektors geschrieben wird (z.B. $F = |F|$). Die Richtung wird durch einen Pfeil gekennzeichnet. Dadurch sind beispielsweise beim Freischnitt entgegengesetzt wirkende Kräfte gleicher Größe sinnvoll darstellbar.

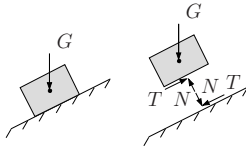


Abb. 4.1: Freikörperbild eines Quaders

Das Freischneiden kann auch auf das freigeschnittene mechanische System selbst angewendet werden. Dann kommt man zu dem Begriff einer inneren Beanspruchung. Eine durch die Umgebung auf das mechanische System wirkende Kraft heißt **äußere Kraft**. Eine Kraft, die durch Anwendung des Freischneidens auf das bereits freigeschnittene mechanische System entsteht, nennt man **innere Kraft**.

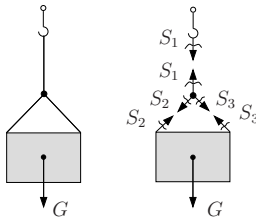
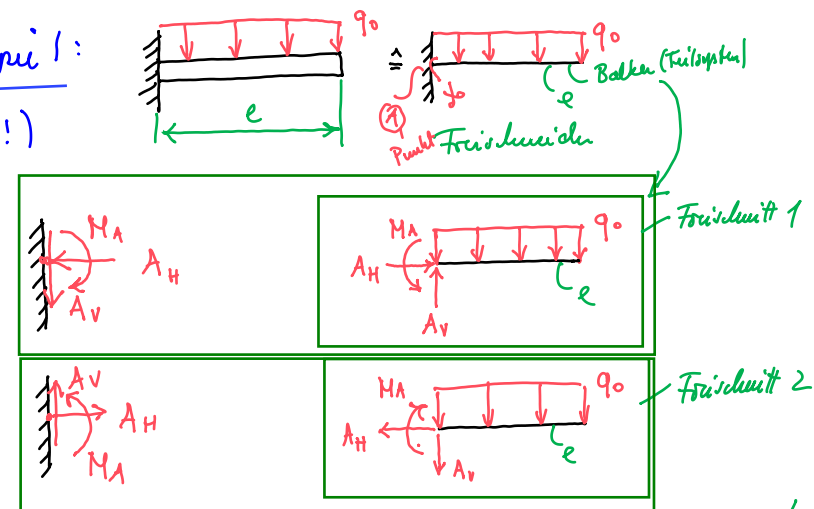


Abb. 4.2: Freikörperbild eines Seils

Beim Freischneiden erhält man pro Schnitt zwei zusammengehörige Schnittufer. Ein **Schnittufer** wird als positives, das andere wird als negatives Schnittufer bezeichnet. Für die spezielle Wahl des positiven Schnittufers gibt es Konventionen, die im Folgenden eingeführt werden. Auf den beiden zusammengehörigen Schnittufern sind entgegengesetzt gleiche Kräfte und Momente einzuführen. Das ist unmittelbar klar, da sich bei einer Einbettung des freigeschnittenen Systems in seine Umgebung oder bei der Zusammensetzung des Körpers die zugehörigen Schnittgrößen aufheben

- Freischneiden:
- 1) Definition Teilsystem
 - 2) Herauslösen des Teilsystems aus seiner Umgebung
 - 3) Ersetzen der Umgebung durch ein äquivalentes Kraftsystem

Beispiel:
(2D!)



Die Richtungen der Lagerreaktionen können frei gewählt werden

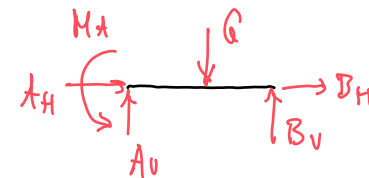
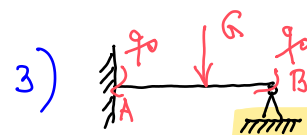
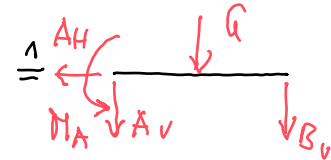
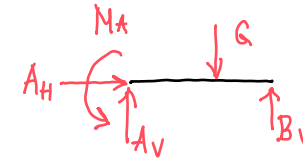
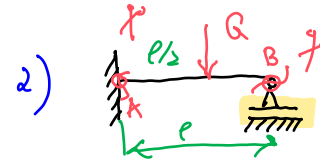
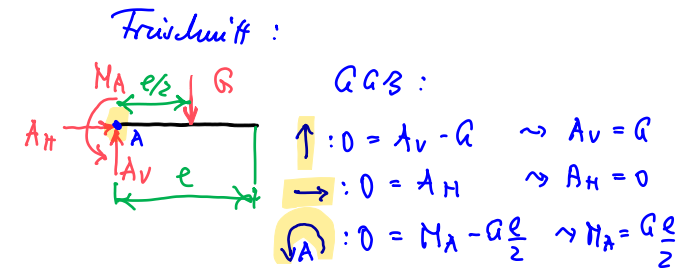
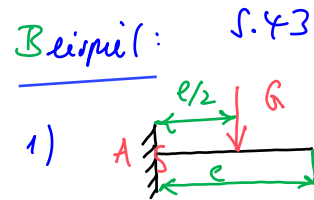
müssen (Abb. 4.2). Die Eigenschaft, dass die Schnittgrößen auf dem positiven und dem negativen Schnittufer entgegengesetzt gleich sind, nennt man **Reaktionsprinzip**. Wir werden sehen, dass das Reaktionsprinzip auch für Fernkräfte, z.B. die Gravitationskraft, gilt.

4.2 Lagerungsarten und Reaktionsgrößen

Kinematische Freiheitsgrade. Ein kinematischer **Freiheitsgrad** entspricht einer Bewegungsmöglichkeit eines Körpers. Ein **Massenpunkt** hat im dreidimensionalen Raum drei **Translationsfreiheitsgrade** - in jeder der drei Raumrichtungen kann eine Verschiebung vorgenommen werden. Die Vorstellung eines Massenpunktes folgt aus der Idealisierung, dass die Ausdehnung eines materiellen Körpers vernachlässigt wird, der Körper seine Masse aber behält. Die Lage des Massenpunktes kann also durch einen Ortsvektor spezifiziert werden. **Rotationsfreiheitsgrade** hat der Massenpunkt nicht, da diesem keine Orientierung zugeordnet werden kann. Ein starrer Körper hat im dreidimensionalen Raum neben den drei Translationsfreiheitsgraden aber noch drei Rotationsfreiheitsgrade. Um jede der drei Achsen kann eine unabhängige Rotation des starren Körpers vorgenommen werden. Ein starrer Körper hat im dreidimensionalen Raum also insgesamt sechs kinematische Freiheitsgrade. In einigen Fällen kann es ausreichend sein, die Bewegung eines dreidimensionalen Körpers in einer Ebene zu beschreiben. Das ist dann der Fall, wenn der Körper nur zwei Translationsfreiheitsgrade und einen Rotationsfreiheitsgrad in einer Ebene hat. Man spricht dann im Sinne einer Idealisierung von einem ebenen Körper oder einem ebenen Problem. Im ebenen Fall hat ein starrer Körper drei Freiheitsgrade.

Geometrische Zwangsbedingungen, Lagerungs- und Verbindungselemente. Wird ein kinematischer Freiheitsgrad eliminiert, so liegt eine geometrische **Zwangsbedingung** vor. Die Elimination kinematischer Freiheitsgrade kann durch verschiedene Typen von Lagerungen oder Einspannungen geschehen, die im Folgenden unter dem Begriff **Lager** zusammengefasst werden. Ein Lager kann einen oder mehrere Freiheitsgrade eliminieren. Ebene Lager sind in Abb. 4.3 zusammengefasst, räumliche Lager in Abb. 4.4.

Kinematische Kopplungen starrer Körper werden durch Verbindungselemente realisiert. Ein spezielles **Verbindungselement** ist das **Gelenk**. Die Elimination eines kinematischen Freiheitsgrades ruft bei äußerer Belastung eine Reaktionsgröße hervor. Wird ein Translationsfreiheitsgrad eliminiert, so handelt es sich um eine **Reaktionskraft**. Wird ein Rotationsfreiheitsgrad eliminiert, so handelt es sich um ein

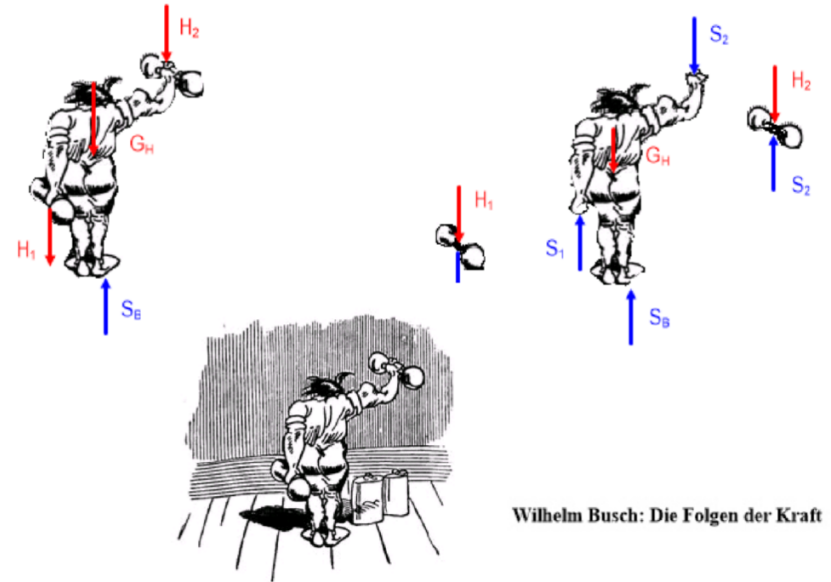


Lesestoff 4.1 - 4.3

Reaktionsmoment. Kräfte und Momente, die nicht Folge von Zwangsbedingungen sind, heißen *eingeprägte Kräfte* bzw. *eingeprägte Momente*.

	Symbol	Reaktionskräfte
Pendelstütze		
Gleitlager		
gelenkiges Lager		
Parallelführung		
Schiebehülse		
Einspannung		

Abb. 4.3: Lagerungen für ebene Tragwerke (Auswahl)



4.3 Kinematische und statische Bestimmtheit

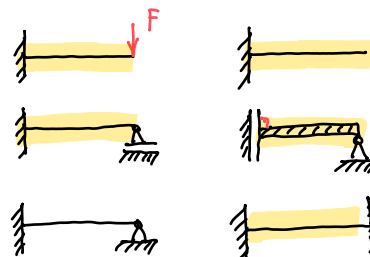
Kinematische Bestimmtheit. Ein System von starren Körpern heißt *kinematisch bestimmtes* System, wenn die Lage aller Teilkörper des Systems eindeutig festgelegt ist. Andernfalls heißt das System *kinematisch unbestimmt*. Sind n kinematische Freiheitsgrade des Systems nicht durch Zwangsbedingungen eliminiert worden, so heißt das System n -fach kinematisch unbestimmt (Abb. 4.5).

Statische Bestimmtheit. Lassen sich bei einem System starrer Körper alle Reaktionsgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen, so liegt ein *statisch bestimmtes* System vor. Andernfalls ist es statisch unbestimmt. Im Allgemeinen gilt, dass im statisch bestimmten Fall die Gleichgewichtsbedingungen linear unabhängige Gleichungen für alle Lagerreaktionen liefern müssen. Sind von den n Gleichungen

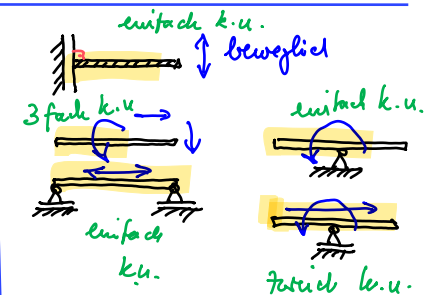
kinematische Bestimmtheit:

lage eindeutig festgelegt

kinematisch
bestimmt



kinematisch
unbestimmt (k.u.)



	Symbol	Reaktionskräfte
Loslager		
Festlager		
Radiallager		
Feste Einspannung		

Abb. 4.4: Lagerungen für räumliche Tragwerke (Auswahl)

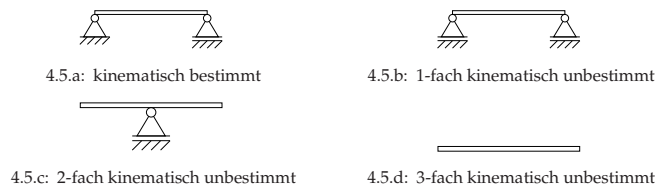


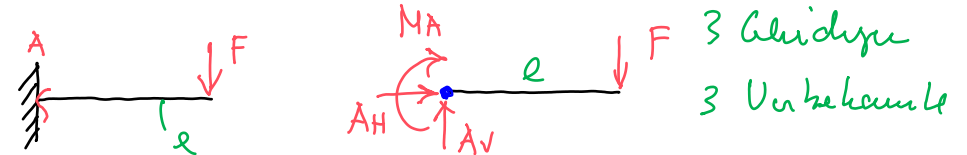
Abb. 4.5: Beispiele zur kinematischen Bestimmtheit

insgesamt nur $n - m$ Gleichungen linear unabhängig, so ist das System m -fach **statisch unbestimmt**. Betrachten wir zunächst ein solches, das nur aus einem Teilkörper besteht. Im dreidimensionalen Fall hat der Körper 6 Freiheitsgrade. Ist er kinematisch bestimmt gelagert, so müssen mindestens 6 Lagerreaktionen vorliegen. Liegen genau 6 Lagerreaktionen vor und sind diese aus den 6 Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar, so ist der Körper statisch bestimmt gelagert.

Betrachten wir nun ein System, das aus n Teilkörpern besteht, die durch Verbindungselemente (Gelenke) gekoppelt sind. Wir wollen annehmen, dass das System kinematisch bestimmt ist. In diesem Fall sind die $6n$ Freiheitsgrade der Teilsysteme durch mindestens $6n$ Lager- und Gelenkreaktionen eliminiert worden. Liegen genau $6n$ Lager- und Gelenkreaktionen vor und sind diese aus den $6n$ Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar, so ist der Körper statisch bestimmt gelagert. Für die Überprüfung der statischen Bestimmtheit kinematischer Systeme lassen sich Abzählkriterien formulieren. Bezeichnet man die Anzahl der

Statische Bestimmtheit : alle Reaktionsgrößen in den Lagern (Lagerreaktionen $\hat{=}$ Kräfte und / oder Momente) lassen sich **eindeutig** aus den GGBen bestimmen

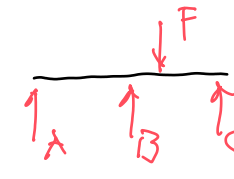
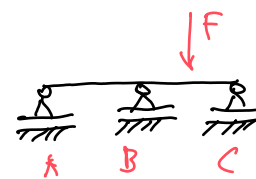
B



$$\begin{aligned} \rightarrow : 0 &= A_H \rightarrow A_H = 0 \\ \uparrow : 0 &= A_V - F \rightarrow A_V = F \\ \curvearrowleft : 0 &= -M_A - F \cdot l \rightarrow M_A = -F \cdot l \end{aligned}$$

$\rightarrow$ statisch bestimmtes Problem

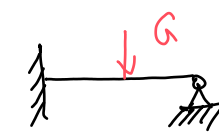
B



3 GGBen
3 Lagerkräfte

statisch und kinematisch unbestimmt

B



4 Unbekannte
3 Gleichg.

stat. unbestimmt
5 Unbek.
3 Gl.

6 Unbek.
3 Gl.

Reaktionsgrößen in den Auflagern mit a_R und die in den Verbindungselementen mit v_R , so lässt sich als ein notwendiges Kriterium für dreidimensionale Probleme

3D-Fall $a_R + v_R = 6n$ (4.6)

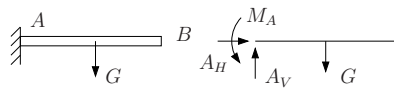
angeben. Das Kriterium ist nicht hinreichend, da die oben erwähnte lineare Unabhängigkeit in dem Kriterium nicht abgefragt wird. Im Falle eines ebenen Kraftsystems reduziert sich die maximale Anzahl der Freiheitsgrade von $6n$ auf $3n$ und das (notwendige) Abzählkriterium lautet

2D-Fall $a_R + v_R = 3n$. (4.7)

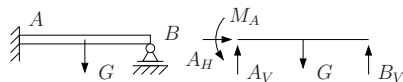
Ist ein System kinematisch bestimmt aber statisch unbestimmt, so müssen die Deformationen des Systems berücksichtigt werden, um die Lagerreaktionen zu bestimmen. Hier sieht man die Grenzen, die die Idealisierung des starren Körpers mit sich bringt.

Der bisher betrachtete Begriff der statischen Bestimmtheit bezog sich auf die Berechenbarkeit der Lager- und Gelenkgrößen. Man spricht in diesem Sinne von einer **äußerlichen statischen Bestimmtheit**. Es gibt Fälle, bei denen die von der Umgebung auf das System wirkenden Lagergrößen mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen berechenbar sind, die Schnitt- und Gelenkgrößen aber nicht. In solchen Fällen wird von einer **innerlichen statischen Unbestimmtheit** gesprochen.

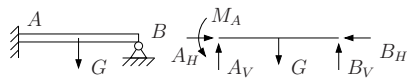
► **Beispiel: Statische Bestimmtheit von ebenen Tragwerken.** In Abb. 4.6 sind drei verschiedene ebene Tragwerke dargestellt.



4.6.a: Statisch bestimmt



4.6.b: 1-fach statisch unbestimmt



4.6.c: 2-fach statisch unbestimmt

Abb. 4.6: Beispiele zur statischen Bestimmtheit

B *

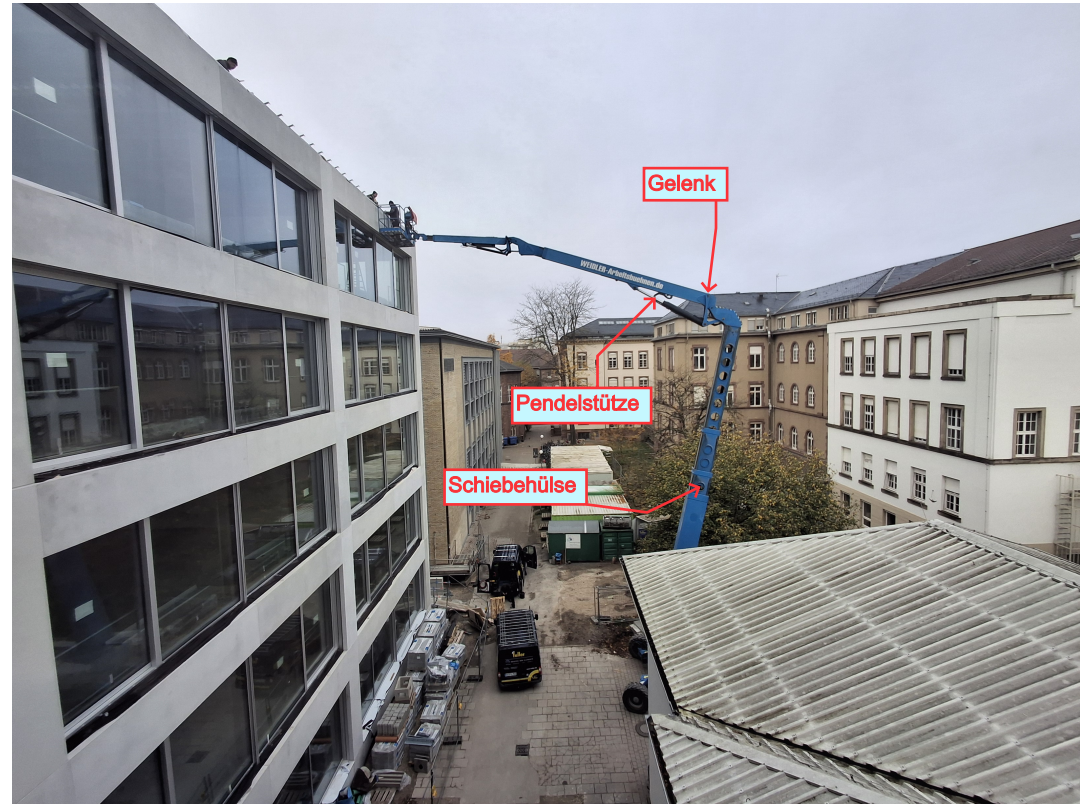


Abb. 4.6.a beschreibt ein statisch bestimmtes System, da es drei Lagerreaktionen gibt und die Gleichungen linear unabhängig sind. Abb. 4.6.b und Abb. 4.6.c zeigen hingegen statisch unbestimmte Strukturen, bei denen die Lagerreaktionen nicht eindeutig berechenbar sind.

Vorgehensweise bei der Berechnung von Auflager- und Verbindungsreaktionen. Bei der Berechnung der Auflager- und Verbindungsreaktionen empfiehlt sich folgende Vorgehensweise:

- Erstellung des **Freikörperbildes**: 1) Definition des Randes des betrachteten mechanischen Teilsystems, 2) Herauslösung des Teilsystems, 3) Eintragung der eingepägten Kräfte und Momente, 4) Eintragung der Reaktionskräfte und -momente unter Beachtung des Reaktionsprinzips
- Aufstellung der **Gleichgewichtsbedingungen** für alle Teilsysteme
- Analyse bzw. Lösung des Gleichungssystems

Auf Grund der linearen Struktur der Gleichgewichtsbedingungen handelt es sich bei der Bestimmung der Auflager- und Verbindungsreaktionen um die Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Die eingepägten Kräfte sind in der Regel gegeben und bestimmen die rechte Seite b des Gleichungssystems. Die Koeffizientenmatrix wird durch die spezielle Anordnung der Reaktionsgrößen bestimmt. Die unbekannten Auflager- und Verbindungsreaktionen stellen den unbekannten Vektor des linearen Gleichungssystems dar. Im Falle der statischen Bestimmtheit hat es eine eindeutige Lösung, was mit der Eigenschaft identisch ist, dass die Koeffizientendeterminante ungleich null ist.

► Beispiel: Lagerreaktionen (ebenes, statisch bestimmtes Problem). Bestimmen Sie für die in Abb. 4.7 dargestellten Systeme die Lagerreaktionen.

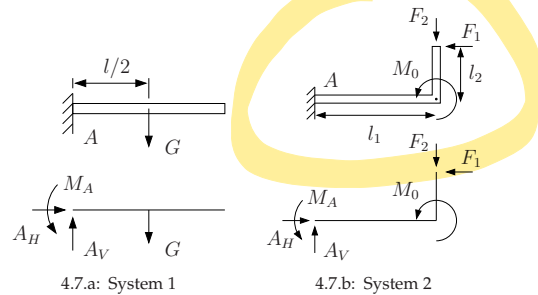


Abb. 4.7: Beispielprobleme zur Berechnung der Reaktionsgrößen

System 1: Die Gleichgewichtsbedingungen lauten (Abb. 4.7.a):

$$\rightarrow: 0 = A_H, \quad \uparrow: 0 = A_V - G, \quad \circlearrowleft: 0 = M_A - \frac{Gl}{2}. \quad (4.8)$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$A_H = 0, \quad A_V = G, \quad M_A = \frac{Gl}{2}. \quad (4.9)$$

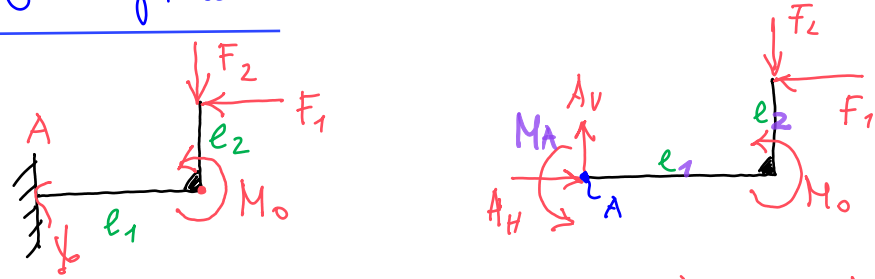
System 2: Die Gleichgewichtsbedingungen lauten (Abb. 4.7.b):

$$\rightarrow: 0 = A_H - F_1, \quad \uparrow: 0 = A_V - F_2, \quad \circlearrowleft: 0 = M_A + M_0 + F_1 l_2 - F_2 l_1. \quad (4.10)$$

Es folgt

$$A_H = F_1, \quad A_V = F_2, \quad M_A = F_2 l_1 - F_1 l_2 - M_0. \quad (4.11)$$

B: System 2 :



gegeben: Auswertung in vereinfachter Notation

frei wählbar

$$\begin{aligned} \rightarrow &: 0 = A_H - F_1 \quad \leadsto \quad A_H = F_1 \\ \uparrow &: 0 = A_V - F_2 \quad \leadsto \quad A_V = F_2 \\ \circlearrowleft &: 0 = M_A + M_0 + F_1 l_2 - F_2 l_1 \end{aligned}$$

$$M_A = F_2 l_1 - F_1 l_2 - M_0$$

$$\begin{aligned} \leftarrow &: 0 = -A_H + F_1 \\ \uparrow &: 0 = A_V - F_2 \\ \circlearrowleft &: 0 = -M_A - M_0 - F_1 l_2 + F_2 l_1 \end{aligned}$$

Vergleich: Vereinfachte Notation⁽¹⁾ vs. Vektornotation⁽²⁾

geg: l, G
ges: Lagerreaktionen

Auswertung d. GGBen

(1) $\rightarrow: 0 = A_H$
 $\uparrow: 0 = A_V + B_V - G$
 $\circlearrowleft: 0 = -G \frac{l}{2} + B_V l$
 $\Rightarrow B_V = \frac{G}{2}$
 $\Rightarrow A_V = G - B_V = \frac{G}{2}$

(2) $A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 0 \\ -G \end{pmatrix}$
 $GGB: A + B + G = 0$ * $8P \cdot A$ $\frac{1}{2} \cdot B + \frac{1}{2} \cdot G = 0$
 $\left(\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -G \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-x - \circlearrowleft$
 $\Rightarrow A_x = 0$
 $\Rightarrow A_y = B_y = \frac{G}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{als Lösung der} \\ \text{Restant GLS} \\ \text{u. u.} \end{array} \right.$



► **Beispiel: Lagerreaktionen (ebenes, statisch unbestimmtes Problem).** Bestimmen Sie für das in Abb. 4.8 dargestellte ebene System die Lagerreaktionen.

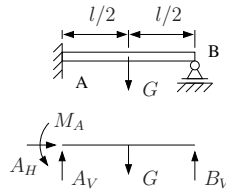


Abb. 4.8: Statisch unbestimmtes Beispielproblem

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\rightarrow: 0 = A_H, \quad \uparrow: 0 = A_V + B_V - G, \quad \circlearrowleft: 0 = M_A - \frac{Gl}{2} + B_V l. \quad (4.12)$$

Es liegen drei Gleichungen für die vier Unbekannten A_H , A_V , B_V und M_A vor. Führt man die Größe $\alpha = A_V/B_V$ ein, so ergibt die Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen

$$A_H = 0, \quad A_V = \frac{1}{1 + 1/\alpha} G, \quad B_V = \frac{1}{1 + \alpha} G, \quad M_A = Gl \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \alpha} \right). \quad (4.13)$$

Für jede Wahl von α liegt ein Gleichgewichtssystem vor. Die Lagerreaktionen bleiben im Rahmen der Statik unbestimmt.

► **Beispiel: Lagerreaktionen (statisch bestimmtes räumliches Problem).** Bestimmen Sie für das in Abb. 4.9 dargestellte System die Lagerreaktionen.

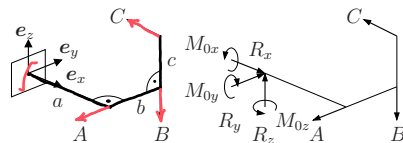


Abb. 4.9: Beispiel für Reaktionsgrößen im dreidimensionalen Raum

Nach dem Freischneiden des Tragwerks am Punkt der festen Einspannung sind dort drei Reaktionskräfte und drei Reaktionsmomente anzutragen. Da es sich um ein dreidimensionales Problem handelt, stehen sechs Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung dieser Lagerreaktionen zur Verfügung. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$x: R_x = C, \quad y: R_y = A, \quad z: R_z = B, \quad (4.14)$$

und

$$x: M_{0x} = Bb, \quad y: M_{0y} = Cc - Ba, \quad z: M_{0z} = Aa - Cb. \quad (4.15)$$

Das System ist statisch und kinematisch bestimmt.

Beispiel:

1) Vereinfachte Notation

$$\rightarrow: 0 = A_H$$

$$\uparrow: 0 = A_V + B_V - G$$

$$\circlearrowleft: 0 = -G \frac{l}{2} + B_V l \leadsto B_V = \frac{G}{2}$$

$$\rightarrow: A_H = 0$$

$$\leadsto A_V = G - B_V = G - \frac{G}{2} = \frac{G}{2}$$

2) Vektornotation

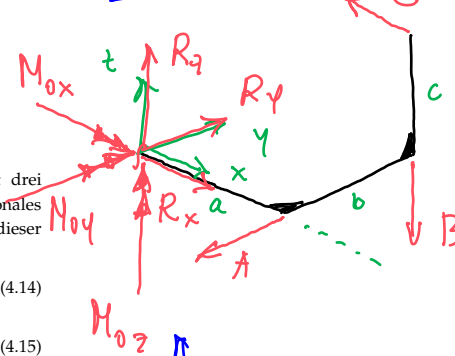
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{GGB}: \underline{A} + \underline{B} + \underline{G} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \underline{G} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \underline{B} = 0$$

Beispiel:



Vektorkomponenten!

GGBen

Kräfte:

$$x: 0 = R_x - C \leadsto R_x = C$$

$$y: 0 = R_y - A \leadsto R_y = A$$

$$z: 0 = R_z - B \leadsto R_z = B$$

Momente:

$$\circlearrowleft_x: 0 = M_{0x} - Bb \leadsto M_{0x} = Bb$$

$$\circlearrowleft_y: 0 = M_{0y} - Cc + Ba \leadsto M_{0y} = Cc - Ba$$

$$\circlearrowleft_z: 0 = M_{0z} - Aa + Cb \leadsto M_{0z} = Aa - Cb$$

► **Beispiel: Auflager- und Bindungsreaktionen (Gelenkbrücke)**. Für die in Abb. 4.10 dargestellte Gelenkbrücke sind die Auflager- und die Bindungsreaktionen zu bestimmen.

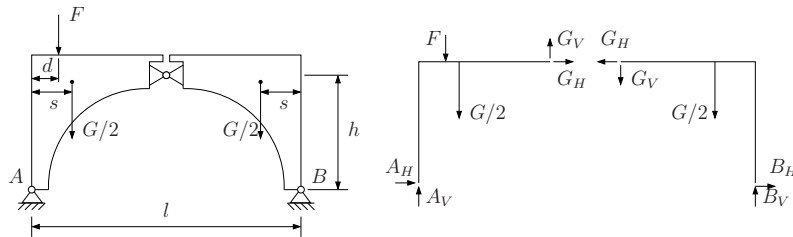


Abb. 4.10: Gelenkbrücke

Zur Bestimmung der gesuchten Größen muss das ebene System in zwei Teilsysteme aufgeteilt werden. Für Teilsystem 1 lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: 0 = A_H + G_H, \quad \uparrow: 0 = A_V + G_V - \frac{G}{2} - F, \quad \circlearrowleft_A: 0 = -\frac{Gs}{2} - Fd + \frac{G_V l}{2} - G_H h. \quad (4.16)$$

Für Teilsystem 2 gilt

$$\rightarrow: 0 = B_H - G_H, \quad \uparrow: 0 = B_V - G_V - \frac{G}{2}, \quad \circlearrowleft_B: 0 = \frac{Gs}{2} + \frac{G_V l}{2} + G_H h. \quad (4.17)$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem lassen sich die gesuchten Größen bestimmen. Für die Auflagergrößen ergibt sich

$$A_H = -G_H, \quad A_V = \frac{G}{2} + F \left(1 - \frac{d}{l}\right), \quad B_H = G_H, \quad B_V = \frac{Fd}{l} + \frac{G}{2}. \quad (4.18)$$

Die Gelenkkraft folgt zu

$$G_H = -\frac{Gs + Fd}{2h}, \quad G_V = \frac{Fd}{l}. \quad (4.19)$$



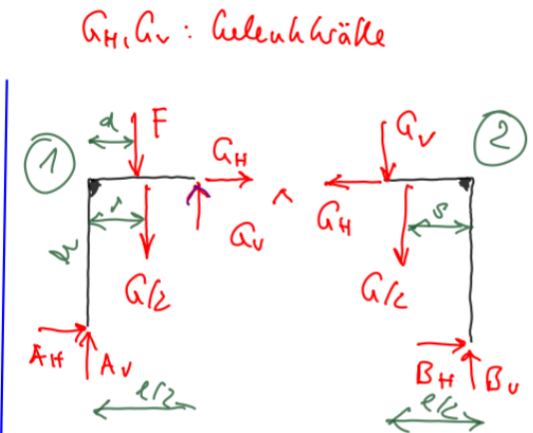
Beispiel:

geg: F, d, G, s, h, l

ges: Lagerreaktionen

Verbindungsreaktion
(zwischen starren Körpern)

Lösung in vereinfachter Notation



GGBen:

$$\textcircled{1} \rightarrow: 0 = A_H + G_H$$

$$\textcircled{2} \leftarrow: 0 = G_H - B_H$$

$$\uparrow: 0 = A_V + G_V - F - \frac{G}{2}$$

$$\downarrow: 0 = G_V + \frac{G}{2} - B_V$$

$$\curvearrowleft_A: 0 = -Fd - \frac{Gs}{2} + G_V \frac{l}{2} - G_H h$$

$$\curvearrowleft_B: 0 = G_H h + G_V \frac{l}{2} + \frac{G}{2}s$$



Lösen des GLS:

ges: $A_H, A_V, B_H, B_V, G_H, G_V$



► **Beispiel: Auflager- und Bindungsreaktionen (Dreigelenkrahmen).** Für den in Abb. 4.11 dargestellten Dreigelenkrahmen sind die Auflager- und die Bindungsreaktionen zu bestimmen.

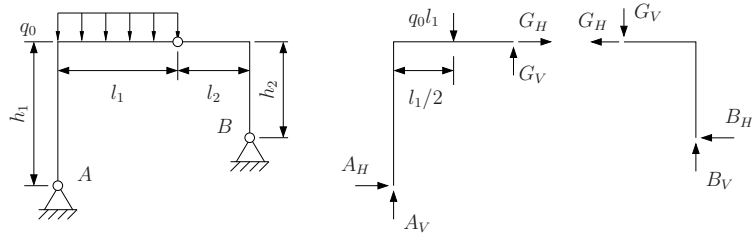


Abb. 4.11: Dreigelenkrahmen

Zur Bestimmung der gesuchten Größen muss das ebene System in zwei Teilsysteme aufgeteilt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen für Teilsystem 1 lauten

$$\rightarrow: 0 = A_H + G_H, \quad \uparrow: 0 = A_V + G_V - q_0 l_1, \quad \circlearrowleft_A: 0 = G_V l_1 - G_H h_1 - \frac{q_0 l_1^2}{2}. \quad (4.20)$$

Für Teilsystem 2 gilt

$$\rightarrow: 0 = -B_H - G_H, \quad \uparrow: 0 = B_V - G_V, \quad \circlearrowleft_B: 0 = G_V l_2 + G_H h_2. \quad (4.21)$$

Die Gelenkkraft ergibt sich zu

$$G_V = \frac{q_0 l_1}{2} \frac{l_1}{l_1 + h_2} \frac{h_1}{l_2}, \quad G_H = -\frac{q_0 l_1}{2} \frac{1}{h_1 + h_2} \frac{h_1}{l_1 + l_2}. \quad (4.22)$$

Für die Auflagergrößen folgt

$$A_H = -G_H, \quad A_V = q_0 l_1 - G_V, \quad B_H = -G_H, \quad B_V = G_V. \quad (4.23)$$

Merksätze:

- 5.1 Sind Tutorien sinnvoll?
 - 5.2 Sind Hörsaal Tutorien sinnvoll?
 - 5.3 Passt der Vorlesungsstil?
- Hinweise unter 4.2

Kapitel 5

Schnittgrößen in Stäben, Balken und Fachwerken

a

5.1 Schnittgrößen in Linientragwerken

Linien- und Flächentragwerke. Als Linientragwerk bezeichnet man ein Tragwerk, bei dem die Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Längsabmessung klein sind. In diesem Fall kann die Tragwerksgeometrie näherungsweise durch eine Raumkurve angegeben werden, die durch die Flächenmittelpunkte der Tragwerksquerschnitte verläuft. Beispiele für Linientragwerke sind Seile, Ketten, dünne Stäbe, Balken und Rahmen. Bei einem Flächentragwerk ist die Dickenabmessung des Tragwerks im Vergleich zu den beiden anderen Längenabmessungen klein. Beispiele für Flächentragwerke sind Scheiben, Platten, Schalen und Membranen.

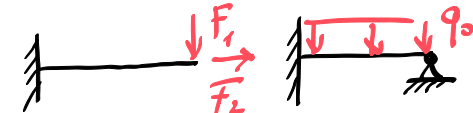
Äußere Beanspruchungen eines Linientragwerks. Auf Grund der geometrischen Eigenschaften eines Linientragwerks greifen die äußeren Lasten näherungsweise in der Tragwerksmittellachse an. Als äußere Last kommen bei Linientragwerken neben Einzelkräften und Einzelmomenten Streckenlasten in Frage. Eine Streckenlast mit der Dimension Kraft pro Längeneinheit wird mit $q(s)$ bezeichnet, wobei s die **Bogenlänge** ist. Eine Streckenlast mit der Dimension Moment pro Längeneinheit wird mit $m(s)$ bezeichnet (Abb. 5.1). Treten nur äußere Belastungen entlang der Längsachse auf, so spricht man von einem **Stab**. Liegen äußere Lasten quer zu Längsachse vor, so spricht man von einem **Balken**.

Innere Beanspruchungen eines Linientragwerks. Schneidet man ein Linientragwerk im Inneren frei, das heißt in zwei oder mehr Teile, so muss man an den beiden Schnittufern entgegengesetzte gleiche Schnittgrößen antragen. Diese müssen statisch äquivalent zu den Flächenkraftdichten auf der Schnittfläche sein. Im Allgemeinen

Stäbe :
Belastung längs

Balken :
Belastung quer

Linientragwerke:



Flächentragwerke : Platten, Schieber, Schalen

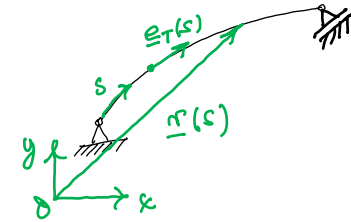
Geometrie von Linientragwerken (allg. Fall)

s : Bogenlänge

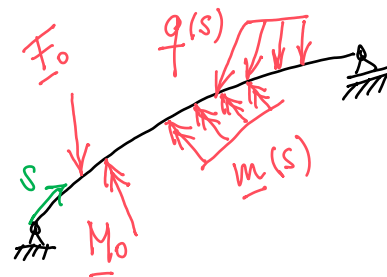
$\underline{r}(s)$: Ortsvektor

$\underline{e}_T(s)$: Tangenten-Einheitsvektor

$$\underline{e}_T(s) = \frac{d\underline{r}(s)}{ds}$$



Äußere Belastungen (Kräfte und Momente) bei Linientragwerk



$\underline{F}_0$: Einzelkraft

$\underline{M}_0$: Einzelmoment

$\underline{q}(s)$: Streckenlast
(vektorielle Größe)

$\underline{m}(s)$: Streckenmoment

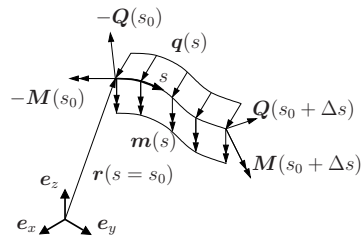


Abb. 5.1: Beispiel einer Streckenlast

hat man also einen Kraft- und einen Momentenvektor einzuführen (Abb. 5.1). Die **Schnittkraft** wird hier mit $Q(s)$ bezeichnet, das **Schnittmoment** mit $M(s)$.

▼ **Ergänzung: Differentialgleichung.** Im Folgenden wird der Begriff der Differentialgleichung wichtig sein, der hier vereinfacht am Beispiel einer **gewöhnlichen Differentialgleichung** erläutert werden soll, bei der die gesuchte Variable nur von einem Parameter abhängt. Sei $y(t)$ eine zeitabhängige Variable, dann kann der zeitliche Verlauf von $y(t)$ durch algebraische Gleichungen, z.B. a) $y(t) = y_0 + at$ oder b) $y(t) = \exp(-at)y_0$, oder durch Differentialgleichungen, z.B. c) $y'(t) = a$ oder d) $y'(t) = -ay(t)$, angegeben werden. Eine gewöhnliche Differentialgleichung enthält Ableitungen der gesuchten Größe und wird durch Anfangs- oder Randbedingungen ergänzt. Es ist leicht zu zeigen, dass die algebraische Gleichung a) die Differentialgleichung c), und die Gleichung b) die Differentialgleichung d) löst, falls man für beide Differentialgleichungen die Anfangsbedingung $y(t = 0) = y_0$ ansetzt.

▼ **Ergänzung: Taylorreihenentwicklung.** Die **Taylorreihenentwicklung** einer analytischen Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 hat die Form

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x_0)(x-x_0)^\alpha = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots \quad (5.1)$$

Mit $f^{(\alpha)}$ wird die α -te Ableitung nach x bezeichnet. Die lineare Approximation der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist durch die ersten beiden Reihenglieder gegeben (Abb. 5.2)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \quad (5.2)$$

Diese Näherung ist im Allgemeinen nur in einer gewissen Umgebung von x_0 akzeptabel.

Liegt eine vektorwertige Funktion $\mathbf{f}$ einer skalaren Variablen s vor, so lautet die Taylorreihendarstellung an der Stelle s_0

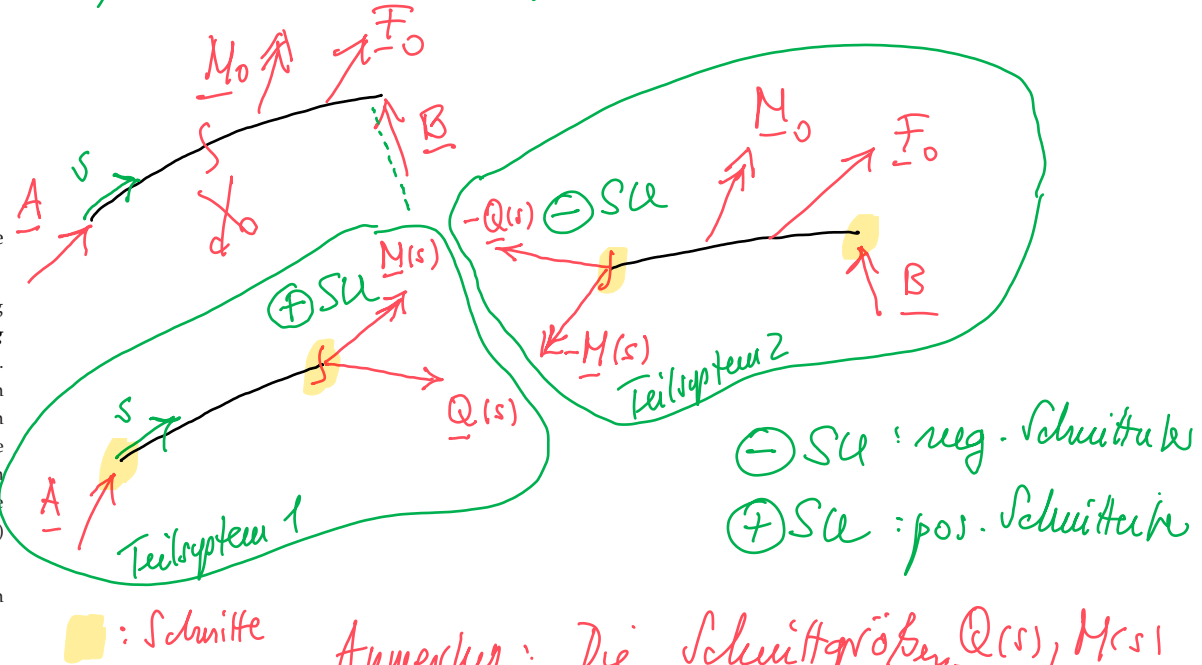
$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{f}(s_0) + \mathbf{f}'(s_0)(s-s_0) + \frac{1}{2} \mathbf{f}''(s_0)(s-s_0)^2 + \dots \quad (5.3)$$

Für die n -te Ableitung der Funktion $\mathbf{f}(s) = f_x(s)\mathbf{e}_x + f_y(s)\mathbf{e}_y + f_z(s)\mathbf{e}_z$ gilt

$$\frac{d^n \mathbf{f}(s)}{ds^n} = \frac{d^n f_x(s)}{ds^n} \mathbf{e}_x + \frac{d^n f_y(s)}{ds^n} \mathbf{e}_y + \frac{d^n f_z(s)}{ds^n} \mathbf{e}_z. \quad (5.4)$$

neue Beanspruchungen

1) Freischneiden des Lagers



■ : Schnitte

Anmerkung: Die Schnittgrößen $Q(s)$, $M(s)$ sind vektorielle Größen

$Q(s)$: Schnittkraft

$M(s)$: Schnittmoment

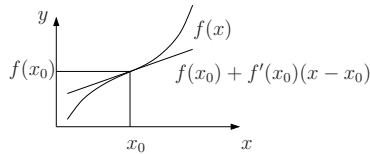


Abb. 5.2: Schematische Darstellung der Taylorreihenentwicklung

► **Beispiel: Taylorreihenentwicklung.** Als Beispiel betrachten wir die Reihenentwicklung der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 4$ an der Stelle $x_0 = 2$. Es gilt: $f(2) = 4$, $f'(2) = 2$ und $f''(2) = 2$. Alle höheren Ableitungen sind null. Setzt man die Ableitungen in die Reihenentwicklung ein, so folgt

$$f(x) = 4 + 2 \cdot (x - 2) + \frac{2}{2}(x - 2)^2 + 0 = (x - 2)^2 + 2x = x^2 - 2x + 4. \quad (5.5)$$

5.2 Schnittgrößendifferentialgleichung

Differentialgleichung der Schnittkraft. Die Differentialgleichungen für die Schnittkraft und das Schnittmoment werden im Folgenden für ein gekrümmtes Linientragwerk abgeleitet. Danach folgt die Spezifikation für gerade Stäbe und Balken. Abb. 5.1 zeigt den allgemeinen Fall einer durch die Streckenlasten $q(s)$ und $m(s)$ beanspruchten Raumkurve ($s \in [s_0, s_0 + \Delta s]$). An den beiden Enden der Raumkurve sind die Schnittgrößen $Q(s_0)$ und $M(s_0)$ sowie $Q(s_0 + \Delta s)$ und $M(s_0 + \Delta s)$ angetragen, die die statisch äquivalenten Größen der inneren Spannungen repräsentieren. Die resultierende Kraft der Streckenlast $q(s)$ erhält man durch Integration entlang der Raumkurve

$$F_q = \int_{s_0}^{s_0 + \Delta s} q(s) ds. \quad (5.6)$$

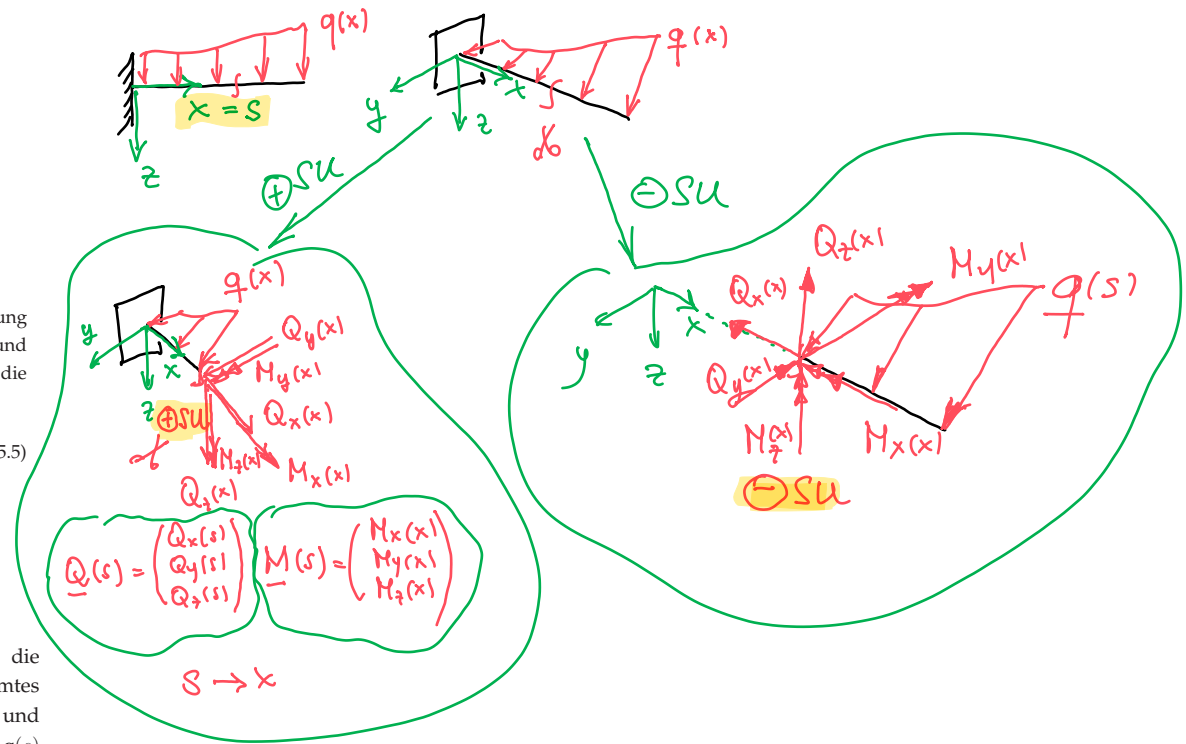
Bildet man das Kräftegleichgewicht, so erhält man

$$0 = -Q(s_0) + Q(s_0 + \Delta s) + \int_{s_0}^{s_0 + \Delta s} q(s) ds. \quad (5.7)$$

Die ersten Terme der Taylorreihenentwicklung von $Q(s_0 + \Delta s)$ lauten

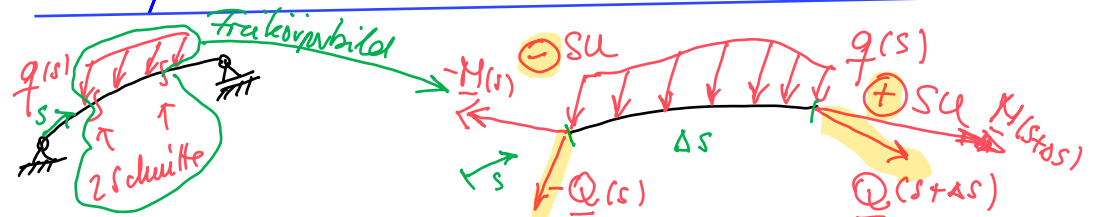
$$Q(s_0 + \Delta s) = Q(s_0) + \frac{dQ}{ds}(s_0)\Delta s + \dots \quad (5.8)$$

Sonderfall: Gerade Balken und Stäbe



Anm: QGBen: Summe der Kräfte u. Momente null
Alternative: QGBen in Differentialgleichungsform

Schnittgrößen-DGL $\hat{=}$ QGB für Kräfte in DGL-Form



Summe der Kräfte gleich null:

$$0 = Q(s + \Delta s) - Q(s) + \int_s^{s + \Delta s} q(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad \bigg| \frac{1}{\Delta s}$$

Setzt man dieses Zwischenergebnis in das Kräftegleichgewicht ein, so folgt nach Division durch Δs

$$0 = \frac{dQ}{ds}(s_0) + \frac{1}{\Delta s} \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} q(s) ds + \dots \quad (5.9)$$

Nach der Grenzwertbildung $\Delta s \rightarrow 0$ ergibt sich schließlich wegen der Beliebigkeit von s_0 die **Differentialgleichung der Schnittkraft**

$$\frac{dQ(s)}{ds} = -q(s). \quad (5.10)$$

Differentialgleichung des Schnittmoments. Die Differentialgleichung für das Schnittmoment kann ganz ähnlich abgeleitet werden wie die Differentialgleichung für die Schnittkraft. Es ist hilfreich, die Abkürzung

$$\Delta \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) \quad (5.11)$$

einzuführen. Das resultierende Moment der Streckenlast $\mathbf{m}(s)$ erhält man durch Integration entlang der Raumkurve

$$\mathbf{M}_m = \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} \mathbf{m}(s) ds. \quad (5.12)$$

Bildet man das Momentengleichgewicht bezüglich Punkt $\mathbf{r}(s_0)$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 = & -\mathbf{M}(s_0) + \mathbf{M}(s_0 + \Delta s) \\ & + \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} \mathbf{m}(s) ds \\ & + \Delta \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) \times \mathbf{Q}(s_0 + \Delta s) \\ & + \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} \Delta \mathbf{r}(s) \times \mathbf{q}(s) ds. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die ersten Terme der Taylorreihenentwicklung von $\mathbf{M}(s_0 + \Delta s)$ lauten

$$\mathbf{M}(s_0 + \Delta s) = \mathbf{M}(s_0) + \frac{d\mathbf{M}}{ds}(s_0) \Delta s + \dots \quad (5.14)$$

Setzt man dieses Zwischenergebnis in das Momentengleichgewicht ein, so erhält man nach Division durch Δs

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d\mathbf{M}}{ds}(s_0) + \dots \\ & + \frac{1}{\Delta s} \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} \mathbf{m}(s) ds \\ & + \frac{\Delta \mathbf{r}(s_0 + \Delta s)}{\Delta s} \times \left(\mathbf{Q}(s_0) + \frac{d\mathbf{Q}}{ds}(s_0) \Delta s + \dots \right) \\ & + \frac{1}{\Delta s} \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} \Delta \mathbf{r}(s) \times \mathbf{q}(s) ds. \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df}{dx} \quad \text{Umstellen und } \lim_{\Delta s \rightarrow 0}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{Q(s+\Delta s) - Q(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} -\frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} q(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\frac{dQ(s)}{ds} = -q(s)$$

auch gültig bei gekrümmten Balken

Gerade Balken

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(s)$$

$s \rightarrow x$
 $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} Q'_x(x) &= -q_x(x) \\ Q'_y(x) &= -q_y(x) \\ Q'_z(x) &= -q_z(x) \end{aligned}$$

Die Formeln $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent zu den QABen der Kräfte an einem linearen Tragwerk.

$(*)$ $(**)$: Gelten nicht in Punkten, in denen Einzellkräfte oder Einzellmomente eingebracht werden.

Lesestoff: Kap. 5.1 - 5.3

Nach der Grenzwertbildung $\Delta s \rightarrow 0$ und Beachtung von $\Delta \mathbf{r}(s = s_0) = \mathbf{0}$ sowie

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \Delta \mathbf{r}(s_0)}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}(s_0)}{ds} = \mathbf{e}_T(s_0) \quad (5.16)$$

folgt unter Beachtung der Beliebigkeit von s_0 die **Differentialgleichung des Schnittmoments**

$$\frac{d\mathbf{M}(s)}{ds} = -\mathbf{m}(s) - \mathbf{e}_T(s) \times \mathbf{Q}(s). \quad (5.17)$$

5.3 Stäbe und Balken

Gerade Stäbe und Balken. Im Folgenden beschränken wir uns auf die Betrachtung von geraden Stäben und Balken. Für die Orientierung des kartesischen Koordinatensystems relativ zum Linientragwerk gibt es unterschiedliche Konventionen. Da die später abgeleiteten Gleichungen von dieser Konvention abhängen, ist es wichtig, sich bei Verwendung der Gleichungen durchgängig an die eingeführte Konvention zu halten. Die x -Achse des kartesischen Koordinatensystems wird längs zum Stab oder Balken in der Tragwerksmittellachse angeordnet. Bei ebenen Problemen wird die z -Achse als vertikale Achse gewählt, wobei diese nach unten weist. Schneidet man einen geraden Stab oder Balken im Inneren, so bezeichnet man ein Schnittufer als **positiv**, wenn die x -Achse aus dem Teilkörper heraus weist. Anderenfalls ist das Schnittufer **negativ**. Abb. 5.3 zeigt das Freikörperbild eines Balkens, der zur Berechnung der Beanspruchungen im Inneren freigeschnitten wurde.

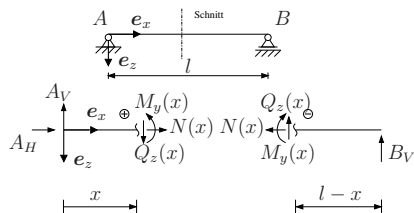


Abb. 5.3: Positives und negatives Schnittufer am Beispiel eines Balkens

Schnittgrößendifferentialgleichung für gerade Stäbe und Balken. Für gerade Stäbe und Balken, bei denen die x -Achse gleich der Längsachse ist, führt man folgende

Anm: $-\mathbf{e}_T \times \mathbf{Q} = -\mathbf{e}_x \times (\mathbf{Q}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{Q}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{Q}_z \mathbf{e}_z)$
 $= -\mathbf{Q}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{Q}_z \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Q}_z \\ -\mathbf{Q}_y \end{bmatrix}$

Gleichgewichtsbedingungen

mit Streckenlasten und
Streckenmomenten

$\hat{=}$ Kräfte gleichgewichtet

$$\frac{d}{ds} \underline{Q}(s) = -\underline{q}(s)$$

$\hat{=}$ Momenten gleichgewichtet

$$\frac{d}{ds} \underline{M}(s) = -\underline{m}(s) - \underline{e}_T(s) \times \underline{Q}(s)$$

Anm: $\square \underline{q}(s), \underline{m}(s)$ äußere Größen
(gegeben)

$\square \underline{e}_T(s)$: Geometrie (gegeben)

$\square \underline{Q}(s), \underline{M}(s)$ Schnittgrößen
(innere Beanspruchungen)

Schnittkraft

Schnittmoment

Gerade Balken ($s \hat{=} x$)

Größen: $\underline{Q}(x), \underline{M}(x), \underline{q}(x), \underline{m}(x)$



$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_T \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_T \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

3D-Gleichungen

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x) \quad \frac{dQ_y(x)}{dx} = -q_y(x) \quad \frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x)$$

$$\frac{dM_T(x)}{dx} = -m_T \quad \frac{dM_y(x)}{dx} = +Q_z(x) - m_y(x) \quad \frac{dM_z(x)}{dx} = -Q_y(x) - m_z(x)$$

Notation für die **Schnittkraft** ein

$$\mathbf{Q} = N\mathbf{e}_x + Q_y\mathbf{e}_y + Q_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

N ist eine Längskraft. Da N normal zur Schnittfläche orientiert ist, wird auch die Bezeichnung **Normalkraft** verwendet. Q_y und Q_z sind Querkräfte. Für das **Schnittmoment** ist die Notation

$$\mathbf{M} = M_T\mathbf{e}_x + M_y\mathbf{e}_y + M_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} M_T \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

gebräuchlich. M_T heißt **Torsionsmoment**. M_y und M_z heißen **Biegemomente**. Für die äußere Belastung werden die Notationen

$$\mathbf{q} = n\mathbf{e}_x + q_y\mathbf{e}_y + q_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} n \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{m} = m_T\mathbf{e}_x + m_y\mathbf{e}_y + m_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} m_T \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

verwendet. Es ist zu beachten, dass es sich bei diesen Größen um Streckenlasten handelt. Setzt man diese Bezeichnungen in die Differentialgleichungen für die Schnittgrößen ein, so erhält man bei Beachtung von $\mathbf{e}_T = \mathbf{e}_x$ und

$$\mathbf{e}_T \times \mathbf{Q} = -Q_z\mathbf{e}_y + Q_y\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -Q_z \\ +Q_y \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

folgenden Satz von sechs Differentialgleichungen

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x), \quad \frac{dQ_y(x)}{dx} = -q_y(x), \quad \frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x), \quad (5.23)$$

$$\frac{dM_T(x)}{dx} = -m_T(x), \quad \frac{dM_y(x)}{dx} = -m_y(x) + Q_z(x), \quad \frac{dM_z(x)}{dx} = -m_z(x) - Q_y(x). \quad (5.24)$$

Im ebenen Fall sind davon nur die drei Gleichungen

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x), \quad \frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x), \quad \frac{dM_y(x)}{dx} = -m_y(x) + Q_z(x) \quad (5.25)$$

relevant.

Sonderfall: ebene Probleme (gerade Balken)

$q_z(x) = q(x)$

$q_y(x) = 0$

$M_y(x) = M(x)$

$Q_x(x) = N(x)$

$Q_z(x) = Q(x)$

$n(x) = 0$

$m_y(x) = 0$

$m_z(x) = 0$

$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} N(x) \\ 0 \\ Q(x) \end{bmatrix}$

$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_y(x) \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}$

$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Einsetzen und Vereinfachen ($0=0$) ergibt: (siehe S. 55)

$\frac{d}{dx} N(x) = -n(x)$

$\frac{d}{dx} Q(x) = -q(x)$

$\frac{d}{dx} M(x) = Q(x)$

3 GGBen für den ebenen Fall (in vereinfachter Notation ($N = Q_x, Q = Q_z, \dots$))

Im ebenen Fall kann auf eine konsequente Indizierung verzichtet werden, so dass dann mit $Q_z = Q$, $q_z = q$, $M_y = M$ und $m_y = m$ kürzer

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = -m(x) + Q(x) \quad (5.26)$$

geschrieben werden kann.

Abgehend von der Schnittgrößendifferentialgleichung (5.25)₂ kann man in Abhängigkeit von $q(x)$ Aussagen zu dem qualitativen Verlauf von $Q(x)$ machen. Hat $q(x)$ einen Nulldurchgang, so besitzt $Q(x)$ eine Extremstelle. Ist die Funktion $q(x)$ nicht stetig sondern weist einen Sprung auf, so ist $Q(x)$ nicht stetig differenzierbar und hat einen Knick. Wenn $q(x)$ singulär ist, das ist z.B. bei einer Einzelkraft der Fall, so hat $Q(x)$ einen Sprung. Analoge Aussagen gelten für $M(x)$ in Abhängigkeit von $m(x)$ und $Q(x)$.

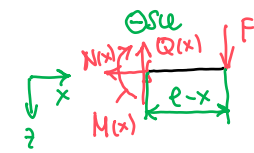
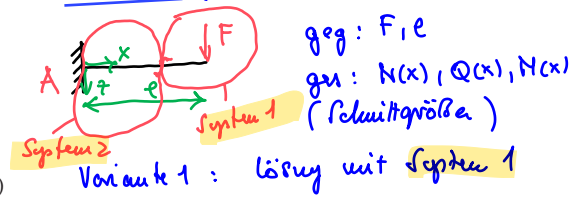
Vorgehensweise bei der Berechnung der Schnittgrößen. Bei der Berechnung der Schnittgrößen kann man folgendermaßen vorgehen:

- Der erste Schritt bei der Berechnung der Schnittgrößen in statisch bestimmten Stäben und Balken besteht in der Regel darin, dass man das gesamte Tragwerk freischneidet und die Lagerreaktionen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen berechnet.
- Man kann nun nach Einführung von einem oder mehreren Koordinatensystemen auf zwei unterschiedliche Weisen fortfahren.
 - Entweder man schneidet das Tragwerk im Inneren frei und trägt am Schnitthufer die gesuchten Schnittgrößen an, die wiederum aus den Gleichgewichtsbedingungen für das Teilsystem folgen,
 - oder man löst die Schnittgrößendifferentialgleichungen. In diesem Fall sind die Integrationskonstanten, die bei der Integration der Schnittgrößendifferentialgleichungen anfallen, aus den Lagerreaktionen zu bestimmen.

In Sonderfällen lassen sich die Schnittgrößen berechnen, ohne dass die Lagerreaktionen bestimmt werden.

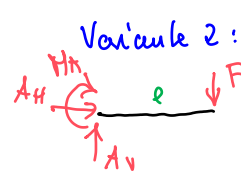
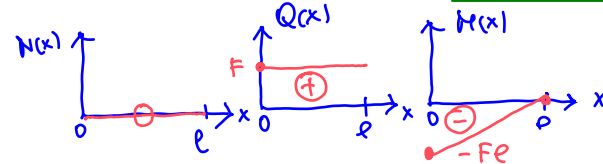
► **Beispiel: Schnittgrößenberechnung (Balken auf zwei Stützen).** Für den abgebildeten Balken (Abb. 5.4.a) auf zwei Stützen, dem eine dreiecksförmige Streckenlast aufgeprägt wird, berechne man die Lagerreaktionen und die Schnittgrößen. Die Berechnung soll sowohl mit den Gleichgewichtsbedingungen als auch mit den Schnittgrößendifferentialgleichungen vorgenommen werden. Wo sind die Querkraft und das Biegemoment extremal und welchen Wert haben diese Größen dort?

Beispiel (nicht mit Skript)



Variante 1: Lösung mit System 1

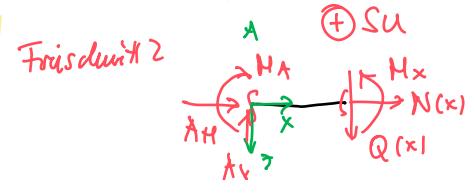
$$\begin{aligned} \rightarrow: 0 &= -N(x) & \Rightarrow N(x) &= 0 \\ \uparrow: 0 &= Q(x) - F & \Rightarrow Q(x) &= F \\ \curvearrowright: 0 &= -M(x) - F(l-x) & \Rightarrow M(x) &= -F(l-x) \end{aligned}$$



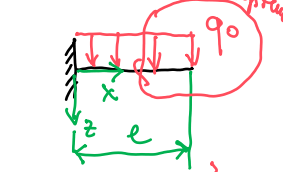
Variante 2: Lösung mit System 2

QGB

$$\begin{aligned} A_H &= 0 \\ A_V &= F \\ M_A &= -Fl \end{aligned}$$



Beispiel 2



QGB

$$\begin{aligned} A_H &= 0 \\ A_V &= q_0 l \\ M_A &= -q_0 l^2 / 2 \end{aligned}$$

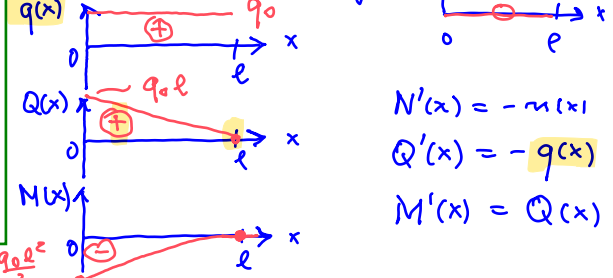
Freikörperbild



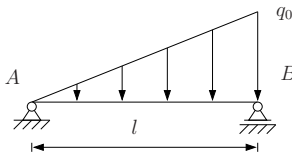
lösungsansatz: QGBen

$$\begin{aligned} \rightarrow: 0 &= N(x) \\ \uparrow: 0 &= Q(x) - F_R(x) = Q(x) - q_0(l-x) \\ \curvearrowright: 0 &= -M(x) - F_R(x)(l-x) = -M(x) - q_0 \frac{(l-x)^2}{2} \end{aligned}$$

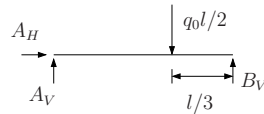
Grafische Darstellung



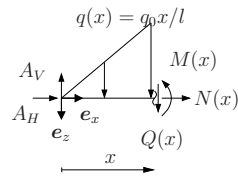
$$\begin{aligned} \Rightarrow N(x) &= 0 \\ \Rightarrow Q(x) &= q_0(l-x) \\ \Rightarrow M(x) &= -q_0 \frac{(l-x)^2}{2} \end{aligned}$$



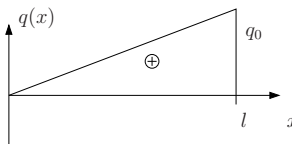
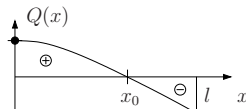
5.4.a: Tragwerk



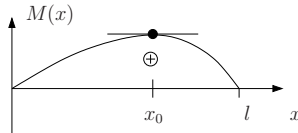
5.4.b: Freikörperbild



5.4.c: Schnittgrößen

5.4.d: Verlauf von $q(x)$ 

5.4.e: Querkraftverlauf



5.4.f: Momentenverlauf

Abb. 5.4: Balken auf zwei Stützen

Die Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen ergibt für die Lagerreaktionen: $A_H = 0$, $A_V = q_0 l / 6$, $B_V = q_0 l / 3$. Schneidet man den Balken an der Stelle x zwischen den Lagern frei (Abb. 5.4.c), so ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittgrößen des linken Teilsystems

$$N(x) = 0, \quad Q(x) = \frac{q_0 l}{6} \left(1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right), \quad M(x) = \frac{q_0 l^2}{6} \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right). \quad (5.27)$$

Die Verläufe der Schnittgrößen sind in Abb. 5.4.e und 5.4.f dargestellt.

Lösungsansatz 2: Schnittgrößen - DGLen
konkret im Beispiel

$$\begin{aligned} N'(x) &= -n(x) = 0 & N(x) &= C_1 = \text{konst} \\ Q'(x) &= -q(x) = -q_0 & Q(x) &= -q_0 x + C_2 \\ M'(x) &= +Q(x) = ? & M(x) &= -q_0 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \end{aligned}$$

äquivalent zu GDB

Integrationskonstante: C_1, C_2, C_3

folgen aus Rand- u. Übergangsbedingungen

1) Gleichgewicht horizontal

$$x=0: 0 = A_H + N(x)$$

$$0 = A_H^0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow N(x) = 0$$

2) Gleichgewicht vertikal

$$0 = A_V - Q(x) = q_0 l + q_0 x \Big|_{x=0} - C_2 = q_0 l - C_2 \Rightarrow C_2 = q_0 l$$

$$\Rightarrow Q(x) = -q_0 x + q_0 l$$

3) Momentengleichgewicht

$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 l x + C_3$$

$$\stackrel{\curvearrowright}{\underset{x=0}{0}} = M_A - M(x=0) = -q_0 \frac{l^2}{2} - C_3 \Rightarrow C_3 = -q_0 \frac{l^2}{2}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 l x - q_0 \frac{l^2}{2} \\ &= -q_0 \frac{(l-x)^2}{2} \\ &= -\frac{q_0}{2} (l^2 - 2lx + x^2) \\ &= -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 l x - q_0 \frac{l^2}{2} \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung der Schnittgrößen durch die Integration der zugehörigen Differentialgleichungen geht man folgendermaßen vor. Aus $N'(x) = -n(x)$ folgt wegen $n(x) = 0$, dass die Normalkraft im Balken konstant ist

$$N(x) = C_1. \quad (5.28)$$

Zur Bestimmung der Querkraft ist die Differentialgleichung $Q'(x) = -q(x) = -q_0 x/l$ zu integrieren. Es folgt

$$Q(x) = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C_2. \quad (5.29)$$

Wegen $M'(x) = Q(x)$ ergibt eine nochmalige Integration das Moment

$$M(x) = -\frac{q_0 x^3}{6l} + C_2 x + C_3. \quad (5.30)$$

Zur endgültigen Bestimmung der Schnittgrößen sind die Konstanten C_1 bis C_3 zu bestimmen. Diese können aus der Bedingung gewonnen werden, dass die Schnittgrößen konsistent zu den Lagerreaktionen sein müssen. Aus $A_H = 0$ folgt also $C_1 = 0$. Aus $M_A = 0$ folgt $C_3 = 0$ und aus $M_B = 0$ ergibt sich $C_2 = q_0 l/6$. Man erhält also wiederum das Ergebnis (5.27).

Es ist festzustellen, dass die Funktion $Q(x)$ streng monoton fallend ist. Die Bedingung $Q'(x) = 0$ ist daher zur Bestimmung der Extrema und der Extremstellen nicht verwendbar. Auf Grund des streng monotonen Verlaufs der Funktion liegen die Extremstellen am Rand. Die maximale Querkraft ist gleich $Q_{\max} = Q(0) = q_0 l/6$. Die minimale Querkraft ist gleich $Q_{\min} = Q(l) = -q_0 l/3$. Betragsmäßig ist die Querkraft allerdings bei $x = l$ maximal und hat dort den Betrag $|Q|_{\max} = q_0 l/3$.

Die Differentialgleichung für das Moment impliziert, dass bei einer Nullstelle der Querkraft das Moment extremal wird. Die Nullstelle der Querkraft liegt bei $x_0 = l/\sqrt{3}$. Das Biegemoment hat dort den Wert $M(x_0) = q_0 l^2/(9\sqrt{3})$. Es handelt sich um ein Maximum. Das Biegemoment hat den minimalen Wert $M_{\min} = 0$ bei $x = 0$ und $x = l$.

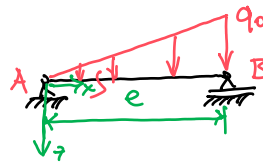
Lösung mit den Schnittgrößen-DGLn

$$\begin{aligned} N'(x) &= -n(x) & n &= 0 & \Rightarrow & N(x) = C_0 \\ Q'(x) &= -q(x) & q(x) &= \frac{q_0 x}{l} & \Rightarrow & Q'(x) = -\frac{q_0 x}{l} \\ M'(x) &= Q(x) & & & & Q(x) = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C_1 \end{aligned}$$

$$M'(x) = Q(x) = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C_1$$

$$M(x) = -\frac{q_0 x^3}{6l} + C_1 x + C_2$$

Beispiel auf zwei Stützen

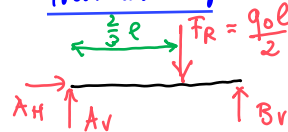


geg: q_0, l

ges: $N(x), Q(x), M(x)$

graf. Darstellung

Freischnitt links

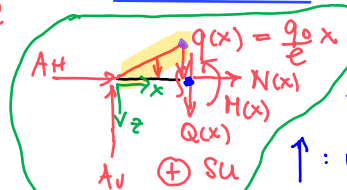


$$A_H = 0$$

$$A_V = \frac{q_0 l}{6}$$

$$B_V = \frac{1}{3} q_0 l$$

Freischnitt innen



$$\begin{aligned} \rightarrow: A_H + N(x) &= 0 \leadsto N(x) = 0 \\ \uparrow: 0 &= A_V - Q(x) - \frac{q(x)x}{2} = \frac{q_0 l}{6} - Q(x) - \frac{q_0 x^2}{2} \\ \hookrightarrow Q(x) &= \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{2} = \frac{q_0 l}{6} \left(1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$\curvearrowright: 0 = M(x) + q(x) \frac{x}{2} \frac{x}{3} - A_V x$$

$$M(x) = \frac{q_0 l^2}{6} \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right)$$

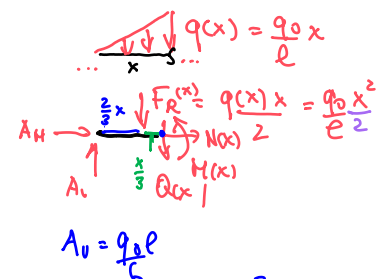
$$\textcircled{1} Q(x)$$

$$F_R(x) = \frac{q(x)x}{2} = \frac{q_0 x^2}{2l}$$

$$\uparrow: 0 = A_V - Q(x) - F_R(x) = A_V - Q(x) - \frac{q_0 x^2}{2l}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright: 0 &= -A_V x + M(x) + \underbrace{\frac{q(x)x}{2} \frac{x}{3}}_{\frac{q_0 x^3}{6l}} \\ &= -A_V x + M(x) + \frac{q_0 x^3}{6l} \end{aligned}$$

$$\leadsto M(x) = A_V x - \frac{q_0 x^3}{6l}$$



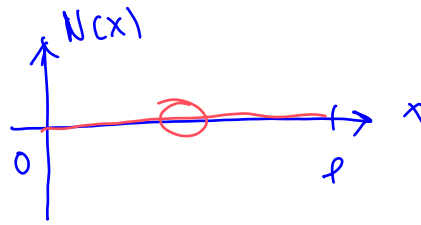
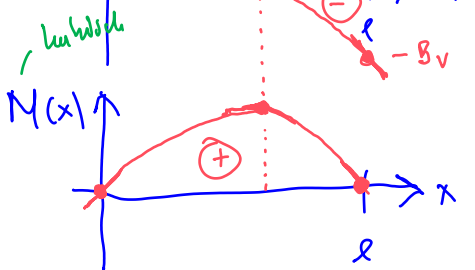
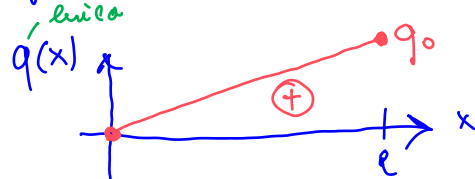
$$N(0) = N(l) = 0 \leadsto C_0 = 0$$

$$M(0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ Gl. für} \\ 2 \text{ Unbekannte} \end{array}$$

$$M(l) = 0$$

Lösung siehe oben $\textcircled{1}$
 $\textcircled{2}$

grafische Darstellung:



$$Q'(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = Q(x)$$

$$A_v = Q(0)$$

$$B_v = -Q(l)$$

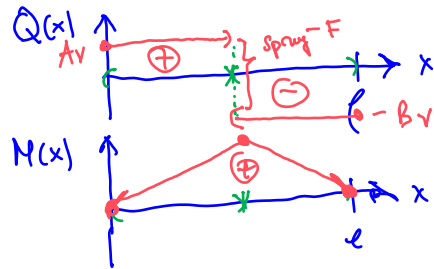
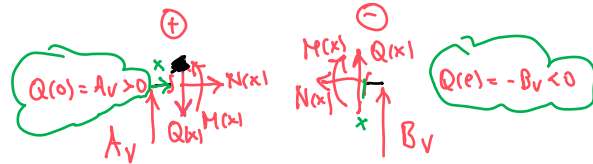


Schnittgrößenbestimmung : qualitativ



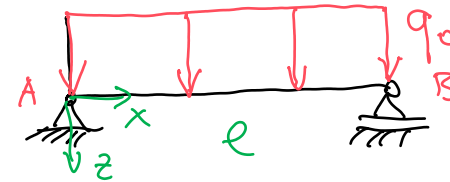
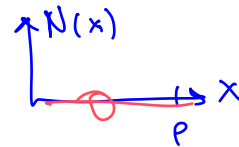
geg: F, l
ges: $N(x), Q(x), M(x)$

$$A_H = 0$$



$$\begin{aligned} Q'(x) &= -q(x) \\ N'(x) &= Q(x) \end{aligned}$$

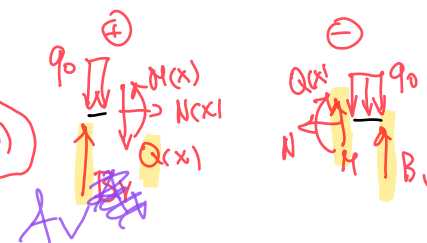
zu prüfen bei



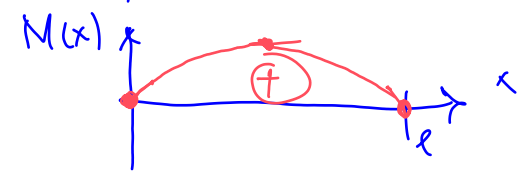
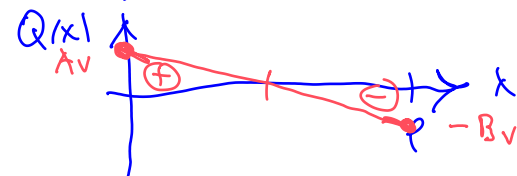
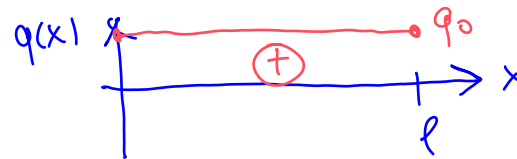
$$\text{z.B. } q_0 l = F$$



$$A_V = +Q(0)$$

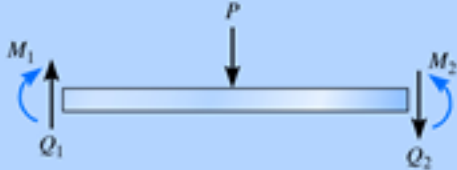
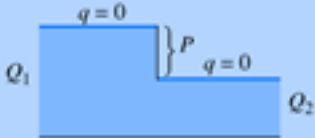
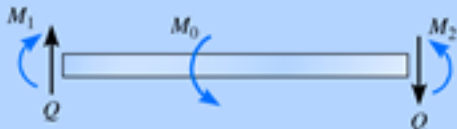
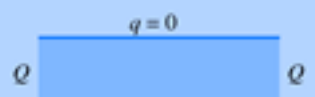
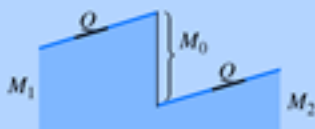
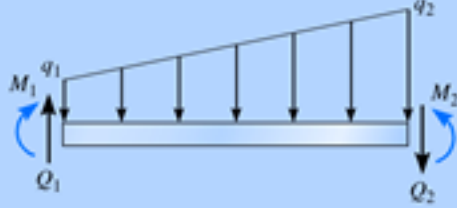
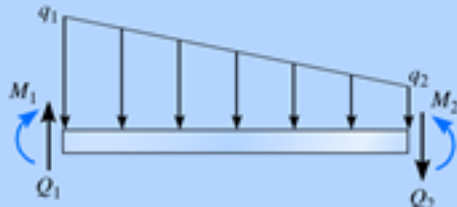


$$Q(l) = -B_V < 0$$

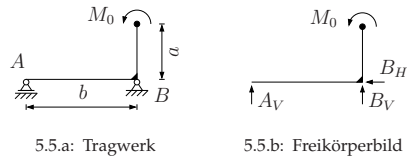


$$Q'(x) = -q(x)$$

Tabelle 6.1

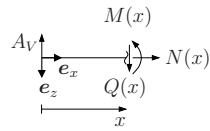
Lastfall	Querkraftlinie $\frac{dQ}{dx} = -q$	Momentenlinie $\frac{dM}{dx} = Q$
	 Abwärts gerichtete Kraft P verursacht einen Sprung von Q nach unten von Q_1 auf Q_2.	 Konstante Steigung ändert sich von Q_1 auf Q_2.
	 Keine Änderung der Querkraft, da Steigung $q = 0$.	 Konstante positive Steigung. Entgegen dem Uhrzeigersinn gerichtetes M_0 verursacht Sprung von M nach unten.
	 Konstante negative Steigung.	 Steigung, die von Q_1 auf Q_2 abnimmt.
	 Negative Steigung, die von $-q_1$ auf $-q_2$ betragsmäßig ansteigt.	 Steigung, die von Q_1 auf Q_2 abnimmt.
	 Negative Steigung, die von $-q_1$ auf $-q_2$ betragsmäßig abnimmt.	 Steigung, die von Q_1 auf Q_2 abnimmt.

► **Beispiel: Schnittgrößenberechnung (Abgewinkelter Balken auf zwei Stützen).** Berechnen Sie für den in Abb. 5.5.a dargestellten abgewinkelten Balken mit einem Einzelmoment die Schnittgrößen.

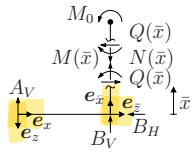


5.5.a: Tragwerk

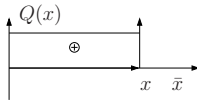
5.5.b: Freikörperbild



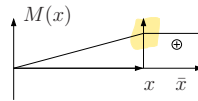
5.5.c: Schnittgrößen Bereich 1



5.5.d: Schnittgrößen Bereich 2



5.5.e: Querkraftverlauf



5.5.f: Momentenverlauf

Abb. 5.5: Abgewinkelter Balken auf zwei Stützen

Zur Bestimmung der Schnittgrößen führen wir die beiden dargestellten Koordinatensysteme ein. Im Bereich II kann man die Schnittgrößen ohne Kenntnis der Auflagergrößen berechnen. Es folgt

$$N^{II} = 0, \quad Q^{II} = 0, \quad M^{II} = M_0. \quad (5.31)$$

Zur Berechnung der Schnittgrößen im Bereich I genügt die Bestimmung der Reaktionskraft $A_V = M_0/b$. Für die Schnittgrößen folgt nach Freischneiden und Gleichgewichtsbildung

$$N^I = 0, \quad Q^I = A_V = \frac{M_0}{b}, \quad M^I = A_V x = \frac{M_0 x}{b}. \quad (5.32)$$

Da die beiden Koordinatensysteme so gewählt werden können, dass sie durch eine Drehung ineinander überführt werden können und kein Einzelmoment eingeleitet wird, ist der Momentenverlauf stetig.

5.4 Fachwerke

Fachwerke. Unter einem Fachwerk versteht man ein System, das aus gelenkig miteinander verbundenen Stäben besteht (Abb. 5.6). Bei einem ebenen Fachwerk liegen alle Stäbe in einer Ebene. Wir wollen vereinfachende Annahmen für die Berechnung der inneren Beanspruchungen eines Fachwerkes einführen. Ein **ideales Fachwerk** wird durch folgende Annahmen bestimmt:

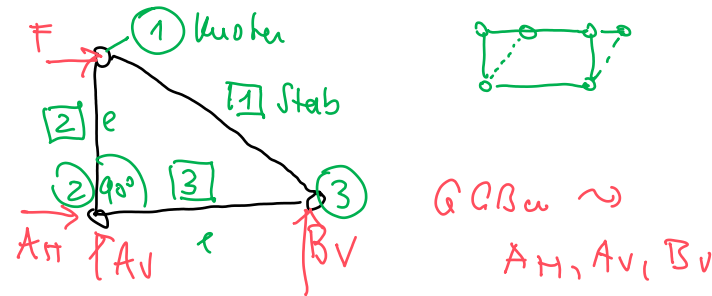
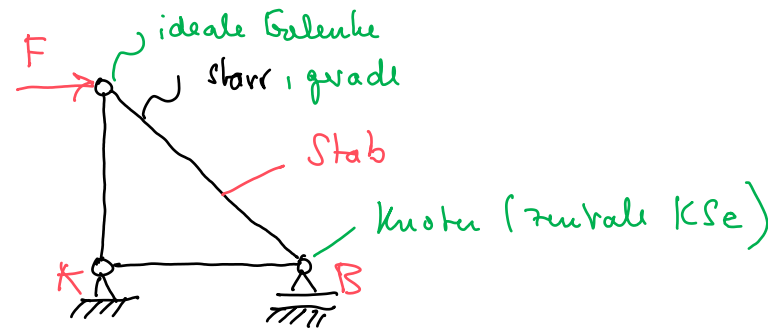
- Die Stäbe sind gerade.
- Die Stäbe sind in reibungsfreien Gelenken (**Knoten**) miteinander verbunden.
- Die äußeren Kräfte greifen nur an den Knoten an.
- Die Stabkräfte und die äußeren Kräfte bilden jeweils in jedem Knoten ein zentrales Kraftsystem.
- Das Fachwerk ist kinematisch bestimmt gelagert.

Auf Grund dieser Annahmen sind Stäbe nur durch Längskräfte beansprucht. Biegemomente treten nicht auf. Zur Berechnung der Stabkräfte kann man prinzipiell alle Knoten freischneiden und die jeweiligen äußeren Kräfte und Stabkräfte antragen (**Knotenschnittverfahren**). Die Richtung der unbekannten Stabkräfte weist per Konvention vom Knoten weg. Eine positive **Stabkraft** entspricht also einer Zugbelastung und eine negative einer Druckbelastung. Unbelastete Stäbe heißen **Nullstäbe**. Da die Stabkräfte und die äußeren Kräfte in jedem Knoten ein **zentrales Kraftsystem** bilden, ist das Momentengleichgewicht identisch erfüllt und es stehen zur Berechnung der Stabkraft die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Im dreidimensionalen Fall hat man $3k$ im ebenen Fall $2k$ Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Bei n Stäben liegen n unbekannte Stabkräfte S_i vor. Ist a_R die Anzahl der Reaktionskräfte in den Lagern, so ist das Abzählkriterium

$$n + a_R = 3k \quad (3D), \quad n + a_R = 2k \quad (2D) \quad (5.33)$$

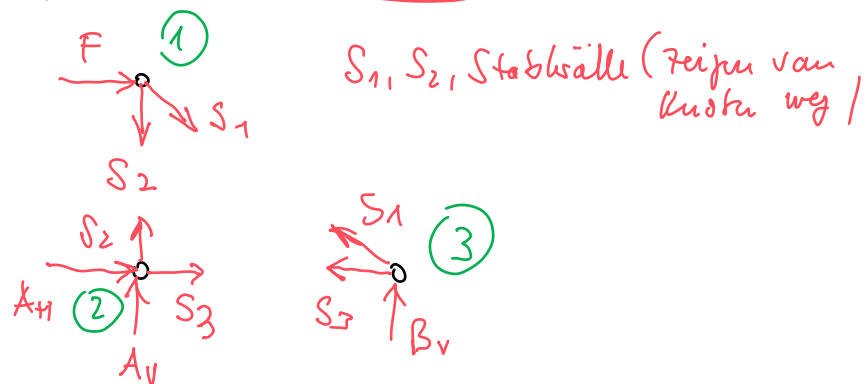
eine notwendige Bedingung für die Bestimmbarkeit der Stabkräfte und der Lagerreaktionen. Eine weitere notwendige Bedingung ist, dass die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems ungleich null ist. Beide Bedingungen zusammen sind notwendig und hinreichend. Zur Berechnung statisch unbestimmt gelagerter Fachwerke muss die Deformation der Stäbe berücksichtigt werden.

Um Nullstäbe eines kinematisch bestimmt gelagerten Fachwerks zu bestimmen, wendet man das Knotenschnittverfahren an. Man unterscheidet zwischen einem belasteten und einem unbelasteten Knoten.



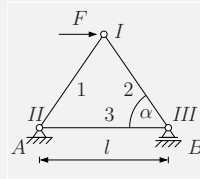
Stabkräfte?

Knotenschnittverfahren:

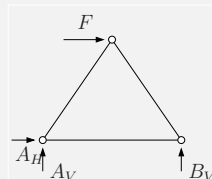


- Belasteter Knoten mit zwei Stäben, die nicht in gleicher Richtung liegen, und einer Einzelkraft: Die Kraft zeigt in Richtung eines der beiden Stäbe. Der Stab, der nicht die gleiche Richtung wie die Kraft hat, ist ein Nullstab.
- Unbelasteter Knoten mit zwei Stäben, die nicht in gleicher Richtung liegen: Beide Stäbe sind Nullstäbe.
- Unbelasteter Knoten mit drei Stäben: Zwei der drei Stäbe haben dieselbe Richtung. Der Stab der nicht die gleiche Richtung wie die zwei anderen Stäbe hat, ist ein Nullstab.

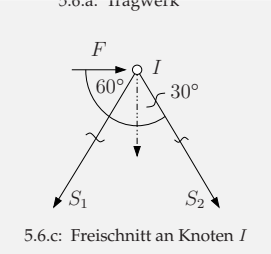
► **Beispiel: Fachwerk.** Für das Fachwerk aus Abb. 5.6 sind für $\alpha = 60$ die Lagerreaktionen und die Stabkräfte zu berechnen.



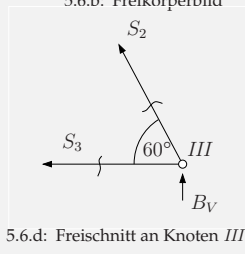
5.6.a: Tragwerk



5.6.b: Freikörperbild



5.6.c: Freischnitt an Knoten I



5.6.d: Freischnitt an Knoten III

Abb. 5.6: Einfaches Fachwerk aus drei gelenkig verbundenen Stäben

Zunächst schneiden wir das Fachwerk frei und tragen die Reaktionskräfte an. Für das so freigeschnittene Fachwerk ergeben die Gleichgewichtsbedingungen die Reaktionskräfte zu

$$A_H = -F, \quad A_V = -\frac{\sqrt{3}}{2}F, \quad B_V = \frac{\sqrt{3}}{2}F. \quad (5.34)$$

Für Knoten I lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: 0 = F - S_1 \cos(60^\circ) + S_2 \cos(60^\circ), \quad \downarrow: 0 = S_1 \sin(60^\circ) + S_2 \sin(60^\circ). \quad (5.35)$$

Daraus folgt

$$S_1 = -S_2, \quad S_1 = F, \quad S_2 = -F. \quad (5.36)$$

Für Knoten *III* gilt

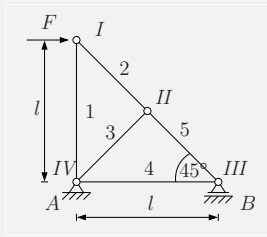
$$\leftarrow: 0 = S_3 + S_2 \cos(60^\circ), \quad \uparrow: 0 = B_V + S_2 \sin(60^\circ). \quad (5.37)$$

Aus beiden Gleichungen folgt jeweils

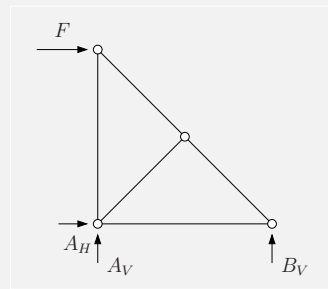
$$S_2 = -F, \quad S_3 = \frac{F}{2}. \quad (5.38)$$

Zur Berechnung der Stabkräfte hätten die Lagerreaktionen also nicht unbedingt berechnet werden müssen.

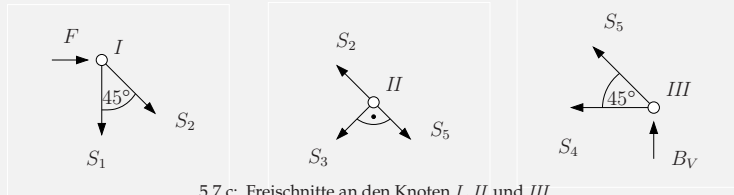
►**Beispiel: Fachwerk.** Bestimmen Sie in dem in Abb. 5.7 dargestellten Fachwerk die Nullstäbe. Welche Stäbe werden auf Zug und welche werden auf Druck belastet?



5.7.a: Tragwerk



5.7.b: Freikörperbild



5.7.c: Freischnitte an den Knoten *I*, *II* und *III*

Abb. 5.7: Fachwerk aus fünf gelenkig verbundenen Stäben

Nach der Nummerierung der Stäbe und Knoten schneiden wir Knoten *I* frei. Die Gleichgewichtsbedingungen für Knoten *I* lauten

$$\rightarrow: 0 = F + S_2 \sin(45^\circ), \quad \uparrow: 0 = -S_1 - S_2 \cos(45^\circ). \quad (5.39)$$

Es folgt

$$S_2 = -\sqrt{2}F, \quad S_1 = F. \quad (5.40)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für Knoten *II* folgt

$$S_5 = S_2, \quad S_3 = 0. \quad (5.41)$$

Für Knoten *III* gilt

$$\leftarrow: 0 = S_4 + S_5 \cos(45^\circ), \quad (5.42)$$

woraus sich

$$S_4 = F \quad (5.43)$$

ergibt. Die Stäbe 1 und 4 werden auf Zug, die Stäbe 2 und 5 auf Druck beansprucht. Der Stab 3 ist ein Nullstab.

Ritter'sches Schnittverfahren. Sollen nur einzelne Stabkräfte bestimmt werden, so ist das Ritter'sche Schnittverfahren anwendbar. Zunächst werden die Auflagerkräfte berechnet. Danach schneidet man das Fachwerk derart in zwei Teile, dass im ebenen Fall maximal drei (im dreidimensionalen Fall sechs) unbekannte Stabkräfte als Schnittkräfte erscheinen, die nicht durch einen Knoten hindurchgehen bzw. kein zentrales Kraftsystem bilden. Durch Auswertung der Momentengleichgewichte um geeignet gewählte Bezugspunkte können die gesuchten Stabkräfte nacheinander berechnet werden.

► **Beispiel: Ritter'sches Schnittverfahren.** Bestimmen Sie für das in Abb. 5.7 dargestellte Fachwerk die Stabkräfte S_2 und S_4 mit Hilfe des Ritter'schen Schnittverfahrens.

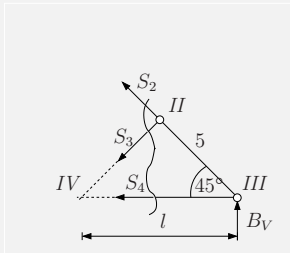


Abb. 5.8: Ritter'sches Schnittverfahren für die Berechnung der Kräfte S_2 und S_4

Nach dem Ritter'schen Schnittverfahren kann das Fachwerk durch die drei Stäbe 2, 3 und 4 freigeschnitten werden (Abb. 5.8). Die vertikale Auflagerreaktion im Punkt *B* ist (siehe Abb. 5.7.b)

$$\circlearrowleft_A: 0 = B_V l - F l \quad \Rightarrow \quad B_V = F. \quad (5.44)$$

Für die Berechnung der Kräfte S_2 und S_4 können zwei Momentengleichgewichte bzgl. des Knotens *IV* und *II* so erstellt werden, dass sie nur von einer der unbekannten Stabkräfte abhängen

$$\circlearrowleft_{IV}: 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} l S_2 + B_V l, \quad \circlearrowleft_{II}: 0 = -\frac{S_4 l}{2} + \frac{B_V l}{2}. \quad (5.45)$$

Der Vorteil des Verfahrens liegt darin, dass die einzelnen Stabkräfte ohne das Vorwissen der anderen Stabkräfte berechnet werden können. Die Berechnung ergibt die gleichen Ergebnisse wie das Knotenschnittverfahren

$$S_2 = -\sqrt{2}F, \quad S_4 = F. \quad (5.46)$$

Kapitel 6

Schwerpunkt und Massenmittelpunkt

6.1 Massendichte, Masse und Massenmittelpunkt

Massendichte und Masse. Im Rahmen der Kontinuumsmechanik führt man den Begriff der Massendichte oder **Dichte** ϱ ein, die die Masse pro Volumeneinheit spezifiziert und über den Grenzwert

$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (6.1)$$

definiert ist. Hierbei bezeichnet ΔV ein Volumenelement des Teilkörpers der Masse Δm . Die Massendichte ist als Feldgröße im Allgemeinen orts- und zeitabhängig $\varrho = \varrho(\mathbf{r}, t)$. Im Rahmen der Statik, auf die wir uns im Folgenden beschränken wollen, betrachtet man nur zeitunabhängige Zustände, so dass hier $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ gilt. Will man für die gegebene Massendichte $\varrho(\mathbf{r})$ eines materiellen Körpers dessen **Masse** m berechnen, so hat man das Integral

$$m = \int_V \varrho(\mathbf{r}) dV \quad (6.2)$$

auszuwerten. Die Integration ist über das Volumen des Körpers zu erstrecken. Ist die Massendichte im Körper konstant, so kann die Masse aus dem Produkt von Volumen V und Massendichte $\varrho = \varrho_0$ berechnet werden

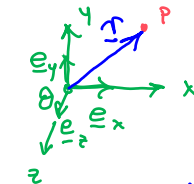
$$m = \int_V \varrho_0 dV = \varrho_0 V. \quad (6.3)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass für das **Volumen**

$$V = \int_V dV \quad (6.4)$$

gilt. Ist die Dichte ortsabhängig, also der Körper inhomogen, so lässt sich jedem Körper

Grundbegriffe: $\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Ortsvektor

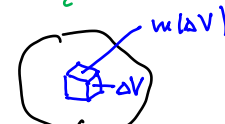


Massendichte $\varrho = \varrho(\underline{r}, t)$ t : Zeit

$$\varrho := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{m(\Delta V)}{\Delta V}$$

(Kontinuumsmechanik)

i. Allg. ist ϱ orts- und zeitabhängig



V : Volumen eines materiellen Körpers zum Zeitpunkt t

Masse m

$$m = \iiint_V \varrho(\underline{r}, t) dV = \int_V \varrho(\underline{r}, t) dV$$

Integrationsbereich

TH 112: Statik

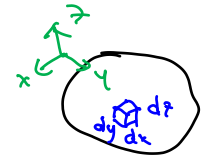
$\varrho = \varrho(\underline{r})$

Volumen V

$$V = \int_V dV = \iiint_V 1 dV$$

Volumen

Integrationsbereich



Volumenmittelpunkt $\underline{r}_V$

$$\underline{r}_V := \frac{1}{V} \int_V \underline{r} dV$$

Kartesische Koordinaten

$$dV = dx dy dz$$

Massenmittelpunkt $\underline{r}_m$

$$\underline{r}_m := \frac{1}{m} \int_V \varrho(\underline{r}) \underline{r} dV$$

Anm. 1: Sonderfall Massendichte $\varrho = \varrho_0 = \text{konst. im Körper}$ (homogener Körper)

$$1) m = \int_V \varrho dV = \int_V \varrho(\underline{r}) dV = \int_V \varrho_0 dV = \varrho_0 \int_V dV = \varrho_0 V$$

$$m = \varrho_0 V \quad m = \bar{\varrho} V$$

$$2) \underline{r}_m = \frac{1}{m} \int_V \varrho(\underline{r}) \underline{r} dV = \frac{1}{\varrho_0 V} \int_V \varrho_0 \underline{r} dV = \frac{\varrho_0}{\varrho_0 V} \int_V \underline{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \underline{r} dV = \underline{r}_V$$

Bei einem homogenen Körper gilt

$$\underline{r}_m = \underline{r}_V$$

eine **mittlere Massendichte**

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{V} \int_V \varrho(\mathbf{r}) dV \quad (6.5)$$

zuordnen. Die mittlere Massendichte $\bar{\varrho}$ entspricht dem **Volumenmittelwert** der Massendichte: $m = \bar{\varrho}V$. Es ist leicht einzusehen, dass im Sonderfall einer konstanten Massendichte $\varrho_0 = \bar{\varrho}$ gilt.

▼ **Ergänzung: Mehrfachintegrale.** Zur Berechnung der mittleren Massendichte (6.5) müssen die Mehrfachintegrale

$$V = \int_V dV = \int_V 1 dV, \quad m = \int_V \varrho(\mathbf{r}) dV \quad (6.6)$$

bestimmt werden. Beim ersten Integral ist der Integrand gleich eins, beim zweiten gleich $\varrho(\mathbf{r})$. Zur Berechnung der Mehrfachintegrale wird folgendermaßen vorgegangen: i) Auswahl einer Parametrisierung des betrachteten Integrationsgebiets (z. B. kartesische Koordinaten), ii) Darstellung von Integrand und Integrationsgrenzen mittels der gewählten Parametrisierung, iii) Ausführung der Integration. Wird die Integration beispielsweise in kartesischen Koordinaten ausgeführt, so gilt für die beiden Integrale

$$V = \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} dx dy dz, \quad m = \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} \varrho(x, y, z) dx dy dz, \quad (6.7)$$

wobei mit x_u und x_o usw. die unteren und oberen Grenzen bezeichnet werden.

Ein wichtiger Sonderfall sind konstante Integrationsgrenzen (im Falle kartesischer Koordinaten ist das Integrationsgebiet dann quaderförmig). Dann gilt für V

$$V = \int_{x_u}^{x_o} dx \int_{y_u}^{y_o} dy \int_{z_u}^{z_o} dz = (x_o - x_u)(y_o - y_u)(z_o - z_u). \quad (6.8)$$

Hat die Massendichte die einfache Form $\varrho(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$, so folgt bei konstanten Integrationsgrenzen

$$m = \int_{x_u}^{x_o} f_1(x) dx \int_{y_u}^{y_o} f_2(y) dy \int_{z_u}^{z_o} f_3(z) dz. \quad (6.9)$$

Sind die Integrationsgrenzen nicht konstant, so müssen ihre funktionellen Abhängigkeiten berücksichtigt werden. Für den Sonderfall $x_u, x_o, y_u, y_o, z_u = \text{konst.}$ und $z_o = z_o(x, y)$ gilt beispielsweise

$$V = \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} \int_{z_u}^{z_o(x,y)} dz dx dy = \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} z_o(x, y) dx dy - z_u(x_o - x_u)(y_o - y_u) \quad (6.10)$$

und

$$m = \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} \left(\int_{z_u}^{z_o(x,y)} \varrho(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (6.11)$$

Bei Mehrfachintegralen über Vektorfelder werden die oben dargelegten Regeln auf die Komponenten des Vektorfeldes angewendet.

Anm. 2: Integration in kartesischen Koordinaten

$$m = \int_V \varrho(\mathbf{r}) dV = \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} \varrho(x, y, z) dx dy dz \quad \text{Mehrfachintegral}$$

$$m \mathbf{r}_m = \int_V \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$$

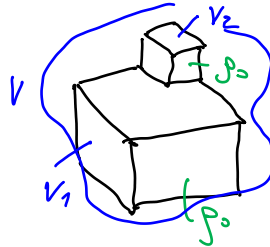
$$m r_{mx} = \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} \varrho(x, y, z) x dx dy dz = m r_m \cdot e_x$$

$$m r_{my} = \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} \varrho(x, y, z) y dx dy dz = m r_m \cdot e_y$$

Vereinfachte Berechnung von $\mathbf{r}_V$ und $\mathbf{r}_m$ durch Zerlegung von Körpern in Teilkörper

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_V &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV = \frac{1}{V} \left[\int_{V_1} \mathbf{r} dV + \int_{V_2} \mathbf{r} dV \right] \\ &= \frac{V_1}{V} \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \mathbf{r} dV + \frac{V_2}{V} \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \mathbf{r} dV \\ &= \frac{V_1}{V} \mathbf{r}_{V1} + \frac{V_2}{V} \mathbf{r}_{V2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_V &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{V_\alpha}{V} \mathbf{r}_{V\alpha} \\ V &= \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha \end{aligned}$$



analog folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_m &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{m} \mathbf{r}_{m\alpha} \\ m &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \end{aligned}$$

Siehe Beispiele S. 68 (unten)

Massenmittelpunkt und Volumenmittelpunkt. Neben Volumenmittelwerten gibt es Größen, die über einen **Massenmittelwert**, d.h. durch Integration über die Massenverteilung bestimmt werden. Der bei vielen Problemstellungen relevante Massenmittelpunkt ist eine solche Größe. Der Massenmittelpunkt ist folgendermaßen definiert

$$\mathbf{r}_m = \frac{1}{m} \int_m \mathbf{r} dm. \quad (6.12)$$

Das Integral kann durch Ausnutzung der Relation

$$dm = \rho dV \quad (6.13)$$

als

$$\mathbf{r}_m = \frac{1}{m} \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad (6.14)$$

geschrieben werden. Ist die Massendichte konstant, so lässt sich der Massenmittelpunkt auch mit dem **Volumenmittelpunkt** identifizieren

$$\mathbf{r}_V = \frac{1}{\rho_0 V} \int_V \rho_0 \mathbf{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV. \quad (6.15)$$

Unter Umständen kann der Massenmittelpunkt ganz oder teilweise ohne Berechnung bestimmt werden. Das ist der Fall, wenn der betrachtete Körper Symmetrien aufweist. Dieser Symmetriebegriff bezieht sich sowohl auf die Form des Körpers als auch auf dessen Dichteverteilung. Besitzt ein Körper eine **Symmetrieebene** oder **Symmetrieachse** im vorher genannten Sinne, so liegt der Massenmittelpunkt in dieser Symmetrieebene oder auf dieser -achse (Abb. 6.1). Für die Bestimmung des Volumenmittelpunktes ist allein die Symmetrie der Form des Körpers relevant.

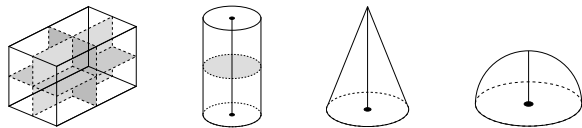


Abb. 6.1: Beispiele zur Symmetrie von Körpern

Zylinderkoordinaten sind durch folgende Transformationsvorschrift mit den kartesischen Koordinaten $\{x, y, z\}$ verknüpft

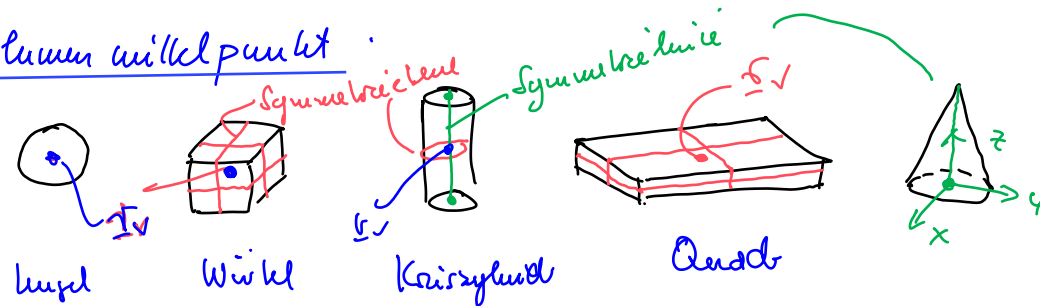
$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z. \quad (6.16)$$

Das Volumenelement hat in Zylinderkoordinaten die Form

$$dV = r dr d\varphi dz. \quad (6.17)$$

Vereinfachte Berechnung von $\mathbf{r}_V$ und $\mathbf{r}_m$ durch Ausnutzung von Symmetrien

Volumenmittelpunkt

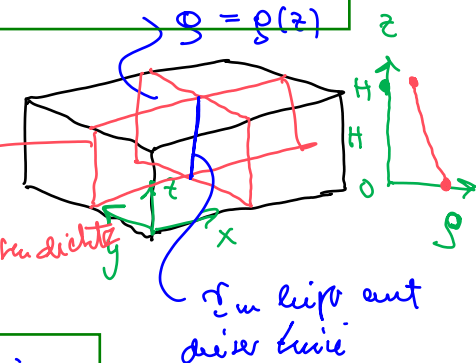


Wenn Symmetrieebenen oder -linien vor, dann liegt der Volumenmittelpunkt darauf.

Massenmittelpunkt

Symmetrieebenen für die Geometrie und die Massendichte

Wenn Symmetrieebenen o. -linien für die Geometrie und die Massendichte vor, dann liegt der Massenmittelpunkt (MMP) darauf.



Für **Kugelkoordinaten** gilt die Transformationsvorschrift

$$x = r \cos(\varphi) \sin(\vartheta), \quad y = r \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \quad z = r \cos(\vartheta). \quad (6.18)$$

Das Volumenelement hat in Kugelkoordinaten die Form

$$dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta. \quad (6.19)$$

► **Beispiel: Massenmittelpunkt eines inhomogenen Körpers.** Berechnen Sie für den in Abb. 6.2 dargestellten inhomogenen Quader den Massenmittelpunkt.

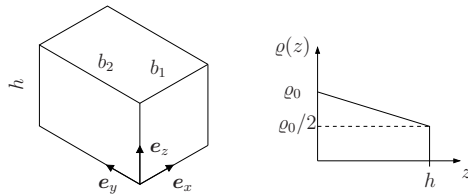


Abb. 6.2: Quader mit inhomogener Dichteverteilung

Der Massenmittelpunkt und der Volumenmittelpunkt sind unterschiedlich, da die Massendichte des Körpers inhomogen ist. Der Körper weist aber bezüglich der Geometrie und der Dichteverteilung zwei Symmetrielinien auf. Da der Massenmittelpunkt auf diesen Symmetrieebenen liegt, kann $x_m = b_1/2$ und $y_m = b_2/2$ gefolgert werden. Zur Bestimmung von z_m muss die Gleichung (6.14) ausgewertet werden. Die Dichteverteilung ist durch die Funktion $\rho(z) = \rho_0(1 - z/(2h))$ gegeben. Es gilt $\rho(z=0) = \rho_0$ und $\rho(z=h) = \rho_0/2$.

Als nächstes wird die Masse m bestimmt. Es gilt mit Gleichung (6.2)

$$m = \int_V \rho dV = \int_0^h \int_0^{b_2} \int_0^{b_1} \rho(z) dx dy dz = \frac{3}{4} \rho_0 b_1 b_2 h. \quad (6.20)$$

Für z_m folgt aus

$$m z_m = \int_0^h \int_0^{b_2} \int_0^{b_1} z \rho(z) dx dy dz = \frac{1}{3} \rho_0 b_1 b_2 h^2 \quad (6.21)$$

schließlich

$$z_m = \frac{4}{9} h. \quad (6.22)$$

► **Beispiel: Massenmittelpunkt eines homogenen Kegels.** Berechnen Sie für den in Abb. 6.3 dargestellten homogenen Kegel den Massenmittelpunkt.

Da der Kegel eine homogene Massendichte aufweist, ist der Massenmittelpunkt gleich dem Volumenmittelpunkt. Der Kegel hat eine Symmetrieachse, so dass $x_m = 0$ und $y_m = 0$ gelten. Die

Übersicht : Verschiedene Koordinatensysteme

1) Kartesische Koordinaten

Kartesische Koordinaten von P:

$$\{x, y, z\}$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

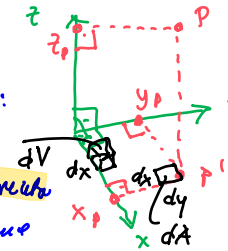
Ortsvektor

Flächenelement in x-y-Ebene

$$dA = dx dy$$

Volumenelement:

$$dV = dx dy dz$$



2) Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten $\{r, \varphi, z\}$

Koordinatenwandsformeln:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

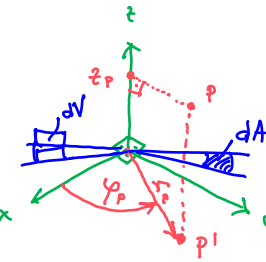
$$\text{Ortsvektor } \underline{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Volumenelement:

$$dV = r dr d\varphi dz$$

Flächenelement in der (r, φ) o. x-y-Ebene:

$$dA = r dr d\varphi$$



3) Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten: $\{r, \varphi, \vartheta\}$

ϑ : THETA

Ortsvektor:

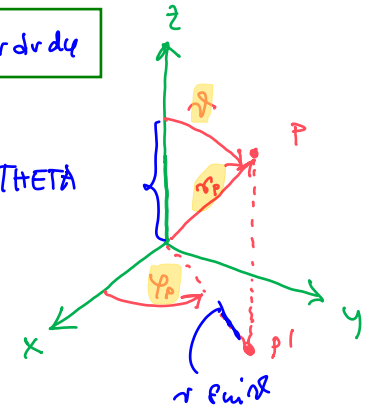
$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Koordinatenwandsformeln:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Volumenelement:

$$dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta$$



verbleibende Mittelpunktskoordinate folgt aus Gleichung (6.15). Setzt man den Radius des Kegels R als Funktion von z , d.h. $R(z) = R_0(1 - z/H)$ als variable Integrationsgrenze in Gleichung (6.4) ein, so erhält man

$$V = \int_{z=0}^H \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R(z)} r dr d\varphi dz = \frac{\pi}{3} H R_0^2. \quad (6.23)$$

Für z_m folgt aus

$$V z_m = \int_{z=0}^H \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R(z)} z r dr d\varphi dz = \frac{\pi}{12} H^2 R_0^2 \quad (6.24)$$

am Ende

$$z_m = \frac{H}{4}. \quad (6.25)$$

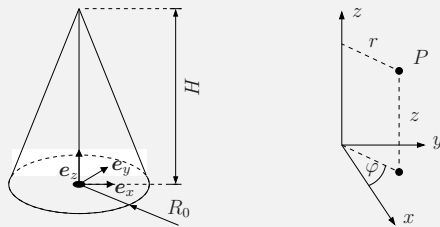


Abb. 6.3: Homogener Kegel (links), Darstellung der Punkte in Zylinderkoordinaten (rechts)

Massenmittelpunkt zusammengesetzter Körper. Oftmals ist der Massenmittelpunkt für einen Körper zu berechnen, der aus n Teilkörpern der Massen m_i ($i = 1, \dots, n$) besteht, deren jeweiliger Massenmittelpunkt $\mathbf{r}_{m_i}$ aus Symmetriegründen oder aus Tafelwerken bekannt ist (Abb. 6.4).

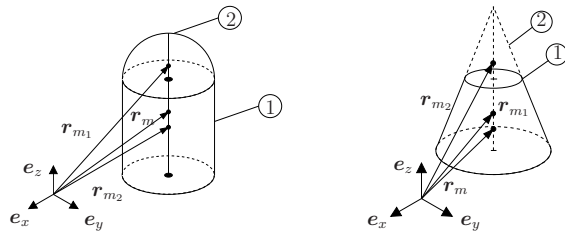
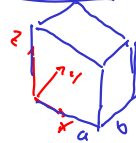


Abb. 6.4: Massenmittelpunkte zusammengesetzter Körper

Für diesen Fall soll die Berechnungsformel im Folgenden hergeleitet werden. Beachtet

- "Kochrezept":
- 1) geeigneter VCS wählen
 - 2) Integrationsgrenzen festlegen
 - 3) Integral bestimmen
 - 4) Integrale berechnen

Beispiele: Quader mit Schüttgut



Massendichte gegeben: $\rho = \rho(z) = \rho_0 - \frac{\rho_0}{c} z$

$$m = \int \rho dV = \int_{z=0}^c \left(\int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^a \rho(z) dx \right) dy \right) dz$$

Beispiel: Kugel mit homogener Massendichte, Radius R

$$\rho = \rho(r), R$$

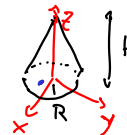


Gesucht: Gesamtmasse m

$$m = \int \rho dV = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \rho(r) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

= dV in Kugelkoordinaten

Beispiel: Kegel, Höhe H , Radius R



Gesucht: V, z_v

$$V = \int 1 dV = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{z_0(r)} r dz d\varphi dr$$

= dV in Zylinderkoordinaten

Voricht: Integrationsgrenze für z ist r -abhängig!

$$z_v = z_v(r) = 0, \quad z_0 = z_0(r) = H \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

man die Additivität des Integrals

$$\int_m \mathbf{r} dm = \sum_{i=1}^n \int_{m_i} \mathbf{r} dm_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{m_i}, \quad (6.26)$$

dann folgt aus Gleichung (6.14) für den Massenmittelpunkt

$$\mathbf{r}_m = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \mathbf{r}_{m_i}. \quad (6.27)$$

Ist die Massendichte des gesamten Körpers homogen verteilt, das heißt über den ganzen Körper konstant, so folgt

$$\mathbf{r}_V = \mathbf{r}_m = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V} \mathbf{r}_{V_i}, \quad (6.28)$$

wobei V_i das Volumen des i -ten Teilkörpers und $\mathbf{r}_{V_i}$ der dazugehörige Volumenmittelpunkt sind.

► **Beispiel: Massenmittelpunkt eines zusammengesetzten inhomogenen Körpers.** Zwei Zylinder mit den Massendichten ρ_1 und $\rho_2 = 2\rho_1$ mit den Radien $R_1 = 2a$, $R_2 = a$ und den Längsabmessungen $H_1 = a$, $H_2 = 2a$ werden gemäß Abb. 6.5 zu einem Körper zusammengefügt. Berechnen Sie den Massenmittelpunkt des Körpers.

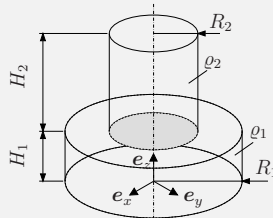


Abb. 6.5: Zusammengesetzter Körper aus zwei Zylindern

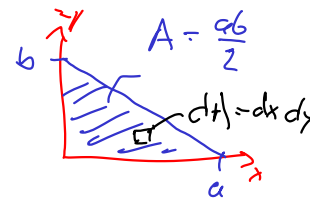
Da die Massendichte inhomogen ist, muss zwischen dem Massenmittelpunkt und dem Volumenmittelpunkt unterschieden werden. Der Körper hat für die Massenverteilung und die Geometrie eine Symmetrieachse, so dass zwei Massenmittelpunktskoordinaten sofort bestimmt werden können: $x_m = 0$ und $y_m = 0$. Die noch fehlende Koordinate z_m folgt aus Gleichung (6.27), deren z -Komponente durch

$$z_m = \frac{m_1}{m} z_{m1} + \frac{m_2}{m} z_{m2} \quad (6.29)$$

gegeben ist. Mit

$$m_1 = \rho_1 V_1, \quad m_2 = \rho_2 V_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad V_1 = \pi R_1^2 H_1, \quad V_2 = \pi R_2^2 H_2 \quad (6.30)$$

Beispiel für Mehrfachintegration



geg: a, b

ges: A durch Integration

Lösung: $A = \int 1 dA = \int_A 1 dA$

hier: Kartesisches KS, $dA = dx dy$

$$A = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} 1 dx dy$$

Fall 1: $y_0 = 0, y_1 = b \rightsquigarrow x_0 = 0, x_1(y) = a(1 - \frac{y}{b})$ $y=0 \rightsquigarrow x_0(0) = a$
 $y=b \rightsquigarrow x_0(b) = 0$

$$\begin{aligned} A &= \int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^{x_0(y)} 1 dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^b x \Big|_0^{x_0(y)} dy = \int_{y=0}^b a \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy \\ &= a \left(y - \frac{y^2}{2b} \right) \Big|_0^b = \dots = \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

Fall 2: $x_0 = 0, x_1 = a \rightsquigarrow y_0 = 0, y_1 = y_0(x)$ $y_0(0) = b$
 $y_0(a) = 0$
 $y_0(x) = b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=x_0}^{x_1} \left(\int_{y=y_0}^{y_0(x)} 1 dy \right) dx = \int_0^a y \Big|_0^{y_0(x)} dx \\ &= \int_0^a b \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \dots = \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

und

$$z_{m1} = \frac{H_1}{2}, \quad z_{m2} = H_1 + \frac{H_2}{2} \quad (6.31)$$

ergibt sich $z_m = 5a/4$.

► **Beispiel: Volumenmittelpunkt zusammengesetzter Körper.** Aus einem Zylinder mit dem Radius R und der Höhe H wird gemäß Abb. 6.6 ein kegelförmiges Volumen herausgetrennt. Bestimmen Sie den Volumenmittelpunkt des Körpers.

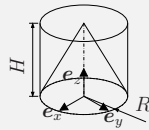


Abb. 6.6: Zylinder mit kegelförmiger Aussparung

Wegen der vorliegenden Symmetrieachse gilt: $x_V = 0$ und $y_V = 0$. Die noch fehlende Koordinate z_V folgt aus Gleichung (6.28)

$$z_V = \frac{V_1}{V} z_{V1} + \frac{V_2}{V} z_{V2}, \quad V = V_1 + V_2. \quad (6.32)$$

Man beachte, dass das Volumen des zweiten Teil'körpers' negativ ist. Aus

$$V_1 = \pi R^2 H, \quad V_2 = -\frac{\pi}{3} R^2 H \quad (6.33)$$

und

$$z_{V1} = \frac{H}{2}, \quad z_{V2} = \frac{H}{4} \quad (6.34)$$

ergibt sich

$$z_V = \frac{5}{8} H. \quad (6.35)$$

Der Volumenmittelpunkt ist unabhängig vom Radius R .

► **Beispiel: Volumenmittelpunkt zusammengesetzter Körper.** Auf einem Zylinder mit dem Radius R und der Höhe H_1 wird wie in Abb. 6.7 dargestellt ein kegelförmiger Körper der Höhe H_2 aufgesetzt. Bestimmen Sie den Volumenmittelpunkt des Gesamtkörpers.

Beispiel: Kegel. 1) Volumen, 2) $\bar{z}_V$
geg. R, H , ges. $V, \bar{z}$

Lösung

$$V = \iiint_V dV = \int_{z=0}^{z=H} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r(z)} r \, dr \right) d\varphi \, dz$$

$r(0) = R, r(H) = 0$
mit $r(z) = R \left(1 - \frac{z}{H}\right)$

$$= \int_{z=0}^H \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{r(z)} d\varphi \, dz$$

$$= \int_{z=0}^H \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 d\varphi \right) dz = 2\pi \int_{z=0}^H \frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz$$

$$= \dots = \frac{\pi}{3} H R^2$$

↻

Integration mit Substitution

$$z_V = \frac{1}{V} \iiint_V z \, dV = \int_{z=0}^H \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r(z)} z r \, dr \, d\varphi \, dz = \dots = \frac{H}{4}$$

Symmetrie: $x_V = y_V = 0$

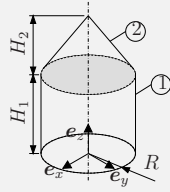


Abb. 6.7: Zylinder mit kegelförmigem Aufsatz

Wegen der vorliegenden Symmetrieachse gilt: $x_V = 0$ und $y_V = 0$. Die fehlende Koordinate z_V kann aus Gleichung (6.28) berechnet werden:

$$z_V = \frac{V_1}{V} z_{V1} + \frac{V_2}{V} z_{V2}, \quad V = V_1 + V_2. \quad (6.36)$$

Die Volumina von Zylinder und Kegel ergeben sich in Abhängigkeit von R , H_1 und H_2 zu

$$V_1 = \pi R^2 H_1, \quad V_2 = \frac{\pi}{3} R^2 H_2, \quad V = \pi R^2 (H_1 + H_2/3). \quad (6.37)$$

Die Volumenmittelpunkte der beiden Teilkörper haben folgende z -Komponenten:

$$z_{V1} = \frac{H_1}{2}, \quad z_{V2} = H_1 + \frac{H_2}{4}. \quad (6.38)$$

Daraus folgt

$$z_V = \frac{H_1^2/2}{H_1 + H_2/3} + \frac{\frac{1}{3}(H_1 H_2 + H_2^2/4)}{H_1 + H_2/3}. \quad (6.39)$$

Der Volumenmittelpunkt hängt demnach zwar von den beiden Höhen H_1 und H_2 ab, ist jedoch unabhängig vom Radius R .

▼ **Ergänzung: Impulsbilanz.** Die **Impulsdichte** eines materiellen Körpers ist durch das Produkt von Massendichte ρ und Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ (siehe Gleichung (2.52)) gegeben: $\rho \mathbf{v}$. Die Impulsdichte ist im Allgemeinen wie die Massendichte und die Geschwindigkeit orts- und zeitabhängig. Der **Impuls** $\mathbf{p}$ eines Körpers berechnet sich durch Integration der Impulsdichte über das Volumen des Körpers

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_m \mathbf{v} dm. \quad (6.40)$$

Unter Beachtung der **Massenbilanz** eines materiellen Körpers $dm/dt = 0$ oder äquivalent

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} \int_m dm = 0 \quad (6.41)$$

lässt sich zeigen, dass die zeitliche Änderung des Impulses durch

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m \mathbf{v} dm = \int_m \dot{\mathbf{v}} dm = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dV \quad (6.42)$$

gegeben ist. Beschränkt man sich nicht auf statische Gleichgewichtslagen sondern schließt die Bewegung von materiellen Körpern infolge von Kräften in die Betrachtung ein, so müssen

die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte und Momente verallgemeinert werden. Die Verallgemeinerung der Gleichgewichtsbedingung führt zur **Impulsbilanz**, die besagt, dass die zeitliche Impulsänderung eines materiellen Körpers gleich der Summe der angreifenden Kräfte ist:

$$\int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dV = \int_V \mathbf{f}_V dV + \int_A \mathbf{t} dA. \quad (6.43)$$

Die Impulsbilanz wird auch als **Impulssatz** bezeichnet. Eine eingehende Diskussion der Impulsbilanz wird im Rahmen der Kinetik in TMIII gegeben.

▼ **Ergänzung: Massenmittelpunktssatz.** Bei Verwendung des Massenmittelpunktes lässt sich eine spezielle Formulierung der Impulsbilanz - der Massenmittelpunktssatz - gewinnen, der sich insbesondere bei der Behandlung starrer Körper bewährt. Der im Allgemeinen zeitabhängige Massenmittelpunkt $\mathbf{r}_m$ eines materiellen Körpers ist durch

$$m \mathbf{r}_m = \int_m \mathbf{r} dm \quad (6.44)$$

definiert. Leitet man diesen Ausdruck nach der Zeit ab und beachtet die Massenbilanz in der Form $\dot{m} = 0$, dann folgt

$$m \dot{\mathbf{r}}_m = \int_m \dot{\mathbf{r}} dm. \quad (6.45)$$

Wir sehen, dass der Impuls eines Körpers durch das Produkt von Masse und Massenmittelpunktsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_m = \dot{\mathbf{r}}_m$ berechnet werden kann

$$\int_V \rho \mathbf{v} dV = m \mathbf{v}_m. \quad (6.46)$$

Für die zeitliche Änderung des Impulses des Körpers gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = m \dot{\mathbf{v}}_m = m \mathbf{a}_m \quad (6.47)$$

mit der Massenmittelpunktsbeschleunigung $\mathbf{a}_m$ (siehe Gleichung (2.53)). Die Impulsbilanz lässt sich dann in Form des Massenmittelpunktssatzes angeben

$$m \dot{\mathbf{v}}_m = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}_V dV + \int_A \mathbf{t} dA. \quad (6.48)$$

Fasst man die äußeren Kräfte in der resultierenden Kraft $\mathbf{F}$ zusammen, dann hat der Impulssatz die Form: $m \mathbf{a}_m = \mathbf{F}$. Bei einem eindimensionalen Problem vereinfacht sich diese vektorielle Gleichung zu: $m a_m = F$.

6.2 Gewichtskraft und Schwerpunkt

Newtonsches Gravitationsgesetz. Als erstes Kraftgesetz soll das **Newton'sche Gravitationsgesetz** eingeführt werden. Es macht eine Aussage zu der Kraft, die

zwei materielle Körper aufeinander ausüben. Zwei materielle Körper mit den Massen m_1 und m_2 üben aufeinander die Anziehungskraft

$$F = |\mathbf{F}| = \Gamma \frac{m_1 m_2}{\Delta r^2} \quad (6.49)$$

aus (Abb. 6.8). Dabei bezeichnet $\Delta r = |\mathbf{r}_{m_1} - \mathbf{r}_{m_2}|$ den Abstand der beiden Massenmittelpunkte und $\Gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ die universelle **Gravitationskonstante**. Der Betrag der Kraft ist also proportional zu den beiden Massen und umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat Δr^2 . Bei dieser Formulierung des Gravitationsgesetzes wird vorausgesetzt, dass die Ausdehnung der beiden Körper im Vergleich zu deren Abstand klein ist. In Folge dessen kann die Lage der beiden Massen durch Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ angegebenen werden, die den Massenmittelpunkten der beiden Massen entsprechen. Die Richtung der Anziehungskräfte weist bei Masse m_1 von $\mathbf{r}_{m_1}$ nach $\mathbf{r}_{m_2}$ und bei Masse m_2 von $\mathbf{r}_{m_2}$ nach $\mathbf{r}_{m_1}$, also entgegengesetzt. Das Gravitationsgesetz kann somit auch in folgender Vektornotation angegeben werden

$$\mathbf{F}_1 = \Gamma \frac{m_1 m_2}{\Delta r^2} \frac{\mathbf{r}_{m_2} - \mathbf{r}_{m_1}}{\Delta r}, \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \Gamma \frac{m_1 m_2}{\Delta r^2} \frac{\mathbf{r}_{m_1} - \mathbf{r}_{m_2}}{\Delta r}. \quad (6.50)$$

Die Kraft $\mathbf{F}_1$ wirkt auf die Masse m_1 , $\mathbf{F}_2$ bezieht sich analog dazu auf m_2 .

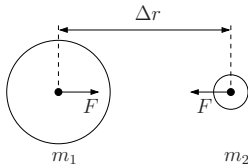


Abb. 6.8: Gravitationskraft zwischen zwei massenbehafteten Körpern

Gewichtskraft. Im Rahmen der Technischen Mechanik sind vor allem die Implikationen des Gravitationsgesetzes für materielle Körper auf der Erdoberfläche von Interesse. Bezeichnet man die Masse der Erde mit m_E und die Masse des materiellen Körpers mit m und führt weiterhin den mittleren Radius der Erde mit R_E sowie den Abstand des MMPs des Körpers zum mittleren Erdradius mit H ein, so ergibt das Gravitationsgesetz folgenden Ausdruck für den Betrag der **Gewichtskraft** des Körpers

$$G = |\mathbf{G}| = \Gamma \frac{m_E m}{(R_E + H)^2} \approx \Gamma \frac{m_E m}{R_E^2}. \quad (6.51)$$

Zur Berechnung von G kann ausgenutzt werden, dass H sehr viel kleiner als R_E ist ($R_E \gg H$). Führt man die **Erdbeschleunigung** $g = \Gamma m_E / R_E^2$ ein, so erhält man für die

Gewichtskraft eines Körpers mit der Masse m im Schwerfeld nahe der Erdoberfläche:

$$G = |\mathbf{G}| = mg. \quad (6.52)$$

Wir wollen nun eine vektorielle Notation für die Gewichtskraft gewinnen. Für das Differential der Gewichtskraft gilt nach Gleichung (6.52) $dG = gdm = g\rho dV$. Die Richtung der Gewichtskraft weist vom Massenmittelpunkt der Masse m zum Massenmittelpunkt der Erde und wird im Folgenden mit $\mathbf{e}$ gekennzeichnet, wobei $\mathbf{e}$ normiert ist, das heißt es gilt $|\mathbf{e}| = 1$. Damit folgt also $d\mathbf{G} = \rho g \mathbf{e} dV$ oder mit $\mathbf{g} = g\mathbf{e}$

$$\mathbf{G} = \int_m \mathbf{g}(\mathbf{r}) dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV. \quad (6.53)$$

Die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung wurde hier wieder berücksichtigt. Da die Gewichtskraft durch Integration von $\mathbf{g}$ über die Massen berechnet wird, nennt man $\mathbf{g}$ auch **Massenkraftdichte**. Dagegen ist das spezifische Gewicht $\gamma = \rho \mathbf{g}$ eine **Volumenkraftdichte**, da die Gewichtskraft aus der Integration des spezifischen Gewichtes über das Volumen folgt

$$\mathbf{G} = \int_V \gamma(\mathbf{r}) dV. \quad (6.54)$$

Schwerpunkt. Die Gewichtskraft ist die Resultierende der Volumenkraftdichte γ . Der Angriffspunkt dieser Resultierenden kann prinzipiell nicht eindeutig sein, da die Verschiebung einer Einzelkraft längs ihrer Wirkungslinie auf ein äquivalentes Kraftsystem führt. Wir wollen nun die Wirkungslinie der Gewichtskraft bestimmen. Dabei gehen wir von einer ortsunabhängigen Massenkraftdichte $\mathbf{g}$ aus. Die Wirkungslinie lässt sich aus der Forderung bestimmen, dass die resultierenden Momente der Massenkraftdichte $\mathbf{g}$ und der Gewichtskraft $\mathbf{G}$ gleich sind

$$\int_m (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{g} dm = (\mathbf{r}_s - \mathbf{c}) \times \mathbf{G}. \quad (6.55)$$

Bei $\mathbf{r}_s$ handelt es sich zunächst nur um einen Punkt auf der Wirkungslinie. Der Bezugspunkt $\mathbf{c}$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit null gesetzt werden. Wegen $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ und $\mathbf{g} = g\mathbf{e}$ folgt nach kurzer Zwischenrechnung

$$\left(\mathbf{r}_s - \frac{1}{m} \int_m \mathbf{r} dm \right) \times \mathbf{e} = 0. \quad (6.56)$$

Aus dieser Gleichung kann mit Gleichung (6.12) zunächst nicht geschlossen werden, dass $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_m$ gilt, da auf Grund des Kreuzproduktes mögliche Anteile von $\mathbf{r}_s$ kollinear zu $\mathbf{e}$ unberücksichtigt bleiben. Man kann aber festhalten, dass der Vektor $\mathbf{r}_s$ kollinear zu $\mathbf{e}$ ist. Damit ist aber die Wirkungslinie der Gewichtskraft bestimmt, denn diese kann

durch

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_m + \lambda \mathbf{m} \mathbf{e} \quad (6.57)$$

angegeben werden. Ohne **Zusatzannahme** kann $\mathbf{r}_s$ nicht weiter spezifiziert werden. Eine solche Annahme wird aber **in der Technischen Mechanik** eingeführt. Fordert man,

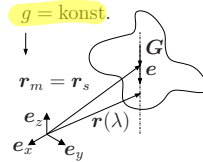


Abb. 6.9: Schwerpunkt eines Körpers im Raum

dass $\mathbf{r}_s$ **unabhängig von der Orientierung des Körpers im Schwerfeld** und damit unabhängig von $\mathbf{e}$ ist, so folgt (Abb. 6.9)

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_m. \quad (6.58)$$

Die Größe $\mathbf{r}_s$ heißt in diesem Fall **Schwerpunkt** des Körpers. Es soll noch einmal betont werden, dass der Schwerpunkt nur mit dem Massenmittelpunkt übereinstimmt, wenn die Massenkraftdichte g konstant ist. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, dann führt die Annahme, dass $\mathbf{r}_s$ unabhängig von der relativen Lage des Körpers im Schwerfeld ist, im Allgemeinen zu keinem eindeutigen Punkt.

Kapitel 7

Arbeit, Energie und Prinzip der virtuellen Verschiebungen

7.1 Leistung, Arbeit und Energie

Arbeit einer Kraft und eines Moments. Im Folgenden soll ein Ausdruck für die Arbeit gefunden werden, die geleistet wird, wenn sich ein Punkt im Zeitintervall $t \in [t_1, t_2]$ infolge der zeitabhängigen Einzelkraft $\mathbf{F}(t)$ entlang der Raumkurve $\mathbf{r}(t)$ bewegt. Dazu muss die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ verwendet werden, die eine kinematische Größe ist (siehe Kap. 2). Als **Leistung** L einer Kraft bezeichnet man das Skalarprodukt der Einzelkraft mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Punktes: $L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Die zugehörige **Arbeit** ist durch das Integral der Leistung über die Zeit gegeben

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt. \quad (7.1)$$

Unter Verwendung des Differentials $\mathbf{v}(t)dt = d\mathbf{u} = d\mathbf{r}$ ergibt sich folgende alternative Darstellung

$$A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.2)$$

mit $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ und $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$. Die **Einheit** der Arbeit kann z.B. mit J=Nm angegeben werden. Es ist zu beachten, dass von der Kraft nur der Anteil tangential zur Raumkurve in die Berechnung der Arbeit eingeht. Ist die **Kraft im betrachteten Zeitintervall konstant**, so vereinfacht sich der Ausdruck für die Arbeit zu

$$A_{12} = \mathbf{F} \cdot \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (7.3)$$

Sind der Kraftvektor und die Ortsvektordifferenz kollinear, so folgt als weiterer

Sonderfall

$$A_{12} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = F(r_2 - r_1) = F \Delta r, \quad (7.4)$$

d.h. die Arbeit ist gleich dem Produkt von Kraft und Weg.

Als Leistung eines Moments bezeichnet man das Skalarprodukt des Moments mit der zugehörigen **Winkelgeschwindigkeit** ω . Die zugehörige Arbeit ist durch das Integral der Leistung über die Zeit gegeben

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) dt. \quad (7.5)$$

Im Folgenden betrachten wir nur den Sonderfall, dass $\mathbf{M}$ und $\boldsymbol{\omega}$ kollinear sind und deren Richtung zeitunabhängig ist. In diesem Fall folgt

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} M(t) \omega(t) dt. \quad (7.6)$$

Unter Verwendung des Differentials $\omega(t) dt = d\varphi$ ergibt sich die alternative Darstellung

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi. \quad (7.7)$$

Ist das **Moment** im betrachteten Zeitintervall **konstant**, so vereinfacht sich der Ausdruck für die Arbeit zu

$$A_{12} = M \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7.8)$$

Diese Formeln gelten aber nur unter den genannten Voraussetzungen, die im Allgemeinen nicht gegeben sind.

Konservative Kräfte und Momente. Als konservativ bezeichnet man Kräfte und Momente, wenn Sie explizit nur vom Ort abhängen und sich aus einem **Potential** $U_F(\mathbf{r})$ berechnen lassen. Für eine **konservative Kraft** gilt

$$\mathbf{F} = -\frac{dU_F(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}. \quad (7.9)$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis hat diese Gleichung die Komponentendarstellung

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U_F(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial U_F(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial U_F(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Bei einem eindimensionalen Problem gilt: $F(x) = -dU_F(x)/dx$.

Potential $U_F = U_F(x, y, z)$ skalare Größe
 $\leadsto$ Berechnung von $\underline{F}$

Ein klassisches Beispiel für eine konservative Kraft ist die in einer linearen Feder wirkende Kraft: $F = -C(x - x_0)$. Die Größe C heißt **Federsteifigkeit**. Die Integration der Federgleichung ergibt für das Potential: $U_F(x) = C(x - x_0)^2/2 + U_0$. Die Integrationskonstante U_0 ist ohne Relevanz, da sie in die Berechnung der Kraft nicht eingeht. Auch eine konstante Gewichtskraft ist konservativ. Hat diese den Betrag G und weist in negative x -Richtung, so gilt: $F = -Ge_x$. Als Potential ergibt sich: $U_F(x) = Gx + U_0$.

Konservative Drehmomente werden im Rahmen dieses Skriptes nur für den skalaren Fall betrachtet. Für ein **konservatives Moment** gilt im skalaren Fall

$$M = -\frac{dU_M(\varphi)}{d\varphi} \quad (7.11)$$

Für ein konstantes Moment M hat das zugehörige Potential die Form: $U_M(x) = -M\varphi + U_0$. Ein weiteres Beispiel für ein konservatives Moment ist das in einer linearen **Drehfeder** der Verdrehung entgegen wirkende Moment: $M = -C_d(\varphi - \varphi_0)$. Die Größe C_d heißt **Drehfedersteifigkeit**. Die Integration der Federgleichung ergibt für das Potential: $U_M(x) = C_d(\varphi - \varphi_0)^2/2 + U_0$.

Potentielle Energie. Für die Arbeit einer konservativen Kraft ergibt sich aus den vorangegangenen Betrachtungen

$$A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{\partial U_F(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dU_F(\mathbf{r}) = -(U_F(\mathbf{r}_2) - U_F(\mathbf{r}_1)). \quad (7.12)$$

Die von einer konservativen Kraft geleistete Arbeit ist gleich der negativen Potentialdifferenz $\Delta U_F = U_F(\mathbf{r}_2) - U_F(\mathbf{r}_1)$. Die Arbeit A_{12} ist also **wegunabhängig**, d.h. unabhängig von der speziellen Form der Raumkurve $\mathbf{r}(t)$ zwischen dem Anfangspunkt $\mathbf{r}_1$ und dem Endpunkt $\mathbf{r}_2$. Für Kreisprozesse gilt wegen $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$: $A_{12} = 0$.

Für die Arbeit eines Moments gilt im skalaren Fall analog

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = -(U_M(\varphi_2) - U_M(\varphi_1)). \quad (7.13)$$

Die eingeführten Potentiale haben die Interpretation einer potentiellen Energie. Bei positiver Arbeit nimmt die potentielle Energie ab, bei negativer Arbeit nimmt sie zu.

Im Falle der Gewichtskraft gilt mit $x = H$ und $G = mg$ folgender Zusammenhang: $U_F(H) = mgH + U_0$. Die potentielle Energie nimmt mit der Höhe H linear zu. Es ist zu beachten, dass die potentielle Energie nicht zwangsläufig positiv ist. Für die betrachteten linearen Federn lagen quadratische Potentiale vor. Diese entsprechen den in den Federn gespeicherten elastischen Energien. Elastische Federn werden im Kapitel

Bsp: Federkraft $F = -C(x - x_0)$
 $\uparrow$
 Federkonstante

$$U_F(x) = \frac{1}{2} C(x - x_0)^2 + U_0$$

und es folgt:

$$-\frac{dU_F(x)}{dx} = -\frac{1}{2} C(x - x_0) = F$$

zur Elastostatik der Stäbe eingehend behandelt.

►**Beispiel: Arbeit und Leistung einer Gewichtskraft im Schwerfeld.** Für die Arbeit im erdnahen Schwerfeld gilt $A_{12} = -\Delta U = -mg\Delta H = -G\Delta H$. Wird die Höhe einer Masse von einem Kilogramm um einen Meter reduziert, dann wird eine Arbeit von $A_{12} \approx 10\text{Nm} = 10\text{J}$ geleistet. Geschieht dies in einer Sekunde ($\Delta t = 1\text{s}$), dann beträgt die Leistung $L = A_{12}/\Delta t \approx 10\text{J/s} = 10\text{W}$.

►**Beispiel: Arbeit und Leistung infolge Reibung.** Ein Quader mit der Masse $m = 1\text{kg}$ wird mit der Geschwindigkeit $v = 1\text{m/s}$ über eine Ebene geschoben. Die Reibungszahl sei $\mu = 0.5$. Die Reibkraft beträgt nach dem Coulomb'schen Gesetz $R = \mu G = \mu mg \approx 5\text{N}$. Die Leistung hat den Wert $L = Rv = \mu vG = 5\text{Nm/s} \approx 5\text{J/s} = 5\text{W}$. Um den Quader einen Meter zu bewegen muss eine Arbeit von $A_{12} \approx 5\text{Nm} = 5\text{J}$ geleistet werden.

▼ **Ergänzung: Leistung und Arbeit von Volumen- und Flächenkraftdichten.** Ergänzend wollen wir die Leistung und die Arbeit von Volumen- und Flächenkraftdichten formulieren. Da es sich um Kraftdichten handelt, muss zunächst die **Leistungsdichte** formuliert werden. Die Gesamtleistung ergibt sich durch Integration über das Volumen bzw. die Fläche. Die volumenspezifische Leistung einer Volumenkraftdichte $\mathbf{f}_V$ ist durch $\mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v}$ gegeben mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$. Die flächenspezifische Leistung einer Flächenkraftdichte $\mathbf{f}_A$ ist analog dazu $\mathbf{f}_A \cdot \mathbf{v}$. Die Gesamtleistung - also die Leistung der äußeren Kräfte - lautet dann

$$L = \int_V \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} dV + \int_A \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{v} dA. \quad (7.14)$$

Die Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich durch Integration der Leistung über die Zeit

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_A \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{v} dA dt. \quad (7.15)$$

Sind die äußeren Kräfte konservativ, so ergibt sich für die Leistung der äußeren Kräfte

$$L = \int_V \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} dV + \int_A \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{v} dA \quad (7.16)$$

$$= \int_V \mathbf{f}_V \cdot \dot{\mathbf{r}} dV + \int_A \mathbf{f}_A \cdot \dot{\mathbf{r}} dA \quad (7.17)$$

$$= - \int_V \frac{\partial U_V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV - \int_A \frac{\partial U_A}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dA \quad (7.18)$$

$$= - \int_V \dot{U}_V dV - \int_A \dot{U}_A dA \quad (7.19)$$

$$= - \frac{dU}{dt} \quad (7.20)$$

mit dem Gesamtpotential

$$U = \int_V U_V dV + \int_A U_A dA. \quad (7.21)$$

Mit U_V und U_A wurden die Potentiale der volumenspezifischen bzw. flächenpezifischen Kräfte bezeichnet. Das Gesamtpotential hat die Einheit Nm. Da U_V eine volumenspezifische Größe ist, hat es die Einheit N/m². U_A ist eine flächenspezifische Größe und hat die Einheit N/m. Für die Arbeit der äußeren Kräfte folgt schließlich

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = -(U(t_2) - U(t_1)). \quad (7.22)$$

▼ **Ergänzung: Mechanische Energiebilanz für Translationsbewegungen.** Im Folgenden soll die Bilanz der mechanischen Energie für den Sonderfall von Translationsbewegungen betrachtet werden. Der Massenmittelpunktsatz lautet

$$m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}_m = \mathbf{F}. \quad (7.23)$$

Dies ist gerade das zweite Newton'sche Axiom. Die resultierende äußere Kraft $\mathbf{F}$ ist entweder als Summe der äußeren Einzelkräfte zu berechnen

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (7.24)$$

oder durch Integration aus der Volumen- oder Flächenkraftdichte zu bestimmen

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}_V dV + \int_A \mathbf{f}_A dA. \quad (7.25)$$

Multipliziert man den Massenmittelpunktsatz skalar mit der Massenmittelpunktsgeschwindigkeit, dann erhält man die Gleichung

$$m\dot{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{v}_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_m. \quad (7.26)$$

Führt man die **kinetische Energie der Translation**

$$T_V = \frac{mv_m^2}{2} \quad (7.27)$$

ein und beachtet

$$m\dot{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{v}_m = \frac{m}{2} \frac{d\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m}{dt} = \frac{m}{2} \frac{dv_m^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv_m^2}{2} = \dot{T}_V, \quad (7.28)$$

so folgt die **mechanische Energiebilanz**

$$\frac{dT_V}{dt} = L, \quad L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_m. \quad (7.29)$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie der Translation ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte. Integriert man die letzte Gleichung über die Zeit, so erhält man

$$T_V(t_2) - T_V(t_1) = A_{12}, \quad A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_m dt. \quad (7.30)$$

Die Differenz der kinetischen Energie (der Translation) zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ist

gleich der in dem Zeitintervall geleisteten Arbeit. Diesen Satz bezeichnet man als **Arbeitssatz** der Mechanik. Sind die äußeren Kräfte konservativ, so gilt $A_{12} = -(U_F(t_2) - U_F(t_1))$. Aus dem Arbeitssatz folgt in diesem Fall der **Erhaltungssatz der mechanischen Energie** (der Translation)

$$T_V(t_1) + U_F(t_1) = T_V(t_2) + U_F(t_2). \quad (7.31)$$

Bei einem konservativen System äußerer Kräfte ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant.

7.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Virtuelle Verschiebungen. Die Statik kann entweder ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen oder ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen formuliert werden. Beide Zugänge sind äquivalent. In diesem Abschnitt werden wir das Prinzip für starre Körper formulieren.

Zur Formulierung des Prinzips benötigt man den Begriff der virtuellen Verschiebung. Eine **virtuelle Verschiebung** $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$ ist eine im Allgemeinen ortsabhängige infinitesimale Größe, die dadurch gekennzeichnet ist, dass sie mit den Randbedingungen und der Geometrie des starren Körpers verträglich ist. Da $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$ ortsabhängig ist, können unterschiedlichen Punkten des starren Körpers unterschiedliche virtuelle Verschiebungen zugeordnet werden. Die Verträglichkeit mit den Randbedingungen impliziert, dass überall dort wo die Verschiebungen vorgeschrieben sind - also z.B. verschwinden - die virtuellen Verschiebungen null sind. Unter einer Verträglichkeit mit der Geometrie des starren Körpers versteht man, dass das virtuelle Verschiebungsfeld durch eine Starrkörperbewegung realisiert werden kann, also mit der Annahme, dass der Körper starr ist, verträglich ist. Da es sich bei den Verschiebungen $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$ nicht um reale Verschiebungen handelt, werden sie virtuell genannt. Eine **virtuelle Verdrehung** $\delta \varphi(\mathbf{r})$ wird analog eingeführt. Es ist zu beachten, dass bei starren Körpern Verschiebungen und Verdrehungen im Allgemeinen nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden können.

▼ **Ergänzung: Variation.** Auf eine umfassende Definition des Variationsbegriffs wird hier verzichtet. Für die Lösung der in diesem Kapitel diskutierten Problemstellungen sind die folgenden Rechenvorschriften für Skalarfunktionen f einer oder mehrerer Variablen

ausreichend:

$$\delta f(u) = \frac{df(u)}{du} \delta u, \quad (7.32)$$

$$\delta f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i} \delta u_i. \quad (7.33)$$

Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV) für **starre Körper** kann folgendermaßen formuliert werden: Die **virtuelle Arbeit** δA_a der **eingepägten Kräfte und Momente** eines **Gleichgewichtssystems** ist null:

$$\delta A_a = \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_j \cdot \delta \varphi_j = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_i, \delta \varphi_j. \quad (7.34)$$

Skalarprodukt

Mit m und n wird die Anzahl der Einzelkräfte bzw. -momente bezeichnet. $\delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}_i)$ ist die virtuelle Verschiebung am Angriffspunkt $\mathbf{r}_i$ der Einzelkraft $\mathbf{F}_i$. $\delta \varphi_j = \delta \varphi(\mathbf{r}_j)$ ist die zum am Punkt $\mathbf{r}_j$ angreifenden Einzelmoment $\mathbf{M}_j$ gehörige virtuelle Verdrehung.

Im Folgenden soll das PdvV für den Sonderfall konservativer Kräfte und Momente notiert werden. Jeder äußeren Kraft $\mathbf{F}_i$ kann dann ein Potential $U_{F_i}(\mathbf{u}_i)$ zugeordnet werden, wobei $\mathbf{u}_i$ die Verschiebung des Angriffspunktes von $\mathbf{F}_i = -\partial U_{F_i} / \partial \mathbf{u}_i$ ist (für freie Momente gilt entsprechendes). Aus der Definition konservativer Kräfte und Momente folgt zunächst unter Beachtung von $\delta U = \partial U / \partial \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}$

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i = -\frac{\partial U_{F_i}}{\partial \mathbf{u}_i} \cdot \delta \mathbf{u}_i = -\delta U_{F_i} \quad (7.35)$$

und

$$\mathbf{M}_j \cdot \delta \varphi_j = -\frac{\partial U_{M_j}}{\partial \varphi_j} \cdot \delta \varphi_j = -\delta U_{M_j}. \quad (7.36)$$

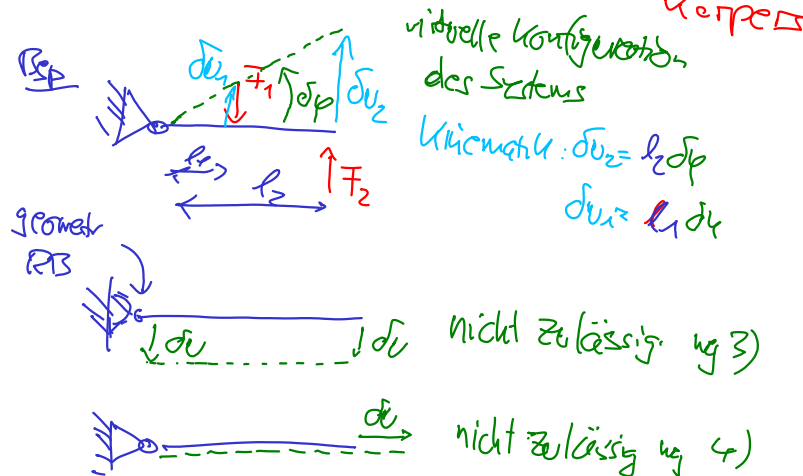
Die Richtungen der Vektoren φ_j sind konstant, deren Komponenten bezüglich dieser konstanten Richtungsvektoren sind durch φ_j gegeben. Setzt man diese Ergebnisse in Gleichung (7.34) ein, so erhält man

$$-\sum_{i=1}^m \delta U_{F_i} - \sum_{j=1}^n \delta U_{M_j} = 0 \quad (7.37)$$

oder äquivalent

Eigenschaften der virtuellen Größen

- 1) virtuell (gedacht)
- 2) infinitesimal klein, aber $\neq 0$
- 3) verträglich mit geometr. RB
- 4) " mit der Geometrie des starren Körpers



$$\delta U = 0$$

(7.38)

mit dem Gesamtpotential

$$U = \sum_{i=1}^m U_{F_i}(u_i) + \sum_{j=1}^n U_{M_j}(\varphi_j).$$

(7.39)

Die erste Variation des Gesamtpotentials U ist gleich null. Die Aussage kann zur Berechnung von Gleichgewichtslagen verwendet werden.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen vs. Gleichgewichtsbedingungen. Zunächst ist festzustellen, dass es sich bei dem PdvV um eine skalare statt um eine vektorielle Gleichung handelt. Das ist erstaunlich, da die Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers aus zwei vektoriellen Gleichungen, also insgesamt sechs skalaren Gleichungen, bestehen. Wir wollen deshalb zunächst zeigen, dass die Gleichgewichtsbedingungen aus dem PdvV folgen. Dazu betrachten wir vereinfachend einen starren Körper. Der Beweis kann auch für Systeme von starren Körpern geführt werden.

Da eine virtuelle Verschiebung mit der Geometrie des starren Körpers verträglich sein muss, gilt für die virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{u}_0 + \delta \varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (7.40)$$

Hierbei ist $\delta \mathbf{u}_0$ die virtuelle Verschiebung eines beliebigen aber festen Bezugspunktes auf dem starren Körper und $\delta \varphi$ die virtuelle Verdrehung des starren Körpers. Beide Größen sind unabhängig. Setzt man die Gleichung, die die virtuellen Verschiebungen mit den virtuellen Verdrehungen koppelt, in das PdvV ein und beachtet, dass bei der Beschränkung auf einen starren Körper gilt: $\varphi_j = \varphi$, so erhält man

$$\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i \right) \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \left(\sum_{i=1}^m (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_j \right) \cdot \delta \varphi = 0. \quad (7.41)$$

Wegen der Beliebigkeit von $\delta \mathbf{u}_0$ und $\delta \varphi$ müssen die Klammern verschwinden und es folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_j = 0. \quad (7.42)$$

Bei kinematisch unbestimmten Systemen kann aus dem PdvV bei gegebener Gleichgewichtslage die Größe der eingepprägten Kräfte berechnet werden. Sind die eingepprägten Kräfte gegeben, so lässt sich die Gleichgewichtslage bestimmen, sofern sie existiert. Bei kinematisch bestimmten Systemen lassen sich nach dem Freischneiden die Reaktionsgrößen als eingepprägte Größen interpretieren und werden so einer Behandlung mittels des PdvV zugänglich gemacht.

U : Gesamtpotential des Systems

erste Variation: δU

Berechnung von Variationen

Ortsvektor in 2D, Polarkoordinaten

$$\underline{r} = \underline{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Variation von r

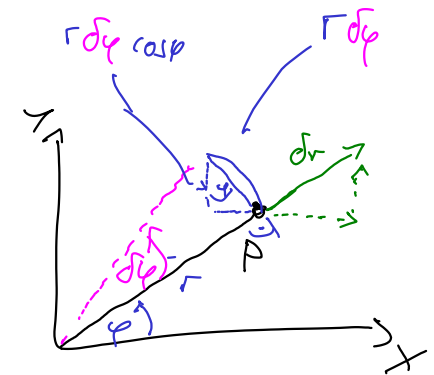
$$\left. \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \right|_{\varphi = \text{konst}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \bigg|_{\varphi = \text{konst}} \cdot \delta r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \delta r$$

Variation von φ

$$\left. \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right|_{r = \text{konst}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \bigg|_{r = \text{konst}} \cdot \delta \varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi$$

Variation von r und φ

$$\begin{aligned} \delta \underline{r} &= \left. \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \right|_{\varphi = \text{konst}} \cdot \delta r + \left. \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right|_{r = \text{konst}} \cdot \delta \varphi \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \delta r + \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi \end{aligned}$$



▼ **Ergänzung: Euler'sche Formel.** In der Kinematik (TMIII) starrer Körper beweist man die *Euler'sche Formel*

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_0) \quad (7.43)$$

für einen beliebigen Punkt P des starren Körpers, dessen Ortsvektor mit $\mathbf{r}_P$ bezeichnet wird. Die Formel besagt, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P$ eines Punktes P berechnet werden kann, indem man zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ eines beliebigen Bezugspunktes des starren Körpers das Kreuzprodukt der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ des starren Körpers und des Relativvektors $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_0$ addiert. Wegen der Beliebigkeit des Punktes P wird im Folgenden auf das Subskript verzichtet. Die Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers wird durch einen eindeutigen Vektor $\boldsymbol{\omega}$ beschrieben. Multipliziert man die Euler'sche Formel mit dem Zeitinkrement dt , so erhält man mit $\mathbf{v}dt = d\mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\omega}dt = d\boldsymbol{\varphi}$

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{u}_0 + d\boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (7.44)$$

► **Beispiel: Hebel.** An dem in Abb. 7.1 dargestellten Hebel greifen die Kräfte $\mathbf{F}_A = (X_1, Y_1, 0)^T$ und $\mathbf{F}_B = (X_2, Y_2, 0)^T$ in den Punkten A bzw. B an. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit den Zusammenhang zwischen $\mathbf{F}_A$ und $\mathbf{F}_B$. Über welche Komponenten kann keine Aussage getroffen werden?

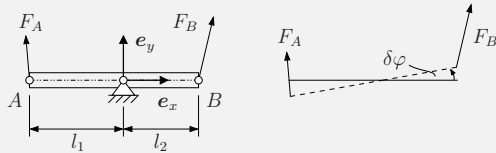


Abb. 7.1: Hebel beidseitigem Kraftangriff

Die einzige kinematisch verträgliche Bewegung des Körpers ist eine Rotation um den Koordinatenursprung um einen infinitesimal kleinen Winkel $\delta\varphi$. Die Verschiebungen der Punkte A und B sind dann

$$\delta\mathbf{r}_A = (0, -l_1\delta\varphi, 0)^T, \quad \delta\mathbf{r}_B = (0, l_2\delta\varphi, 0)^T. \quad (7.45)$$

Die virtuelle Arbeit ergibt sich mit Gleichung (7.34) zu

$$-Y_1 l_1 \delta\varphi + Y_2 l_2 \delta\varphi = 0. \quad (7.46)$$

Aus der Beliebigkeit von $\delta\varphi$ folgt dann

$$-Y_1 l_1 + Y_2 l_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_2 = Y_1 \frac{l_1}{l_2}. \quad (7.47)$$

Dies ist das klassische Hebelgesetz. Über die Kraftkomponenten in x -Richtung kann keine Aussage getroffen werden, das heißt X_1 und X_2 sind beliebig.

►**Beispiel: Doppelschiefe Ebene.** Die beiden in Abb. 7.2 dargestellten Körper mit den Gewichtskräften $\mathbf{G}_1 = (0, -G_1, 0)$ und $\mathbf{G}_2 = (0, -G_2, 0)$ sind über ein ideales Seil miteinander verbunden. Die Umlenkung des Seiles erfolgt reibungsfrei. Die Winkel der Ebenen sind α und β . Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen den Zusammenhang zwischen G_1 und G_2 , wenn das System in Ruhe ist.

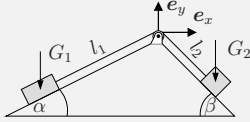


Abb. 7.2: Doppelschiefe Ebene

Da es sich um ein ideales Seil handelt gilt $l_1 + l_2 = l = \text{konst.}$ Für die virtuellen Änderungen gilt also $\delta l_1 + \delta l_2 = \delta l = 0$ und somit $\delta l_1 = -\delta l_2$. Die Verschiebungen der Massenschwerpunkte sind dann

$$\delta \mathbf{r}_1 = \delta l_1 (-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0), \quad (7.48)$$

$$\delta \mathbf{r}_2 = \delta l_2 (\cos \beta, -\sin \beta, 0) = \delta l_1 (-\cos \beta, \sin \beta, 0). \quad (7.49)$$

Die durch diese virtuelle Verschiebungen verrichtete Arbeit berechnet sich nach Gleichung (7.34) zu

$$\delta A_a = \mathbf{G}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{G}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \delta l_1 (G_1 \sin \alpha - G_2 \sin \beta). \quad (7.50)$$

Es wird nun $\delta A_a = 0$ gefordert und die Beliebigkeit von δl_1 eingesetzt. Es folgt

$$G_1 \sin \alpha = G_2 \sin \beta. \quad (7.51)$$

►**Beispiel: Klappbrücke.** Die in Abb. 7.3 gezeigte Brücke wird durch eine Gewichtskraft $\mathbf{G} = (0, -G, 0)$ im Punkt P belastet. Die Abmessungen a, b und c sind vorgegeben. Wie muss die Masse m_Q des Gegengewichtes gewählt werden, damit die Brücke für alle Winkel φ im Gleichgewicht ist? Welche Kraft wirkt in dem Stab, der die Punkte C und D verbindet?

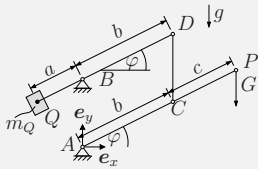


Abb. 7.3: Klappbrücke im Gleichgewicht

Zur Lösung des Problems stellt man zunächst die am Massenmittelpunkt von Q angreifende Gewichtskraft als Vektor dar:

$$\mathbf{G}_Q = (0, -m_Q g, 0). \quad (7.52)$$

Die Ortsvektoren der Punkte Q und P sind

$$\mathbf{r}_Q = (-a \cos \varphi, \overline{AB} - a \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{r}_P = ((b+c) \cos \varphi, (b+c) \sin \varphi, 0). \quad (7.53)$$

Für $\delta \mathbf{r}$ gilt

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \delta \varphi. \quad (7.54)$$

Man erhält damit $\delta \mathbf{r}_Q$ und $\delta \mathbf{r}_P$ wie folgt:

$$\delta \mathbf{r}_Q = (a \sin \varphi, -a \cos \varphi, 0) \delta \varphi, \quad \delta \mathbf{r}_P = (-(b+c) \sin \varphi, (b+c) \cos \varphi, 0) \delta \varphi. \quad (7.55)$$

Die virtuelle Arbeit lässt sich damit nach (7.34) berechnen:

$$\delta A_a = \mathbf{G}_Q \cdot \delta \mathbf{r}_Q + \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{r}_P = (m_Q g - (b+c)G) \cos \varphi \delta \varphi = 0. \quad (7.56)$$

Die Beliebigkeit von $\delta \varphi$ und die Unabhängigkeit vom Winkel φ ergibt dann

$$m_Q g - (b+c)G = 0 \quad \Rightarrow \quad m_Q = \frac{b+c}{a} \frac{G}{g}. \quad (7.57)$$

Zur Bestimmung der Stabkraft S_{CD} schneidet man den oberen Brückenteil frei (Abb. 7.3). Auch hier lässt sich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen anwenden. Die einzige kinematisch verträgliche Verschiebung ist hier eine Drehung um den Punkt B um einen infinitesimalen Winkel $\delta \varphi$. Durch einfache Rechnung (vgl. Beispiel "Der Hebel") ergibt sich die gesuchte Stabkraft zu

$$\delta A_a = (m_Q g a \cos \varphi - S_{CD} b \cos \varphi) \delta \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{CD} = m_Q g \frac{a}{b}. \quad (7.58)$$

► **Beispiel: Flaschenzug.** Abb. 7.4 zeigt einen idealen Flaschenzug bestehend aus $2n$ (hier: $n=2$) Rollen, von denen n fest und n lose sind. Berechnen Sie für einen allgemeinen Flaschenzug mit $2n$ Rollen die Zugkraft F die zum statischen Halten eines Gewichtes G notwendig ist. Benutzen Sie hierfür das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

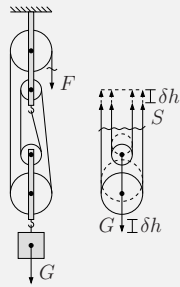


Abb. 7.4: Flaschenzug

Wird das Ende des Seiles um die Länge δl eingezogen, so wird das Gewicht G um die Höhe $\delta l/(2n)$ angehoben. Die dafür aufzuwendende virtuelle Arbeit ergibt sich zu

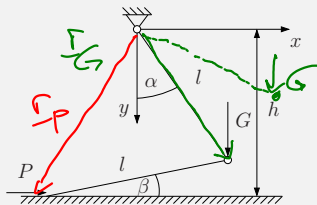
$$\delta A_a = F \delta l - G \frac{\delta l}{2n} = \left(F - \frac{G}{2n} \right) \delta l = 0. \quad (7.59)$$

Auch hier muss wegen der Beliebigkeit von δl der Term in Klammern zu null werden. Es folgt also:

$$F = \frac{G}{2n}. \quad (7.60)$$

Alternativ dazu kann die untere Hälfte des Flaschenzuges freigeschnitten werden. Die virtuelle Verschiebung an jedem Punkt des Seiles ist identisch und wirkt immer in Richtung der Schnittkraft, die ebenfalls überall konstant ist, da ein ideales Seil betrachtet wird. Man erhält dann (vgl. Abb. 7.4 rechts): $2nS\delta h - G\delta h = 0$. Daraus folgt wegen $F = S$ wieder $F = S = G/2n$.

► **Beispiel: Stabeck.** Abb. 7.5 zeigt ein Stabeck bestehend aus zwei gelenkig miteinander verbundenen masselosen Stäben der Länge l . Diese werden durch die Kraft G belastet. Bestimmen Sie die zum statischen Halten der Stäbe notwendige Kraft P mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Abb. 7.5: Stabeck mit Belastung durch ein Gewicht G

Gegeben: $l, \alpha, \beta, \underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$

Gesucht: $\underline{P} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Berechnung der virtuellen Verschiebungen von $\underline{G}$ und $\underline{P}$

$$\underline{r}_G = \begin{pmatrix} l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \end{pmatrix} = \underline{r}_G(\alpha)$$

$$\underline{r}_P = \begin{pmatrix} l \sin \alpha - l \cos \beta \\ l \cos \alpha + l \sin \beta \end{pmatrix} = \underline{r}_P(\alpha, \beta)$$

$$\delta \underline{r}_G = \frac{\partial \underline{r}_G}{\partial \alpha} \delta \alpha = \begin{pmatrix} l \cos \alpha \\ -l \sin \alpha \end{pmatrix} \delta \alpha$$

$$\delta \underline{r}_P = \frac{\partial \underline{r}_P}{\partial \alpha} \bigg|_{\beta = \text{const}} \delta \alpha + \frac{\partial \underline{r}_P}{\partial \beta} \bigg|_{\alpha = \text{const}} \delta \beta$$

$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ und } \beta \\ \text{NICHT} \\ \text{unabhängig} \end{array} \right\}$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit kann bei diesem Problem vorteilhaft eingesetzt werden, da die (unbekannten) Lagerreaktionen in der Bilanzgleichung nicht auftauchen. Auch die Stützkraft N muss nicht berechnet werden. P lässt sich direkt berechnen, wenn man eine virtuelle Verschiebung des Kraftangriffspunktes in positiver x -Richtung betrachtet. Dafür muss zunächst die Kinematik des Stabecks betrachtet werden. Der Angriffspunkt der Kraft P hat die x -Koordinate

$$x_P = l \sin \alpha - l \cos \beta, \quad (7.61)$$

während die y -Koordinate des Punktes, an dem die Gewichtskraft angreift, durch

$$y_G = l \cos \alpha \quad (7.62)$$

gegeben ist. Aus der kinematischen Relation

$$h = l(\cos \alpha + \sin \beta) \quad (7.63)$$

erhält man unter Beachtung der konstanten Höhe h

$$\delta h = 0 = l(-\sin \alpha \delta \alpha + \cos \beta \delta \beta) \Rightarrow \delta \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \delta \alpha. \quad (7.64)$$

Damit lassen sich δx_P und δy_G berechnen:

$$\delta x_P = l(\cos \alpha \delta \alpha + \sin \beta \delta \beta) = l \delta \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \beta), \quad (7.65)$$

$$\delta y_G = -l \sin \alpha \delta \alpha. \quad (7.66)$$

Die virtuelle Arbeit ist nach (7.34) dann

$$\delta A_a = [P(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \beta) - G \sin \alpha] l \delta \alpha = 0. \quad (7.67)$$

Der erste Term muss verschwinden um diese Gleichung für alle Auslenkungen $\delta \alpha$ zu erfüllen. Nach Division durch $\sin(\alpha)$ ($\alpha \neq 0$) erhält man schließlich die gesuchte Kraft

$$P = \frac{G}{\cot \alpha + \tan \beta}. \quad (7.68)$$

Grundidee der Berechnung von Lagerreaktionen mit dem PdvV. Es wird immer genau ein Freiheitsgrad gelöst, um eine Lagerreaktion zu berechnen. Soll beispielsweise eine vertikale Auflagerreaktion bestimmt werden, so wird eine virtuelle Verschiebung in dem betrachteten Lagerpunkt in vertikaler Richtung zugelassen. Alle anderen Lagerungen müssen erhalten bleiben. Die zu berechnende Lagerkraft wird dann als äußere Kraft aufgefasst. Es ist zu beachten, dass zu jeder Berechnung einer Lagerkraft eine eigene Skizze gehört, in der die virtuelle Verschiebung dargestellt wird. Auf ähnliche Weise funktioniert auch die Berechnung von Schnittgrößen und äußeren Lasten.

$$= \begin{pmatrix} l \cos \alpha \\ -l \sin \alpha \end{pmatrix} \delta \alpha + \begin{pmatrix} l \sin \beta \\ l \cos \beta \end{pmatrix} \delta \beta$$

$$\text{Es wkt: } \delta r_{P,y} = 0$$

$$\hookrightarrow -l \sin \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta = 0$$

$$\rightarrow \delta \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \delta \alpha$$

2) virtuelle Arbeit

$$\delta A_a = \underline{G} \cdot \delta \underline{r}_G + \underline{P} \cdot \delta \underline{r}_P$$

$$= -G l \sin \alpha \delta \alpha + P(l \cos \alpha \delta \alpha + l \sin \beta \delta \beta)$$

$$= \left(-G l \sin \alpha + P l \cos \alpha + P l \sin \beta \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \delta \alpha$$

$$3) \text{ PdvV: } 0 = \delta A_a = \left(\underbrace{-G l \sin \alpha + P l \cos \alpha + P l \sin \beta \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}}_{=0} \right) \delta \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{G}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \tan \beta}$$

►**Beispiel: Lagerreaktionen eines Biegebalkens.** Berechnen Sie die Lagerreaktionen des Biegebalkens (Abb. 7.6) in A und B mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

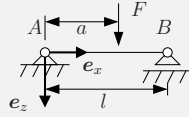
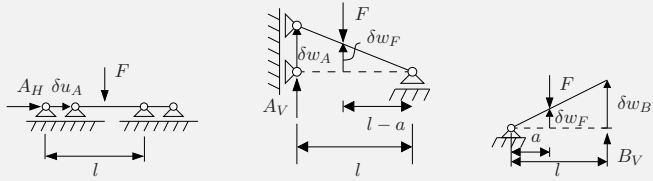


Abb. 7.6: Biegebalken mit Belastung durch eine Einzelkraft



7.7.a: Bestimmung von A_H 7.7.b: Bestimmung von A_V 7.7.c: Bestimmung von B_V

Abb. 7.7: Virtuell verschobenes System zur Bestimmung der Reaktionsgrößen

Aus den verschobenen Systemen ergibt sich für die horizontale Lagerreaktion im Punkt A (Abb. 7.7.a)

$$\delta A_a = A_H \delta u_A \stackrel{\delta u_A \neq 0}{=} 0 \quad A_H = 0. \quad (7.69)$$

Aus der Geometrie des zweiten Systems (Abb. 7.7.b) folgt der Zusammenhang

$$\delta w_F = \frac{l-a}{l} \delta w_A \quad (7.70)$$

und somit gilt

$$\delta A_a = A_V \delta w_A - F \delta w_F = \delta w_A \left(A_V - \frac{l-a}{l} F \right) \stackrel{\delta w_A \neq 0}{=} 0 \quad A_V = \frac{l-a}{l} F. \quad (7.71)$$

Ähnlich gilt bei virtueller Verschiebung von B (Abb. 7.7.c): $\delta w_F = \frac{a}{l} \delta w_B$. Daraus folgt direkt

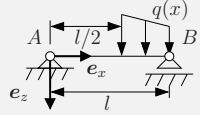
$$\delta A_a = B_V \delta w_B - F \delta w_F = \delta w_B \left(B_V - \frac{a}{l} F \right) \stackrel{\delta w_B \neq 0}{=} 0 \quad B_V = \frac{a}{l} F. \quad (7.72)$$

►**Beispiel: Bestimmung einer einzelnen Lagerreaktion.** Berechnen Sie für die Streckenlast

$$q(x) = \frac{q_0}{2l}(2l-x) \quad (7.73)$$

die vertikale Lagerreaktion B_V für das in Abb. 7.8.a gezeigte System mit dem PdV.

Der Freiheitsgrad in z -Richtung wird gelöst, so dass sich das in Abb. 7.8.b gezeigt verschobene System ergibt.



7.8.a: Biegebalken

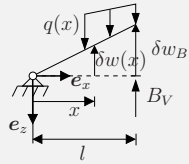
7.8.b: Virtuelle Verschiebungen infolge B_V

Abb. 7.8: Biegebalken mit Belastung durch eine Streckenlast

Die virtuelle Arbeit ergibt sich mit

$$\delta w(x) = \frac{x}{l} \delta w_B \quad (7.74)$$

durch Integration zu

$$\delta A_a = - \int_{l/2}^l q(x) \delta w(x) dx + B_V \delta w_B = \delta w_B \left(B_V - \frac{q_0 l}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{24} \right) \right). \quad (7.75)$$

Unter Berücksichtigung von $\delta w_B \neq 0$ folgt damit direkt

$$B_V = \frac{11}{48} q_0 l. \quad (7.76)$$

► **Beispiel: Berechnung von Reaktionskräften.** Für den in Abb. 7.9 dargestellten Gerberbalken mit den Abmessungen a , b und c und den äußeren Lasten F und M_0 sollen die Gelenkkräfte und die Auflagerkräfte in den Punkten B und C berechnet werden.

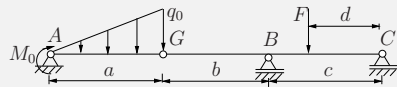


Abb. 7.9: Gerberbalken

Für die Berechnung der gesuchten vertikalen Gelenkkraft wird das Gelenk durch ein Verbindungselement ersetzt, das eine vertikale Verschiebung zulässt (Abb. 7.10.a). Die Kraft G_V wird als äußere Kraft an den beiden Teilkörpern angebracht. Bei der Berechnung der virtuellen Arbeit wird das Gesamtsystem betrachtet. Der rechte Teilkörper bleibt unbeweglich wegen der vorhandenen Lagerung. Unterwirft man das linke Teilsystem einer virtuellen Drehung um den Punkt A, dann gilt für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte und Momente

$$0 = M_0 \delta \varphi + \frac{q_0 a}{2} \frac{2a}{3} \delta \varphi + G_V a \delta \varphi, \quad (7.77)$$

woraus wegen der Beliebigkeit von $\delta\varphi$ die gesuchte Größe

$$G_V = -\frac{M_0}{a} - \frac{q_0 a}{3} \quad (7.78)$$

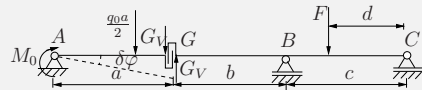
folgt. Für die Berechnung der horizontalen Gelenkkraft unterwirft man das rechte Teilsystem (Abb. 7.10.b) einer virtuellen Translation in horizontaler Richtung. Der linke Teilkörper ist unbeweglich. Damit folgt $G_H = 0$. Die verwendete Vorgehensweise für die Gelenkkräfte kann auch für die Berechnung von Schnittgrößen angewendet werden.

Die beiden vertikalen Auflagerkräfte in den Punkten B und C ergeben sich wie folgt. Das Lager im Punkt C wird entfernt und seine Wirkung wird durch eine vertikale äußere Kraft ersetzt (Abb. 7.10.c). Aus der virtuellen Arbeit folgt

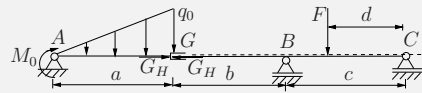
$$a\delta\alpha = b\delta\varphi, \quad \Rightarrow C_V = -\frac{M_0 b}{ac} - \frac{q_0 ab}{3c} + \frac{F(c-d)}{c}. \quad (7.79)$$

Analog kann die Lagerreaktion im Punkt B berechnet werden (Abb. 7.10.d).

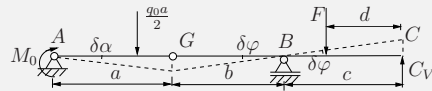
$$a\delta\alpha = (b+c)\delta\varphi, \quad \Rightarrow B_V = \frac{M_0(b+c)}{ac} + \frac{q_0 a(b+c)}{3c} + \frac{Fd}{c}. \quad (7.80)$$



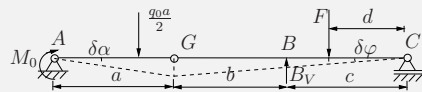
7.10.a: Berechnung von G_V



7.10.b: Berechnung von G_H



7.10.c: Berechnung von C_V



7.10.d: Berechnung von B_V

Abb. 7.10: Virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen des Gerberbalkens

▼ Ergänzung: Virtuelle Leistung und virtuelle Arbeit von Volumen- und

Flächenkraftdichten. Die virtuelle Leistung der äußeren Kräfte wird mit den virtuellen Geschwindigkeiten $\delta \mathbf{v}(\mathbf{r})$ gebildet

$$\delta L = \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) dV + \int_A \mathbf{f}_A \cdot \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) dA. \quad (7.81)$$

Sind die äußeren Kräfte konservativ, so ergibt sich für die virtuelle Leistung der äußeren Kräfte

$$\delta L = \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) dV + \int_A \mathbf{f}_A \cdot \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) dA \quad (7.82)$$

$$= \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} dV + \int_A \mathbf{f}_A \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} dA \quad (7.83)$$

$$= - \int_V \frac{\partial U_V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} dV - \int_A \frac{\partial U_A}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} dA \quad (7.84)$$

$$= - \int_V \delta \dot{U}_V dV - \int_A \delta \dot{U}_A dA \quad (7.85)$$

$$= - \frac{d\delta U}{dt} \quad (7.86)$$

mit dem Gesamtpotential

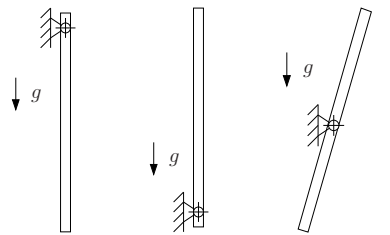
$$U = \int_V U_V dV + \int_A U_A dA. \quad (7.87)$$

Für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte folgt schließlich

$$\delta A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = -(\delta U(t_2) - \delta U(t_1)). \quad (7.88)$$

7.3 Stabilität von Gleichgewichtslagen

Arten der Stabilität. Die Untersuchung der Stabilität von Gleichgewichtslagen ist von grundsätzlicher Bedeutung, da es sowohl ein **stabiles Gleichgewicht** als auch ein **instabiles Gleichgewicht** gibt und Gleichgewichtslagen realer Strukturen in der Regel vielfältigen Störungen ausgesetzt sind. Eine Gleichgewichtslage heißt stabil, wenn kleine Störungen der Gleichgewichtslage beliebig klein bleiben. Anderenfalls heißt das Gleichgewicht instabil. Ein **indifferentes Gleichgewicht** liegt vor, wenn alle Nachbarlagen ebenfalls Gleichgewichtslagen sind. In diesem Kapitel wird nur die Stabilität von Gleichgewichtslagen starrer Körper analysiert, die durch konservative Kräfte belastet sind. Im Rahmen der Elastostatik wird die Stabilität von Gleichgewichtslagen elastischer Körper analysiert. Ein Beispiel für einen starren Körper, der sowohl eine stabile als auch eine instabile Gleichgewichtslage einnehmen kann, ist der einseitig gelenkig gelagerte Stab aus Abb. 7.11. Es handelt sich um ein konservatives System, da die Gewichtskraft als konstant angenommen werden kann.



7.11.a: stabil 7.11.b: instabil 7.11.c: indifferent

Abb. 7.11: Stabilität eines Stabes unter Gravitationseinwirkung

Liegt der Massenmittelpunkt über dem Gelenk, so ist das Gleichgewicht instabil, da eine kleine Störung der Gleichgewichtslage dazu führt, dass der Stab die Gleichgewichtslage verlässt. Liegt der Massenmittelpunkt genau unter dem Gelenk, so ist die Gleichgewichtslage dagegen stabil.

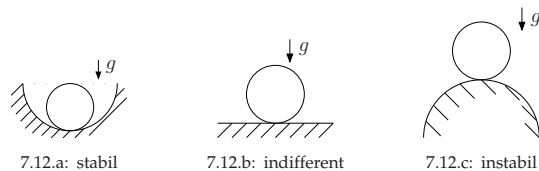


Abb. 7.12: Stabilität illustriert am Beispiel einer Kugel

Ein weiteres Beispiel ist durch die in Abb. 7.12 dargestellte Kugel gegeben. Im Fall a ist die Lage stabil, im Fall c instabil und im Fall b ist das Gleichgewicht indifferent.

Stabilität von Systemen starrer Körper. Die Aussage, dass in einer Gleichgewichtslage die erste Variation des Gesamtpotentials verschwindet $\delta U = 0$, ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dafür, dass das Gesamtpotential einen Extremwert annimmt. Es lässt sich zeigen, dass eine Gleichgewichtslage genau dann stabil ist, wenn das Gesamtpotential im Gleichgewicht ein *Minimum* annimmt. Eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Minimums ist die Positivität der zweiten Variation des Gesamtpotentials

$$\delta^2 U > 0.$$

(7.89)

Verschwindet die zweite Variation des Potentials U , so sind die höheren Variationen

1) Berechnung der GGW-Lage

$$\delta U = 0$$

2)

$$\delta(\delta U) = \delta^2 U \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \begin{matrix} \text{instabil} \\ \text{stabil} \end{matrix}$$

zweite Variation

zur Beurteilung der Art des Gleichgewichts heranzuziehen. Liegt beispielsweise ein konservatives System mit einem Freiheitsgrad φ vor, so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht und dessen Stabilität wegen $\delta U(\varphi) = (dU(\varphi)/d\varphi)\delta\varphi$ und $\delta^2 U(\varphi) = (d^2 U(\varphi)/d\varphi^2)(\delta\varphi)^2$

$$\frac{dU}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2 U(\varphi)}{d\varphi^2} > 0. \quad (7.90)$$

▼ **Ergänzung: Anmerkung zur Stabilitätsbedingung $\delta^2 U > 0$.** Wir wollen die Gültigkeit der Stabilitätsbedingung $\delta^2 U > 0$ motivieren. Der Erhaltungssatz der mechanischen Energie (der Translation) besagt, dass bei konservativen äußeren Kräften die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant ist: $T_V + U_F = \text{konst.}$ Die kinetische Energie kann also nur zunehmen, wenn die potentielle Energie abnimmt. Liegt ein lokales Minimum der potentiellen Energie vor, so muss wegen $\Delta T = -A_{12}$ Arbeit am System geleistet werden, um die kinetische Energie zu erhöhen. Liegt ein lokales Maximum der potentiellen Energie vor, so kann die kinetische Energie durch Reduktion der potentiellen Energie erhöht werden. Kleine Störungen der Gleichgewichtslage in Form von kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage oder von kleinen Geschwindigkeiten können also bei einem Maximum der potentiellen Energie angefacht werden. Bei einem Minimum ist das nicht der Fall.

► **Beispiel: Quader auf einer Halbkugel.** Betrachtet wird im Folgenden ein Quader der Masse m und Höhe $H = 2c$, der wie in Abb. 7.13 dargestellt auf einer Halbkugel mit Radius R liegt. Bestimmen Sie die Art des Gleichgewichts des Quaders bei $\varphi = 0$ in Abhängigkeit von den Geometrieparametern R und c .

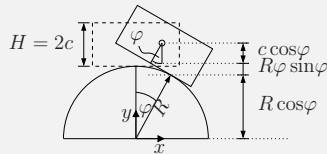


Abb. 7.13: Stabilität eines auf einer Halbkugel platzierten Quaders

Die y -Koordinate des Massenmittelpunktes des Quaders ist durch

$$h(\varphi) = R \cos \varphi + R \varphi \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (7.91)$$

gegeben. Damit kann die potentielle Energie durch

$$U(\varphi) = mgh(\varphi) \quad (7.92)$$

dargestellt werden. Die ersten beiden Variationen dieses Potentials in Abhängigkeit von $\delta\varphi$ ergeben sich aus den Ableitungen

$$\delta U(\varphi) = U'(\varphi)\delta\varphi = mg(-R \sin \varphi + R \sin \varphi + R \varphi \cos \varphi - c \sin \varphi)\delta\varphi = mg(R \varphi \cos \varphi - c \sin \varphi)\delta\varphi, \quad (7.93)$$

$$\delta^2 U(\varphi) = U''(\varphi)(\delta\varphi)^2 = mg((R-c)\cos\varphi - R\varphi\sin\varphi)(\delta\varphi)^2. \quad (7.94)$$

Es muss nun $\varphi = 0$ eingesetzt werden, um die Art des Gleichgewichts bestimmen zu können. Man erhält dann

$$\delta^2 U(\varphi = 0) = mg(R-c) \begin{cases} > 0 & \text{Stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 & \text{Indifferentes Gleichgewicht} \\ < 0 & \text{Instabiles Gleichgewicht} \end{cases}. \quad (7.95)$$

►Beispiel: Quader auf einer Ebene. Analysieren Sie die Stabilität des in Abb. 7.14 dargestellten Quaders.

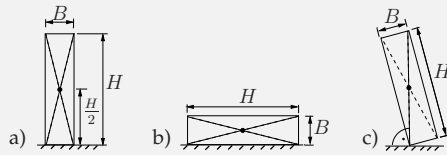


Abb. 7.14: Stabilität eines auf einer Ebene platzierten Quaders

Dieses Beispiel zeigt, dass die Bedingung $\delta^2 U > 0$ nicht bei allen Stabilitätsuntersuchungen anwendbar ist. Betrachtet man einen homogenen Quader der Breite B und der Höhe H auf einer Ebene, dann sind bei einer ebenen Betrachtung des Problems drei Gleichgewichtslagen möglich. Der Quader kann auf der Seite mit der Länge B stehen (Fall a), dann hat der Schwerpunkt den Abstand $H/2$ von der Ebene. Der Quader kann ebenfalls auf der Seite mit der Länge H stehen (Fall b), dann hat der Schwerpunkt den Abstand $B/2$ von der Ebene. Eine Gleichgewichtslage liegt aber auch vor, wenn der Quader so auf einer der vier Ecken steht, dass die Wirkungslinie der Gewichtskraft genau durch einen Eckpunkt verläuft (Fall c). Der Schwerpunkt hat dann den Abstand $\sqrt{B^2 + H^2}/2$ von der Ebene.

Im Fällen a und b liegt jeweils ein Minimum der potentiellen Energie vor, im Fall b sogar ein globales. Im Fall c hat die potentielle Energie ein globales Maximum. Eine Differenzierbarkeit liegt nur im Fall c vor nicht aber in den Fällen a und b. Daher lässt sich das Stabilitätskriterium $\delta^2 U > 0$ nur zum Nachweis der Instabilität des Falls c verwenden. Eine weitere Einschränkung der Anwendbarkeit des Kriteriums kann man sich dadurch klar machen, dass im Falle $B \ll H$ nur eine Lage, nämlich die auf der breiteren Seite stabil sein wird. Das verwendete Kriterium sagt aber auf Grund der Existenz eines lokalen Minimums eine Stabilität voraus, was nicht der Beobachtung entspricht.

Kapitel 8

Zug-Druck-Stäbe

8.1 Einachsiger Verzerrungs- und Spannungszustand

Vereinfachende Annahmen. Im Rahmen dieses Kapitels sollen die Materialeigenschaften in die statischen Berechnungen einbezogen werden, wobei wir uns im Wesentlichen auf elastische Materialien beschränken. Ein **elastisches Materialverhalten** liegt dann vor, wenn durch äußere Lasten verursachte Deformationen nach der Entlastung sofort zurück gehen. Zur Behandlung statischer Probleme von Zug-Druck-Stäben werden folgende vereinfachende Annahmen eingeführt werden:

- Der Stab ist gerade aber nicht notwendig zylindrisch. Ein Stab heißt gerade, wenn die Verbindungslinie der Flächenmittelpunkte der Querschnittsflächen ungekrümmt ist. Die Querschnittsänderungen des Stabes sollen klein sein.
- Das Materialverhalten sei linear elastisch und homogen über den Querschnitt. Entlang der Stabachse kann das Materialverhalten variieren.
- Der Stab wird nur durch "äußere" Kräfte parallel zur Stabachse beansprucht, die im Flächenmittelpunkt der Querschnittsflächen angreifen.
- Der Stab ist im (statischen) Gleichgewicht.
- Die Verformungen sind klein.
- Wird die Temperatur in die Berechnung einbezogen, so wird angenommen, dass diese zeitlich und über den Querschnitt konstant ist.

Einachsiger Spannungszustand. Das kartesische Koordinatensystem wird bei Stäben so eingeführt, dass die x -Achse mit der Stabmittellachse zusammenfällt. Schneidet

Zug - Druck - Stäbe (elastisch)

- Annahme:
- Verzerrung / Dehnung vs. Verschiebung
 - Spannung vs. Kraft
 - Materialgesetz: Hookesches Gesetz

Einachsiger Spannungszustand

geg: Länge l , Querschnittsfläche A , Erdbeschl. g
 ges: 1) Schnittkraft $N(x)$ und Spanng $\sigma(x)$
 (Normalspannung)

g : Massenkraftdichte (Kraft / Masseneinheit)
 $(g \approx 9,81 \frac{m}{s^2})$

gg : Volumenkraftdichte (Kraft / Volumeneinheit)
 Gewichtskraft

$$G = m(x)g = \rho V(x)g = gg V(x)$$

$$G(x) = gg A(l-x)$$

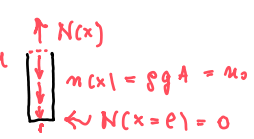
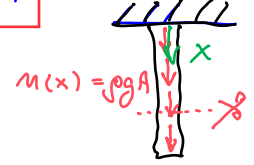
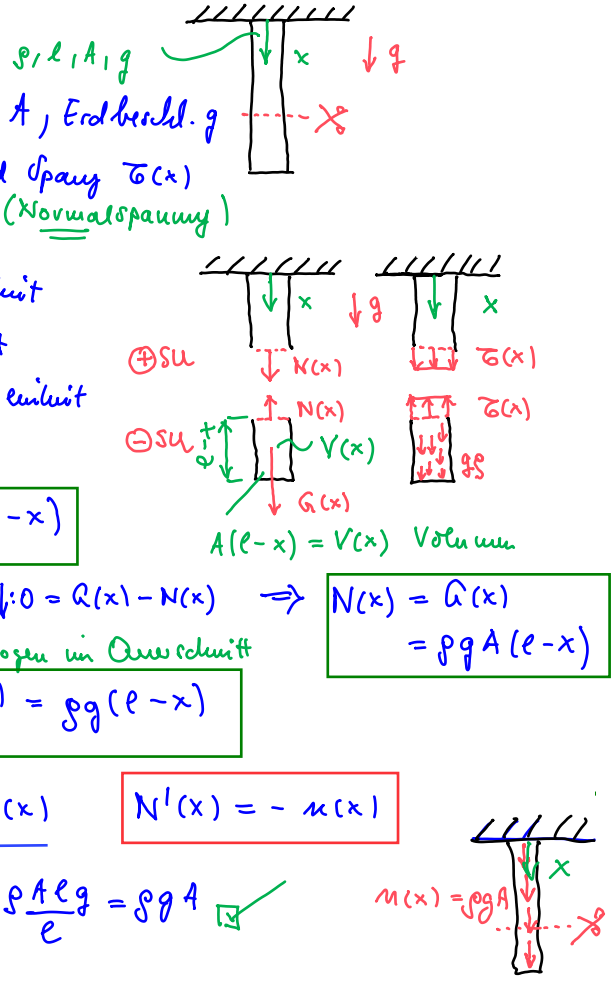
Schnittkraft $N(x)$: $GAB: \downarrow 0 = Q(x) - N(x) \Rightarrow N(x) = G(x) = gg A(l-x)$

Spannung $\sigma(x)$: $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = gg(l-x)$

Schnittgrößen - DGL für $N(x)$: $N'(x) = -m(x)$

Variation 1: $m(x) = \frac{G}{l} = \frac{mg}{l} = \frac{\rho Vg}{l} = \frac{\rho A l g}{l} = \rho g A$

Variation 2: $m(x) = -N'(x) = -\frac{d}{dx}(gg A(l-x)) = gg A$



man den Stab im Inneren frei, so hat man die Schnittgrößen einzutragen. Auf Grund der eingeführten Annahmen liegt im Flächenmittelpunkt nur eine Schnittkraft der Form $Q(r) = N(x)e_x$ vor. Die Normalkraft $N(x)$ ist die Resultierende einer **Flächenkraftdichte** oder **Spannung** $\sigma(x, y, z)$, die senkrecht zur Querschnittsfläche wirkt (Abb. 8.1)

$$N(x) = \iint \sigma(x, y, z) dy dz. \quad (8.1)$$

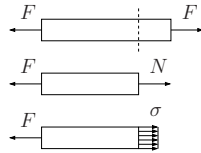


Abb. 8.1: Freischnitt eines Stabes unter Zugbelastung und zugehöriges Normalspannungsfeld

Eine Spannung, die senkrecht zur Querschnittsfläche orientiert ist, heißt **Normalspannung**. Sie hat die Dimension Kraft pro Flächeneinheit und kann mit der Einheit $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ angegeben werden. Häufiger ist allerdings die Einheit $\text{MPa} = \text{N/mm}^2$. Wir werden im Folgenden häufig annehmen, dass die Spannung σ im Querschnitt konstant ist, also nur von der Längskoordinate x abhängt. Die Annahme ist nur bei einer geeigneten Krafteinleitung an den Stabenden und bei geraden Stäben konstanten Querschnitts gültig. Unter Verwendung dieser Annahme vereinfacht sich die Gleichung (8.1) zu

$$N(x) = \iint \sigma(x) dy dz = \sigma(x) \iint dy dz = \sigma(x) A(x). \quad (8.2)$$

Die Schnittgrößendifferentialgleichung lautet nach Gleichung (5.25)

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x). \quad (8.3)$$

Die Größe $n(x)$ ist eine Streckenlast in Längsrichtung des Stabes. Setzt man die Gleichung (8.2) in die Differentialgleichung ein, so erhält man bei einem konstanten Querschnitt

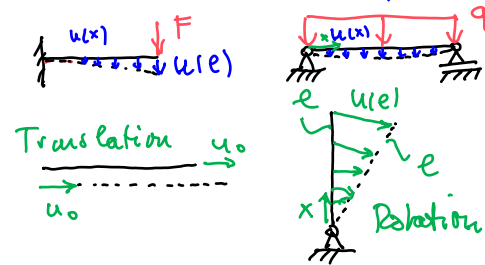
$$\frac{d\sigma(x)}{dx} A = -n(x). \quad (8.4)$$

Diese Formel gilt näherungsweise auch bei einem schwach veränderlichen Querschnitt ($A(x) \approx \text{konst.}$).

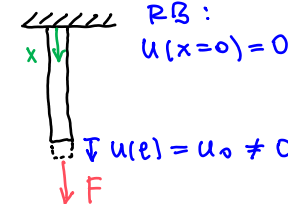
Einachsiger Verzerrungszustand. Die Verschiebung der Stabmittellachse wird durch den **Verschiebungsvektor** $u(r) = u(x)e_x$ angegeben. Der Verschiebungsvektor hat

Verschiebung, Verzerrung $\hat{=}$ Dehnung

Verschiebungsvektor $u(x)$ (fkt) Verschiebt Anfangs- und aktuelle Lage des Punktes mit Anfangslage $\mathcal{I}$



Verzerrung:



Längenänderung des Stabes
 $\Delta l = u(l)$

relative Längenänderung
 $\frac{\Delta l}{l_0} \approx \frac{\Delta l}{l} =: \epsilon$ Verzerrung
in Falle einer homogenen Deformation
 $l \approx l_0$

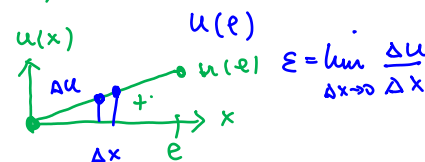
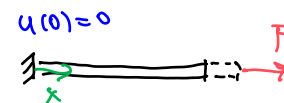
Relative Längenänderung (präzise definiert)

geg: $u(x)$

ges: $\epsilon(x) := \frac{du(x)}{dx}$

3D-Definition in TM2

Verzerrung (Normalverzerrung): Ableitung der Verschiebung $u(x)$ nach x



Achtung: $[u]$: Länge
 $[x]$: Länge

$$\left[\frac{du(x)}{dx} \right] = \frac{[u]}{[x]} = 1$$

Die Verzerrung ist dimensionslos.

die Dimension Länge. Nur bei einer reinen Starrkörpertranslation in Richtung der x -Achse ist die Verschiebung u ortsunabhängig, im Allgemeinen handelt es sich jedoch um eine Funktion des Ortes. Die Ableitung der **Verschiebung** $u(x)$ nach x heißt **Verzerrung** oder **Dehnung**

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \quad (8.5)$$

Die dimensionslose Größe $\varepsilon(x)$ beschreibt den Verformungszustand der Stabmittellachse am Punkt x . Die Gleichung (8.5) heißt auch **Verschiebungs-Verzerrungs-Relation** (VVR). Betrachtet man einen einseitig eingespannten Stab der Anfangslänge l_0 mit dem Verschiebungsfeld $u(x) = u_0 x / l_0$, wobei u_0 die Verschiebung am Stabende $x = l_0$ ist, so folgt für die Verzerrung $\varepsilon(x) = u_0 / l_0$. Da u_0 der Längenänderung $\Delta l = l - l_0$ des Stabes entspricht, hat die Dehnung in diesem Fall die Bedeutung einer Längenänderung des Stabes pro Ausgangslänge also einer **relativen Längenänderung** $\varepsilon = \Delta l / l_0$. Diese Interpretation der Dehnung ist aber nur im Falle eines homogenen Verzerrungszustandes korrekt. Ein Verzerrungszustand heißt homogen, wenn die Verzerrung ortsunabhängig ist. Für $\varepsilon > 0$ liegt eine Streckung vor, für $\varepsilon < 0$ eine Stauchung. Bei $\varepsilon = 0$ ist der Körper an der Stelle x unverzerrt. Da die Verformungen als klein vorausgesetzt werden, gilt die Näherung: $l \approx l_0$.

8.2 Spannungs-Dehnungs-Relation

Elastische Stoffgleichungen. Ein **elastisches Materialverhalten** liegt vor, wenn die momentane Spannung $\sigma(x)$ eine Funktion der momentanen Dehnung $\varepsilon(x)$ ist

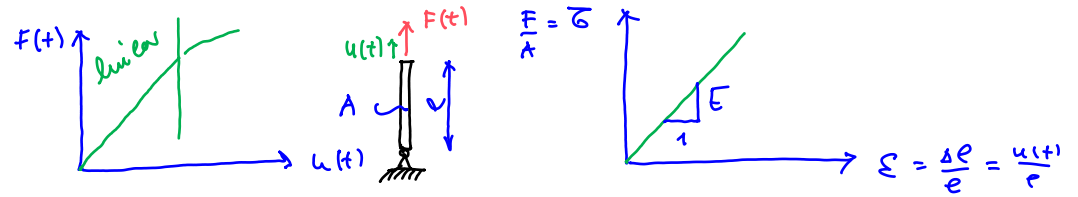
$$\sigma(x) = f(\varepsilon(x)). \quad (8.6)$$

Es ist anzumerken, dass die lokale Spannung $\sigma(x)$ keine Funktion der lokalen Verschiebung $u(x)$ sein kann, da sonst Starrkörperverschiebungen Spannungen induzieren könnten. Liegt ein **inhomogenes Materialverhalten** vor, so hängt die Materialgleichung explizit vom Ort ab

$$\sigma(x) = f(\varepsilon(x), x). \quad (8.7)$$

Elastizitätsmodul. Das **Hooke'sche Gesetz** entspricht dem Sonderfall eines linear-elastischen Materialverhaltens. Es ist zwar kein Naturgesetz, jedoch wird eine **Spannungs-Dehnungs-Relation** üblicherweise als **Materialgesetz** bezeichnet. Das

Stoffgesetz / Materialgleichung : Sonderfall : lineare Elastizität



Schule : Feder-schaltke

$$F = C u$$

C : Federkonstante

Hooke'sches "Gesetz" :

$$\sigma = E \varepsilon$$

Spannung linear in der Verzerrung

E : Elastizitätsmodul

$$\text{Einheit: } [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \quad [E] = \text{Pa}$$

$$[\varepsilon] = 1$$

Anm.:

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\frac{N}{A} = E \frac{u(x)}{l}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{E}{l} u \rightarrow$$

$$F = \frac{EA}{l} u =: C u$$

Materialkennschalt

Geometrieparameter

Zusammenfassung :

kinematik (Verschiebung - Verzerrungs-Relation)	$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$
Spannung (Stäbe)	$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}$
Stoffgesetz (Hooke)	$\sigma(x) = E(x) \varepsilon(x)$
Q&B'en	$N'(x) = -u(x)$

Verschiebung - DGLen :

$$\textcircled{1} \quad \frac{du(x)}{dx} = \varepsilon = \frac{\sigma(x)}{E(x)} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} \Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)}$$

— DGL 1. Ord
DGL 2. Ord

$$\textcircled{2} \quad 0 = N'(x) + u(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{EA}{l} u \right) + u = \left(EA \varepsilon \right)' + u = \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + u = 0$$

Hooke'sche Gesetz lautet im homogenen beziehungsweise inhomogenen Fall

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x), \quad \sigma(x) = E(x)\varepsilon(x). \quad (8.8)$$

Die Spannung ist in beiden Fällen eine lineare Funktion der Verzerrung. Der Proportionalitätsfaktor E ist eine Materialkonstante und heißt **Elastizitätsmodul**. Typische Werte von E für den Raumtemperaturbereich sind in Tabelle 8.1 angegeben. Der Elastizitätsmodul ist grundsätzlich positiv.

Material	Elastizitätsmodul E [MPa]
Stahl	210000
Aluminium	70000
Kupfer	120000
Beton	30000

Tabelle 8.1: **Elastizitätsmodul** für unterschiedliche Materialien

Querkontraktionszahl. Die Längsdehnung eines Stabes ist meist mit einer Querdehnung verbunden, wie in Abb. 8.2 angedeutet. Bei den meisten Materialien führt eine Längsstreckung zu einer Querkontraktion. Als **Querkontraktionszahl** oder **Poissonzahl** ν bezeichnet man das negative Verhältnis von Querdehnung ε_q zu Längsdehnung ε_l

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l}. \quad (8.9)$$

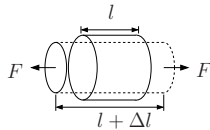


Abb. 8.2: Schema eines querkontrahierenden Zugstabes unter Zugbeanspruchung

Die Querkontraktionszahl ist meist eine positive Materialkonstante. Im Grenzfall eines inkompressiblen linear elastischen Materialverhaltens gilt: $\nu \rightarrow 0,5$. Typische Werte sind in Tabelle 8.2 gegeben. Setzt man das Hooke'sche Gesetz (8.8) in die Gleichung für die Querkontraktionszahl ein, so erhält man einen Zusammenhang zwischen der Normalspannung σ und der Querdehnung

$$\varepsilon_q = -\frac{\nu}{E}\sigma. \quad (8.10)$$

Der zwei- und der dreidimensionale Verzerrungszustand werden in der Vorlesung TMII definiert.

Beispiel 1:

geg: ρ, A, l, E, g

ges: $u(x), \varepsilon(x), \sigma(x), N(x)$, graf. Darstellung

lös: (f.o.) $N(x) = \rho g A (l - x)$ folgt nach Freikörperdiagramm mit Auswertung der QARs

Lösung mit DGL erster Ordnung:

$$u'(x) = \frac{N(x)}{EA}$$

1) Verdehnung

$$u'(x) = \frac{N(x)}{EA} = \frac{\rho g A (l - x)}{EA} = \frac{\rho g}{E} (l - x)$$

$\leadsto u(x) = \frac{\rho g}{E} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$ *Anm: DGL 1. Ordnung $\leadsto$ eine Integrationskonstante $\leadsto$ 1 RB auswendig*

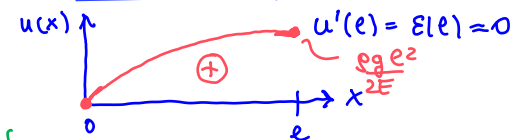
RB: $u(x=0) = 0$ feste Einspannung

$$u(x=0) = \frac{\rho g}{E} (0 - 0) + C_1 = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \leadsto C_1 = 0$$

$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{\rho g l^2}{E} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right)$$

Probe: $u(0) = 0$
 $u(l) = \frac{\rho g l^2}{2E}$

Wahrsche Darstellung:



2) Verzerrung:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = u'(x) = \frac{\rho g}{E} (l - x)$$



3) Spannung: $\sigma = E\varepsilon = \rho g (l - x)$

$$N(x) = \sigma(x)A = \rho g A (l - x)$$



Material	Querkontraktionszahl ν [-]
Stahl	0,3 ... 0,34
Aluminium	0,32 ... 0,34
Kupfer	0,33 ... 0,36
Beton	0,2

Tabelle 8.2: Querkontraktionszahl für unterschiedliche Materialien

Zulässige Zug-Druck-Spannungen. Aus Experimenten weiß man, dass die inneren Beanspruchungen nicht beliebig gesteigert werden können, ohne dass es zu bleibenden Deformationen oder Schädigungsprozessen bis hin zum Versagen kommt. Dieser Befund motiviert die Einführungen von **Festigkeitsgrenzen**. Im Rahmen der Zug-Druck-Stäbe führt man materialabhängig zulässige Zug-Spannungen σ_{zul}^+ und zulässige Druck-Spannungen σ_{zul}^- ein. Die Normalspannungen im Stab müssen also im gesamten Stab folgende Ungleichung erfüllen

$$-\sigma_{zul}^- \leq \sigma \leq \sigma_{zul}^+ \quad (8.11)$$

Unter der **Dimensionierung** von Bauteilen versteht man die konstruktive Auslegung unter Beachtung der Festigkeitsgrenzen und der Sicherheitsanforderungen. Typische Werte für **zulässige Spannungen** sind in Tabelle 8.3 aufgeführt.

Material	$\sigma_{zul}^\pm$ [MPa]
St37	140 ... 180
St52	210 ... 270
Aluminium	100
Kupfer	40
Beton	$\sigma_{zul}^- = 8 \dots 15$

Tabelle 8.3: Zulässige Zug-Druck-Spannungen für unterschiedliche Materialien

► **Beispiel:** Zur Einheit MPa. Wir betrachten einen Stab mit der Querschnittsfläche $A = 10\text{mm} \times 10\text{mm} = 100\text{mm}^2$. Auf den Stab wirke in Längsrichtung ein Gewicht mit der Masse von 10kg. Die Längskraft ist gleich der Gewichtskraft der Masse m und beträgt $N = G = mg \approx 100\text{kg m/s}^2 = 100\text{N}$. Die Längsspannung ist somit $\sigma = N/A \approx 1\text{N/mm}^2 = 1\text{MPa}$.

Beachte: σ ist die Längsspannung
 $\epsilon = \frac{u(e)}{e}$ Längsspannung: $\epsilon(x) := \frac{du(x)}{dx}$

Beispiel

geg: l, A, E, m, g

Anm: das Eigengewicht des Stabs ist vernachlässigbar

ges: $u(x), \epsilon(x), \sigma(x), N(x)$, graf. Darstellung

Schnittgrößen - DGL: $N'(x) = -m(x)$

$$\leadsto N'(x) = 0 \leadsto$$

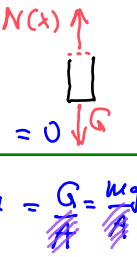
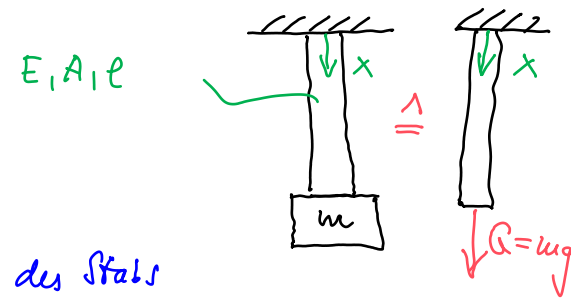
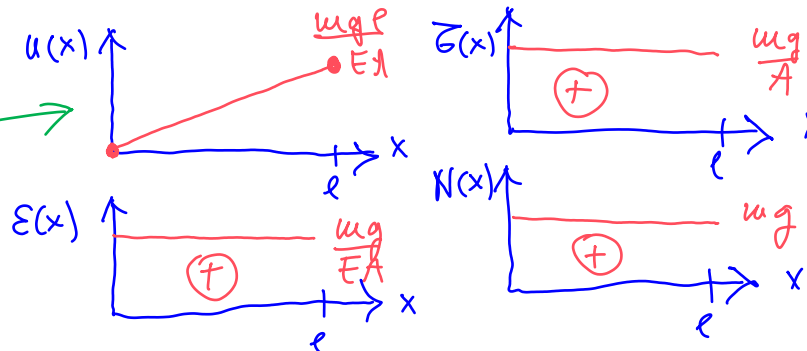
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{N}{A} = \frac{G}{A} = \frac{mg}{A}$$

$$\epsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} = \frac{mg}{EA} = \text{konst.}$$

$$u'(x) = \epsilon(x) = \frac{mg}{EA} = \text{konst.}$$

$$\leadsto u(x) = \frac{mg}{EA} x + C_1 \quad \text{RB: } u(x=0) = 0 \leadsto C_1 = 0$$

$$u(x) = \frac{mg}{EA} x \quad \leadsto u(e) = \frac{mg e}{EA}$$



Schnittkraft

Verzerrung

►**Beispiel: Längs- und Querdehnung eines Stabes.** Ein Stab mit dem E-Modul $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ und einem Durchmesser $D = 3,6 \text{ mm}$ wird mit einer Längskraft $G = 1000 \text{ N}$ belastet. Die Querschnittsfläche beträgt $A = \pi D^2/4 \approx 10 \text{ mm}^2$. Die Längsspannung im Stab ist folglich $\sigma = N/A \approx 100 \text{ N/mm}^2 = 100 \text{ MPa}$. Die Längsdehnung ist gleich $\varepsilon_l = \sigma/E \approx 100/200000 = 0,0005 = 0,05\%$. Ist der Stab einen Meter lang, dann beträgt die Längenänderung $\Delta l = \varepsilon_l l \approx 0,0005 \text{ m} = 0,5 \text{ mm}$. Für die Querdehnung mit der Querkontraktionszahl $\nu = 0,32$ gilt $\varepsilon_q = -\nu \varepsilon_l \approx -0,00016 = -0,016\%$. Die Änderung des Durchmessers beträgt $\Delta D = \varepsilon_q D \approx -0,0006 \text{ mm}$. Geht man von einer zulässigen Spannung in der Größenordnung von 100 MPa bis 200 MPa aus, so wird klar, dass ein Versagen des Stabes schon bei sehr kleinen Dehnungen auftreten kann.

►**Beispiel: Dimensionierung eines Drahts.** Welchen Durchmesser D muss ein Draht (Kreisquerschnitt) mit der zulässigen Spannung σ_{zul} haben, wenn dieser im Schwerfeld der Erde die Zuglast infolge einer Masse m tragen soll? Berücksichtigen Sie bei der Dimensionierung einen Sicherheitsfaktor S_f .

Die Längskraft im Draht beträgt $N = mg$ mit der Erdbeschleunigung g . Für die Längsspannung im Draht gilt bei der Annahme eines homogenen Spannungszustands $\sigma = N/A$. Die Querschnittsfläche ist durch $A = \pi D^2/4$ gegeben. Aus diesen Gleichungen folgt für den Durchmesser im Grenzfall $\sigma = \sigma_{\text{zul}}$ also bei einem Sicherheitsfaktor $S_f = 1$

$$D = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \sigma_{\text{zul}}}}. \quad (8.12)$$

Fordert man eine S_f -fache Sicherheit, so gilt im Grenzfall nicht $\sigma = \sigma_{\text{zul}}$ sondern $S_f \sigma = \sigma_{\text{zul}}$. Die Spannung im Draht darf nur $\sigma = \sigma_{\text{zul}}/S_f$ betragen. Damit folgt für den Durchmesser

$$D = \sqrt{\frac{4S_f mg}{\pi \sigma_{\text{zul}}}}. \quad (8.13)$$

Mit den Werten $m = 100 \text{ kg}$, $\sigma_{\text{zul}} = 100 \text{ MPa}$, $S_f = 3$ folgt für den Durchmesser $D = 6,1 \text{ mm}$. Für $S_f = 1$ ergibt sich $D = 3,5 \text{ mm}$.

Linear elastische Federn. Das mechanische Verhalten einer linear elastischen **Zug-Druck-Feder** wird oftmals nicht durch eine Spannungs-Verzerrungs-Relation sondern durch eine Kraft-Verschiebungs-Relation beschrieben. Zu einer solchen gelangt man beispielsweise bei einem homogenen linear elastischen Stab, indem man im Hooke'schen Gesetz $\sigma = E\varepsilon$ die Spannung durch $\sigma = N/A$ und die Verzerrung

durch $\varepsilon = \Delta l / l_0$ ersetzt. Es folgt

$$F = C_u \Delta l, \quad C_u = \frac{EA}{l_0}. \quad (8.14)$$

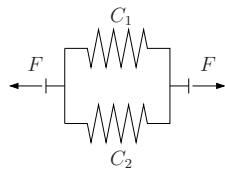
Die Größe C_u heißt **Federsteifigkeit**. Einen ähnlichen Zusammenhang kann man zwischen einem Drehmoment und dem zugehörigen Verdrehwinkel einer **Drehfeder**

$$M = C_\varphi \Delta \varphi. \quad (8.15)$$

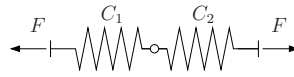
ansetzen.

Federschaltungen. Viele technische Tragwerke oder Bauteile lassen sich als **Federsystem** oder **Federschaltung** interpretieren. Gesucht ist in der Regel die Steifigkeit des gesamten Federsystems. Es gibt zwei Grundtypen von Federschaltungen: die Parallel- und die Reihenschaltung (Abb. 8.3). Bei der abgebildeten **Parallelschaltung** sind die Federwege gleich: $\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$. Die Federkräfte sind dagegen additiv $F = F_1 + F_2$. Kombiniert man diese beiden Gleichungen unter Verwendung von $F_1 = C_1 \Delta l_1$ und $F_2 = C_2 \Delta l_2$, so erhält man für den Zusammenhang von Gesamtkraft F und Federweg Δl :

$$F = C \Delta l, \quad C = C_1 + C_2. \quad (8.16)$$



8.3.a: Parallelschaltung



8.3.b: Seriellschaltung

Abb. 8.3: Federschaltungen

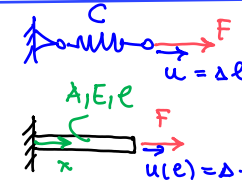
Das Ergebnis kann man auf n parallel geschaltete Federn verallgemeinern. Bei einer Parallelschaltung ergibt sich die effektive Steifigkeit durch Addition der Einzelsteifigkeiten

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (8.17)$$

Bei der abgebildeten **Reihenschaltung** sind die Federwege additiv: $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$. Die Federkräfte sind dagegen gleich $F = F_1 = F_2$. Kombiniert man diese beiden Gleichungen unter Verwendung von $F_1 = C_1 \Delta l_1$ und $F_2 = C_2 \Delta l_2$, so erhält man für

Zusammenfassung: Federschaltungen

① eine Feder:



$$F = C u$$

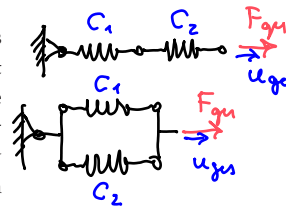
$$\sigma = E \varepsilon \quad F = N$$

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{E}{l} u(l)$$

$$F = \frac{EA}{l} u(l) = C u$$

$$C = \frac{EA}{l}$$

② Federschaltungen



Reihenschaltung ①
Kräfte gleich, Wege additiv

Parallelschaltung ②
Wege gleich, Kräfte additiv

NR: ①

$$F_1 = C_1 u_1$$

$$F_2 = C_2 u_2$$

$$F_{ges} = F_1 = F_2$$

$$u_{ges} = u_1 + u_2 = \frac{F}{C_1} + \frac{F}{C_2} = F \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\Rightarrow F_{ges} = C_{ges} u_{ges} \quad C_{ges} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

NR ②

$$F_1 = C_1 u_1$$

$$F_2 = C_2 u_2$$

$$u_{ges} = u_1 = u_2$$

$$F_{ges} = F_1 + F_2 = C_1 u_{ges} + C_2 u_{ges} = (C_1 + C_2) u_{ges}$$

$$F_{ges} = C_{ges} u_{ges} \quad C_{ges} = C_1 + C_2$$

den Zusammenhang von der Gesamtkraft F und dem Federweg Δl :

$$F = C\Delta l, \quad C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}. \quad (8.18)$$

Das Ergebnis kann man auf n in Reihe geschaltete Federn verallgemeinern. Bei einer Reihenschaltung ergibt sich die **effektive Steifigkeit** durch

$$C = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right)^{-1}. \quad (8.19)$$

8.3 Randwertproblem für linear-elastische Stäbe 8.3.

Verschiebungsdifferentialgleichung. Setzt man die Definition der Verzerrung in das Hooke'sche Gesetz (8.8) ein, dann folgt eine Differentialgleichung für die Verschiebungen

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E(x)}. \quad (8.20)$$

Aus der Annahme einer konstanten Spannung σ im Querschnitt ergibt sich $\sigma(x) = N(x)/A(x)$. Kombiniert man die letzten beiden Gleichungen, so folgt

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)}. \quad (8.21)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Die Größe $E(x)A(x)$ heißt **Zug-Druck-Steifigkeit**. Es sei noch einmal angemerkt, dass die Querschnittsgröße nur schwach veränderlich sein darf, damit diese Gleichung nicht ihre Gültigkeit verliert. Ist der Schnittgrößenverlauf $N(x)$ aus der Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen bereits bekannt, so kann aus der letzten Gleichung die Verschiebung durch Integration über x bestimmt werden. Die dabei anfallende Integrationskonstante folgt aus einer Verschiebungsrandbedingung.

Ist die Schnittkraft N nicht bekannt, so kann sie mittels (8.21) aus der Schnittgrößendifferentialgleichung (8.3) eliminiert werden, und es ergibt sich die **Verschiebungsdifferentialgleichung** zu

$$\frac{d}{dx} \left(E(x)A(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = -n(x). \quad (8.22)$$

Ist die Zug-Druck-Steifigkeit konstant, so erhält man speziell

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -n(x). \quad (8.23)$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2.Ordnung, zu deren Integration zwei Randbedingungen notwendig sind.



► **Beispiel: Zugstab mit äußerer Last.** Abb. 8.4 zeigt einen durch die Gewichtskraft $G = mg$ belasteten homogenen Stab der Länge l und der Querschnittsfläche A . Der Elastizitätsmodul des Stabes wird mit E bezeichnet und als bekannt vorausgesetzt. Die Gewichtskraft des Stabes kann gegenüber G vernachlässigt werden. Berechnen Sie die Schnittkraft $N(x)$, die Normalspannung $\sigma(x)$ sowie die Verzerrung in Stablängsrichtung $\varepsilon(x)$ und die Verschiebung $u(x)$.

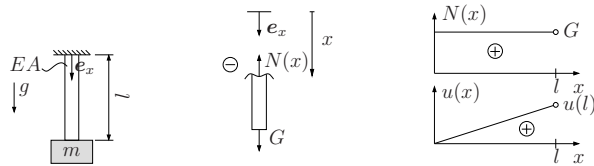


Abb. 8.4: Stab mit Belastung durch die Gewichtskraft; Verlauf von Schnittkraft und Verschiebung

Zunächst wird der Stab wie dargestellt freigeschnitten. Aus der Gleichgewichtsbildung $\downarrow$: $G - N(x) = 0$ folgt dann $N(x) = G = \text{konst.}$ Die Normalspannung berechnet sich aus dem Quotienten von Normalkraft und Querschnittsfläche zu

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{G}{A} = \text{konst.} \quad (8.24)$$

In die Berechnung der Verzerrung in x -Richtung geht der E -Modul $E(x) = E$ wie folgt ein:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)} = \frac{\sigma}{E} = \frac{G}{EA}. \quad (8.25)$$

Die Verschiebung $u(x)$ folgt dann aus der Differentialgleichung

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} = \frac{G}{EA} \rightsquigarrow u(x) = \frac{G}{EA}x + C_1. \quad (8.26)$$

Als Randbedingung geht ein, dass der Stab am oberen Ende fixiert ist, das heißt es gilt $u(x=0) = 0$. Daraus ergibt sich $C_1 = 0$.



► **Beispiel: Stab unter Eigengewicht.** Abb. 8.5 zeigt einen Stab der durch sein Eigengewicht belastet wird. Die Länge des Stabes wird mit l bezeichnet. Querschnittsfläche A , Elastizitätsmodul E , Massendichte ρ_0 und Erdbeschleunigung g werden als konstant angenommen. Gesucht werden Normalkraft $N(x)$, Normalspannung $\sigma(x)$ sowie Verzerrung $\varepsilon(x)$ und Verschiebung $u(x)$.

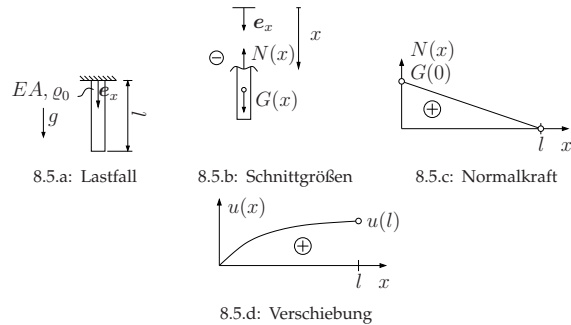


Abb. 8.5: Stab mit Gewichtskraft, Schnittgrößen, Verlauf von Kraft und Verschiebung

Aus dem Freischnitt folgt für die Gewichtskraft des unteren Teilkörpers $G(x) = m(x)g = \rho_0 g A(l - x)$. Die Normalkraft ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen $\downarrow: G(x) - N(x) = 0$ zu $N(x) = G(x) = \rho_0 g A(l - x)$. Damit erhält man die Spannung $\sigma(x) = N(x)/A = \rho_0 g(l - x)$. Für das Verzerrungsfeld folgt dann

$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{N(x)}{EA} = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{\rho_0 g}{E}(l - x). \quad (8.27)$$

Integriert man $u'(x)$, so ergibt sich das Verschiebungsfeld

$$u(x) = \frac{\rho_0 g l^2}{E} \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] + C_1 \quad (8.28)$$

und aus der Randbedingung $u(x = 0) = 0$ folgt: $C_1 = 0$. Dieses Beispiel macht deutlich, dass im Allgemeinen $\varepsilon(x) \neq \Delta l/l_0$ gilt. Diese Vereinfachung ist also nur in seltenen Fällen möglich.

Spannungskonzentrationen. Weist ein Zug-Druckstab eine Geometrieänderung in Längsrichtung, z.B. auf Grund einer Bohrung oder einer sprungartigen Querschnittsänderung auf, dann liegt bei Belastung eine Störung des einachsigen Spannungszustandes vor, der mit einer Erhöhung der lokalen Spannungen (sog. Spannungskonzentrationen) einhergeht. Lokale Geometrieänderungen, die zu Spannungskonzentrationen führen, werden als **Kerben** bezeichnet und müssen bei einer **Dimensionierung** von Bauteilen wegen der Spannungsüberhöhung berücksichtigt werden. Diese Überhöhung kann über den **Kerbspannungsfaktor** k oder die **Formzahl**

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{mittel}}} \quad \sigma_{\max} = K \sigma_{\text{mittel}} \quad (8.29)$$

abgeschätzt werden, die im Allgemeinen von der Kerbgeometrie und der Belastung

σ_{mittel} : Spannung homogen
im kleineren Querschnitt

(Zug/Druck, Biegung, Torsion) abhängen. Der Kerbspannungsfaktor kann für spezielle Geometrien Diagrammen entnommen werden (siehe z.B. Abb. 8.6). Die Größe σ_{mittel} ist die mittlere Längsspannung im kleineren Querschnitt, σ_{max} ist die maximale Spannung infolge der Kerbe.

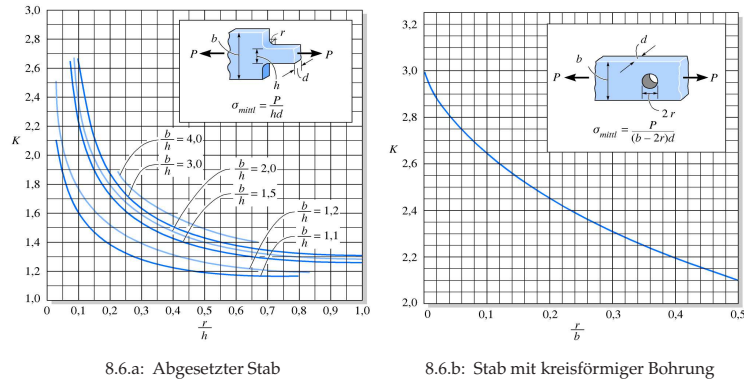


Abb. 8.6: Kerbspannungsdiagramme für Flachzugstäbe (Quelle: Hibbeler, R. C., 2006. Technische Mechanik 2 -Festigkeitslehre. Springer)

► **Beispiel: Kerbspannung in Zug-Druck-Stab.** Gegeben ist ein gebohrter Flachstab, der axial durch die Kraft F gezogen wird (Abb. 8.7). Der Stab besitzt die konstante Breite d und eine sich von b auf h veränderliche Höhe. Der Abrundungsradius an dem Absatz beträgt r und der Durchmesser der Bohrung ist h . Berechnen Sie das Verhältnis der Zugspannungen (Spannungskonzentrationen) der beiden Kerbstellen am Absatz und an der Bohrung, wenn die folgenden geometrischen Beziehungen gelten: $r/h = 0,2$ und $b/h = 2$. Lesen Sie die Kerbspannungsfaktoren aus Abb. 8.6 ab.

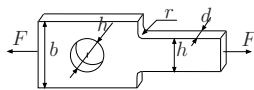


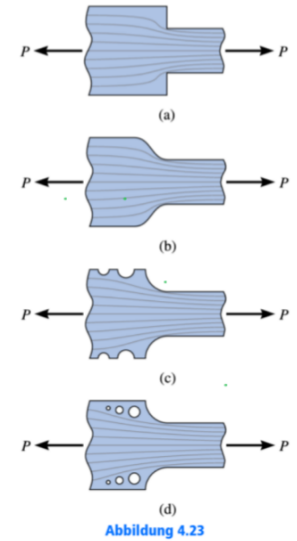
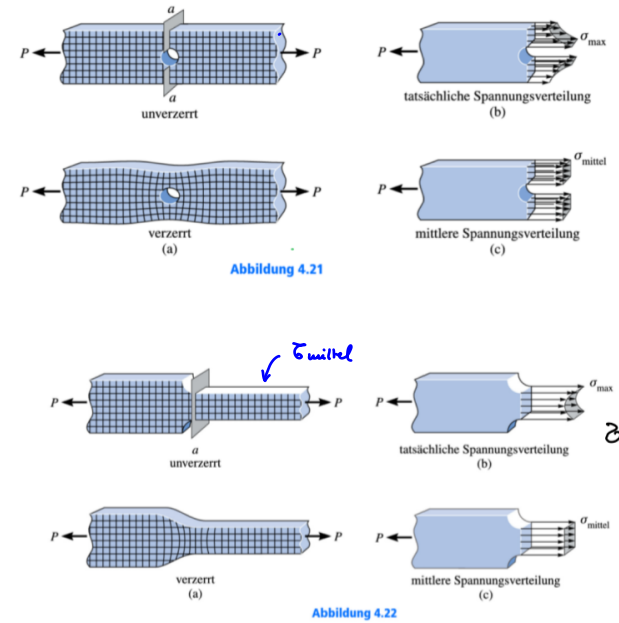
Abb. 8.7: Gekerbter Zugstab mit rechteckigem Querschnitt

Für die vorgegebene Geometrie ist die Normalspannung für den Absatz und für die Bohrung an den Stellen mit dem kleinsten Querschnitt gleich, wenn die Wirkung der Kerben nicht berücksichtigt wird

$$\sigma_{\text{mittel}} = \frac{F}{(b-h)d} = \frac{F}{hd} \quad (8.30)$$

Die Spannungskonzentrationen hängen von der Kerngeometrie ab. Der Kerbspannungsfaktor für den Absatz kann aus Abb. 8.6.a abgelesen werden

$$r/h = 0,2, \quad b/h = 2 \quad \Rightarrow \quad K^{\text{Absatz}} = 1,8. \quad (8.31)$$



Für die Bohrung ist der Kerbspannungsfaktor größer

$$\frac{h}{2b} = \frac{h}{4h} = 0,25 \Rightarrow K_{\text{Bohrung}} = 2,375. \quad (8.32)$$

Daraus folgt, dass die Stelle der Bohrung einer höheren Belastung unterliegt

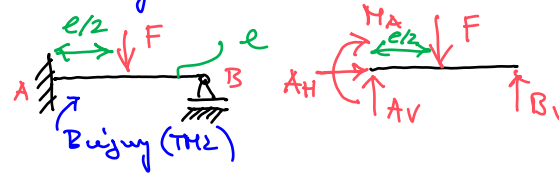
$$\frac{\sigma_{\text{Bohrung max}}}{\sigma_{\text{Absatz max}}} = \frac{K_{\text{Bohrung}}}{K_{\text{Absatz}}} = \frac{2,375}{1,8} \approx 1,32. \quad (8.33)$$

Vorgehensweise bei der Lösung statisch unbestimmter Probleme. Unter Einbeziehung der Materialeigenschaften in die Analyse von Gleichgewichtszuständen können statisch unbestimmte Probleme gelöst werden, die im Rahmen der Statik starrer Körper einer Lösung nicht zugänglich waren. Eine statisch unbestimmte Aufgabe ist dadurch gekennzeichnet, dass die Auflagerreaktionen nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Zur Bestimmung der Auflagerreaktionen im statisch unbestimmten Fall kann man folgendermaßen vorgehen:

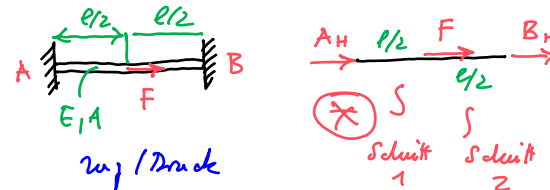
- Zunächst berechnet man aus den Gleichgewichtsbedingungen die Auflagerreaktionen soweit wie möglich. Diese sind dann Funktionen eines Satzes verbleibender zunächst noch nicht bestimmbarer Reaktionsgrößen.
- Im nächsten Schritt berechnet man die Verformungen des Tragwerks ebenfalls als Funktion der zunächst noch nicht bestimmbarer Reaktionsgrößen.
- Im letzten Schritt bestimmt man nun die statisch unbestimmten Reaktionsgrößen durch Auswertung der geometrischen Randbedingungen, die die statische Unbestimmtheit verursacht haben.

► **Beispiel: Statisch unbestimmter Zug-Druck-Stab.** Abb. 8.8 zeigt einen statisch unbestimmt gelagerten Stab der Länge l mit dem E-Modul E , dessen Querschnittsfläche einen Sprung von A_1 auf A_2 an der Stelle $x = l/2$ aufweist. Der Stab wird bei $x = l/2$ durch eine in positiver x -Richtung wirkende Einzelkraft F belastet. Berechnen Sie die Lagerreaktion P_H und Q_H sowie die Verschiebung $u(l/2)$.

Lösung statisch unbestimmter Probleme



Problem stat. unbestimmt



$$\text{GGB } 0 = A_H + B_H + F$$

unbekannt

die anderen GGBen sind erfüllt $\rightarrow$ 2 Unbekannte
1 Gleichg. $\rightarrow$ Problem
statisch unbestimmt
(einfach stat.)

Statisch unbestimmte Probleme können unter Berücksichtigung der Materialeigenschaften gelöst werden (hier linear elastisch)

Beispiel

Beispiel ①

$$\text{Bereich ①: } A_H \rightarrow x \rightarrow N(x) \quad x \in (0, l/2)$$

Beispiel ②

$$\text{Bereich ②: } A_H \rightarrow x \rightarrow F \rightarrow N(x) \quad x \in (l/2, l)$$

$$\text{GGBu } 0 = A_H + N(x) \quad N(x) = -A_H$$

$$0 = A_H + N(x) + F \quad N(x) = -(F + A_H)$$

Bereich ①:

$$u'(x) = \frac{N(x)}{EA} = -\frac{A_H}{EA}$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{A_H}{EA} x + C_1$$

noch unbekannt (A_H: konstant)

Bereich ②:

$$u'(x) = \frac{N(x)}{EA} = -\frac{(F + A_H)}{EA}$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{(F + A_H)}{EA} x + C_2$$

Unbekannte Größen: C_1, C_2, A_H

$$(S_H = -(F + A_H))$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{① } u(0) &= 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ \text{② } u(l) &= 0 \Rightarrow u(l) = 0 = -\frac{(F + A_H)}{EA} l + C_2 \end{aligned}$$

Übergangsbedingung

$$u^{(1)}\left(\frac{l}{2}\right) = u^{(2)}\left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow C_2 = \frac{F + A_H}{EA} l$$

Es folgt:

$$\text{① } u^{(1)}(x) = -\frac{A_H}{EA} x \quad u^{(2)}(x) = -\frac{(F + A_H)}{EA} x + \frac{(F + A_H)}{EA} l$$

$$u^{(1)}\left(\frac{l}{2}\right) \stackrel{!}{=} u^{(2)}\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$= \frac{(F + A_H)}{EA} (l - x)$$

$$\Rightarrow -\frac{A_H}{EA} \frac{l}{2} = \frac{(F + A_H)}{EA} \left(l - \frac{l}{2}\right) \Rightarrow -A_H = F + A_H \Rightarrow A_H = -\frac{F}{2}$$

$$-2A_H = F \Rightarrow B_H = -\frac{F}{2}$$

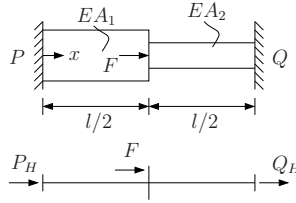


Abb. 8.8: Statisch unbestimmt gelagerter Stab mit inhomogenen Materialeigenschaften

Man wählt die Lagerreaktion Q_H als Unbekannte. Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich die Lagerreaktionen P_H in x -Richtung in Abhängigkeit von der unbekannten Kraft Q_H :

$$\rightarrow P_H + Q_H + F = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P_H = -(Q_H + F). \quad (8.34)$$

Für die Schnittgrößen erhält man

$$0 \leq x < l/2: \quad N_1 = -P_H = Q_H + F, \quad (8.35)$$

$$l/2 \leq x \leq l: \quad N_2 = -(P_H + F) = Q_H. \quad (8.36)$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichung muss nun in beiden Teilbereichen einzeln gelöst werden:

$$0 \leq x < l/2: \quad u_1' = \frac{N_1}{EA_1} \quad \rightsquigarrow \quad u_1(x) = \frac{Q_H + F}{EA_1} x + k_1, \quad (8.37)$$

$$l/2 \leq x \leq l: \quad u_2' = \frac{N_2}{EA_2} \quad \rightsquigarrow \quad u_2(x) = \frac{Q_H}{EA_2} x + k_2. \quad (8.38)$$

Aus der Randbedingung $u(x=0) = u_1(x=0) = 0$ folgt $k_1 = 0$ und aus $u(x=l) = u_2(x=l) = 0$ ergibt sich $k_2 = -Q_H l / (EA_2)$. Die unbekannte Kraft Q_H kann nun durch die Übergangsbedingung $u_1(l/2) = u_2(l/2)$ eliminiert werden. Man erhält:

$$\frac{Q_H + F}{EA_1} \frac{l}{2} = \frac{Q_H}{EA_2} \frac{l}{2} - \frac{Q_H}{EA_2} l \quad \rightsquigarrow \quad \frac{Q_H + F}{E} \frac{l}{2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) = -\frac{F}{EA_1} \frac{l}{2}. \quad (8.39)$$

Es gilt somit $Q_H = -FA_2 / (A_1 + A_2)$. Damit kann auch die verbleibende Lagerkraft P_H bestimmt werden.

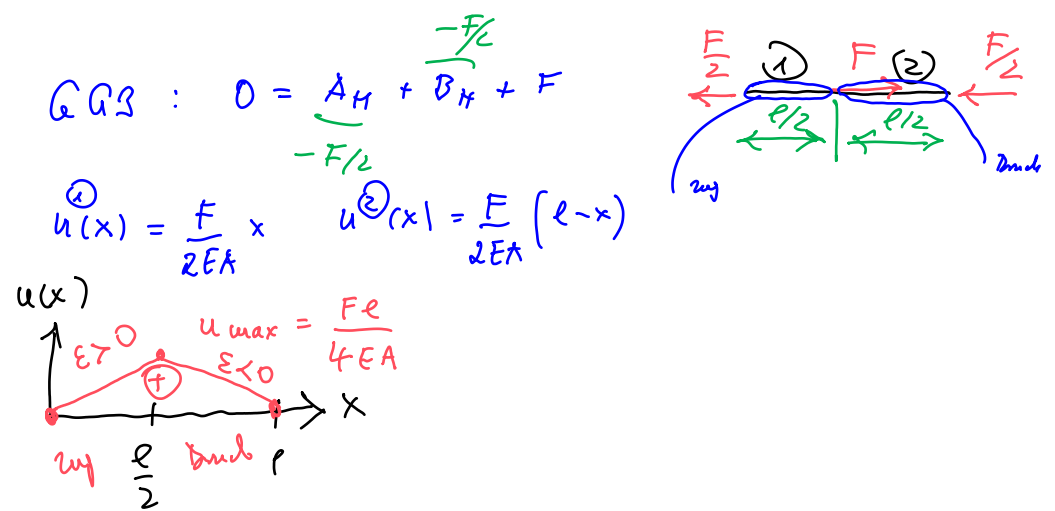
Im Sonderfall $A_1 = A_2$ folgt daraus $Q_H = -F/2$. Betrachtet man den allgemeinen Fall, so folgt für die Verschiebung

$$u_2(x) = \frac{Q_H l}{EA_2} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) = \frac{Fl}{EA_1 A_2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{x}{l} \right) = \frac{Fl}{E(A_1 + A_2)} \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (8.40)$$

An der Stelle $x = l/2$ gilt dann

$$u_2(l/2) = u_1(l/2) = \frac{Fl}{2E} \frac{1}{A_1 + A_2}. \quad (8.41)$$

Für den Sonderfall $A_1 = A_2 = A$ folgt $u_2(l/2) = u_1(l/2) = Fl / (4EA)$.



nicht klausur-relevant

Stäbe mit leicht veränderlichem Querschnitt. Treten bei Zug-Druck-Stäben Querschnittsveränderungen auf, dann ist die Annahme eines einachsigen Spannungszustandes in Längsrichtung nicht mehr verträglich mit der Annahme einer spannungsfreien Oberfläche des Stabes, da die Zugspannung in diesem Fall tangential zur Oberfläche verlaufen muss. Die Annahme kann aber im Sinne einer Näherung aufrechterhalten werden, wenn die Querschnittsänderungen klein sind. Betrachtet man beispielsweise einen Stab in Form eines Kegelstumpfs (maximaler Radius R_{max} , minimaler Radius R_{min} , Höhe H), der in Längsrichtung belastet wird, dann entspricht die Annahme einer kleinen Querschnittsänderung der Bedingung: $(R_{max} - R_{min})/H \ll 1$. Es ist zu beachten, dass Bedingungen dieser Art immer in dimensionsloser Form abgegeben werden müssen.

► **Beispiel: Kegel unter Eigengewicht.** An einer waagerechten Fläche hängt ein Kegel der Höhe H und dem maximalen Radius R_0 . Es soll gelten $R_0/H \ll 1$, so dass die Querschnittsänderung als klein angesehen werden kann. Die Massendichte ϱ sei gegeben. Der Kegel wird durch die auf ihn wirkende, als konstant angenommene Erdbeschleunigung g belastet. Berechnen Sie den Verlauf von Normalkraft $N(x)$, Normalspannung $\sigma(x)$, Verzerrung $\varepsilon(x)$ sowie das Verschiebungsfeld $u(x)$ und die Verschiebung der Kegelspitze $u(x = H)$.

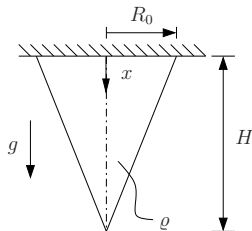


Abb. 8.9: Kegel unter Eigengewicht

Zunächst parametrisiert man den Radius $R(x) = R_0(1 - x/H)$. Die Fläche ist dann ebenfalls eine Funktion von x :

$$A(x) = \pi R^2(x) = \pi R_0^2 \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2. \quad (8.42)$$

Die Gewichtskraft des freigeschnittenen (unteren) Kegelstücks berechnet sich über folgendes Volumenintegral:

$$G(x) = \int_V \varrho g dV = \int_x^H \varrho g A(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_x^H \varrho g \pi R_0^2 \left(1 - \frac{\tilde{x}}{H}\right)^2 d\tilde{x} = \frac{\varrho g \pi R_0^2 H}{3} \left(1 - \frac{x}{H}\right)^3.$$

Für die Schnittkraft $N(x)$ und die Spannung $\sigma(x)$ folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen unter der Annahme eines im Querschnitt konstanten einachsigen Spannungszustands die

Ausdrücke

$$N(x) = G(x), \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{\varrho g H}{3} \left(1 - \frac{x}{H}\right) = \frac{\varrho g}{3} (H - x). \quad (8.43)$$

Die Verzerrung berechnet sich aus dem Quotienten von Spannung und E -Modul zu

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{\varrho g}{3E} (H - x) = \frac{du(x)}{dx}. \quad (8.44)$$

Daraus kann das Verschiebungsfeld durch Integration zu

$$u(x) = \frac{\varrho g}{3E} \left(Hx - \frac{x^2}{2}\right) + C_0 \quad (8.45)$$

bestimmt werden. Aus der Randbedingung $u(x = 0) = 0$ folgt $C_0 = 0$. Die Verschiebung der Kegelspitze ist dann

$$u(H) = \frac{\varrho g H^2}{6E}. \quad (8.46)$$

► **Beispiel: Stab gleicher Festigkeit.** Gegeben sei ein Körper der Höhe h und der Tiefe d , der durch eine Einzelkraft F und sein Eigengewicht belastet wird (Abb. 8.10). Die Erdbeschleunigung g , die Massendichte ϱ , der Elastizitätsmodul E und die Breite $b(0) = b_0$ seien bekannt. Berechnen Sie den Verlauf der Breite $b(x)$ des Körpers derart, dass die Druckbeanspruchung konstant ist, das heißt $\sigma(x) = -\sigma_0 = -F/(db_0)$ konstant.

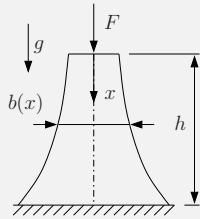


Abb. 8.10: Stab mit konstanter Festigkeit

Die Querschnittsfläche des Körpers ist

$$A(x) = b(x)d. \quad (8.47)$$

Für die Schnittkraft $N(x)$ gilt

$$N(x) = -F - G(x) = -F - \int_V \varrho g dV = -F - \varrho g \int_0^x b(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (8.48)$$

Die Streckenlast ist dann

$$n(x) = -N'(x) = \varrho g db(x). \quad (8.49)$$

Die Normalspannung im Querschnitt soll näherungsweise konstant sein, das heißt

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = -\sigma_0. \quad (8.50)$$

Daraus folgt

$$\frac{N(x)}{A(x)} = -\sigma_0 \Rightarrow N(x) + \sigma_0 A(x) = 0. \quad (8.51)$$

Ableiten nach x ergibt

$$N'(x) + \sigma_0 A'(x) = 0. \quad (8.52)$$

Die Differentialgleichung für den Querschnitt ist dann

$$A'(x) = \frac{\varrho g}{\sigma_0} A(x) \Leftrightarrow db'(x) = \frac{\varrho dg}{\sigma_0} b(x). \quad (8.53)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung erhält man durch Trennung der Veränderlichen. Sie lautet

$$\ln b(x) = \frac{\varrho g}{\sigma_0} x + C. \quad (8.54)$$

Mit der Exponentialfunktion erhält man folgenden expliziten Ausdruck für $b(x)$:

$$b(x) = b_0 \exp\left(\frac{\varrho g x}{\sigma_0}\right), \quad (8.55)$$

wobei $b_0 = b(0)$ durch

$$\sigma_0 b_0 d = F \Rightarrow b_0 = \frac{F}{\sigma_0 d} \quad (8.56)$$

gegeben ist. Die Lösung ist also $b(x) = F/(\sigma_0 d) \exp(\varrho g x/\sigma_0)$. Die Annahme eines einachsigen Spannungszustands trotz Querschnittsänderungen setzt voraus, dass die Änderung des Querschnitts klein ist, was der folgenden Bedingung entspricht: $(b(h) - b(0))/h = (\exp(\varrho g h/\sigma_0) - 1)b_0/h \ll 1$.

8.4 Thermoelastizität

Thermoelastizität. Die Beobachtung zeigt, dass sich Körper unter dem Einfluss von Temperaturänderungen verformen auch wenn keine äußeren Kräfte angreifen. Mit dieser Beobachtung verbindet man den Begriff der **Temperaturdehnung**. Um von dem Hooke'schen Gesetz für den rein mechanischen Fall zu einer Formulierung unter Einbeziehung der Temperatur zu kommen, geht man von der Vorstellung aus, dass die Längsdehnung ε an jedem Ort additiv in eine Dehnung ε_σ infolge von Spannungen und eine Temperaturdehnung ε_θ zerlegt werden kann

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_\sigma(x) + \varepsilon_\theta(x). \quad (8.57)$$

Für die Dehnung infolge von Spannungen verwendet man das Hooke'sche Gesetz

$$\varepsilon_\sigma(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)}. \quad (8.58)$$

Die Temperaturdehnung folgt aus der Annahme einer Linearität in der Temperaturdifferenz

$$\varepsilon_\theta(x) = \alpha(x) \Delta\theta(x). \quad (8.59)$$

Die Temperaturdifferenz $\Delta\theta(x)$ bezieht sich auf eine Referenztemperatur θ_0 : $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Die positive Materialkonstante α heißt **thermischer Ausdehnungskoeffizient**. Typische Werte von α sind in Tabelle 8.4 gegeben. Setzt man beide Materialgleichungen in die Ausgangsgleichung ein, so folgt die dehnungsexplizite Formulierung des Hooke'schen Gesetzes

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)} + \alpha(x) \Delta\theta(x). \quad (8.60)$$

Ein Umstellen nach der Spannung ergibt schließlich die spannungsexplizite Formulierung

$$\sigma(x) = E(x)(\varepsilon(x) - \varepsilon_\theta(x)) = E(x)(\varepsilon(x) - \alpha(x) \Delta\theta(x)). \quad (8.61)$$

Material	Ausdehnungskoeffizient α [10^{-6}K^{-1}]
Stahl	12
Aluminium	23
Kupfer	17
Beton	10

Tabelle 8.4: Thermischer Ausdehnungskoeffizient für unterschiedliche Materialien

Verschiebungsdifferentialgleichung. Analog zu Formel (8.21) erhält man im thermoelastischen Fall

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} + \alpha(x) \Delta\theta(x). \quad (8.62)$$

Dies ist ebenfalls eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Sind der Schnittgrößenverlauf $N(x)$ aus der Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen und die Temperaturverteilung $\Delta\theta(x)$ bekannt, so kann aus dieser Differentialgleichung die Verschiebung durch Integration über x bestimmt werden. Die dabei anfallende Integrationskonstante folgt aus einer Verschiebungsrandbedingung. Für den

Thermoelastizität

$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \stackrel{\text{Verschiebung}}{=} \varepsilon_\sigma(x) + \varepsilon_\theta(x)$

$\varepsilon_\sigma(x) \stackrel{\text{Spannung induzierte Dehnung}}{=} \frac{\sigma(x)}{E(x)} \stackrel{\text{Vervorg}}{=} \frac{\overline{\sigma}(x)}{E(x)}$

$\varepsilon_\theta(x) \stackrel{\text{Temperatur induzierte Dehnung}}{=} \alpha(x) \Delta\theta(x)$

$\Delta\theta(x) = \theta(x) - \theta_0$

$\overline{\sigma}(x) \stackrel{\text{Referenz Temp.}}{=} E(x) \varepsilon_\sigma(x) \stackrel{\text{3}}{=} E(x) (\varepsilon(x) - \varepsilon_\theta(x)) \stackrel{\text{2}}{=} E(x) (\varepsilon(x) - \alpha(x) \Delta\theta)$

Das thermoelastische Hooke'sche Gesetz

$\overline{\sigma} = E(\varepsilon - \alpha \Delta\theta)$

Verschiebung DGL 1. Ordnung

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} + \alpha(x) \Delta\theta(x)$$

$\varepsilon \quad \varepsilon_\sigma \quad \varepsilon_\theta$

thermoelastischen Fall lässt sich analog zum rein-mechanischen durch Elimination der Schnittkraft eine Differentialgleichung 2.Ordnung für die Verschiebung herleiten.

►**Beispiel: Thermoelastischer Stab.** Abb. 8.11 zeigt einen Stab mit bekannter Geometrie (A, l). Der Elastizitätsmodul E und der thermische Ausdehnungskoeffizient α seien ebenso wie der Temperaturverlauf $\Delta\theta(x) = \Delta\theta_0(x/l)^2$ gegeben. Bestimmen Sie die Kraft F_0 , die notwendig ist, damit die Verschiebung des Stabendes null ist.

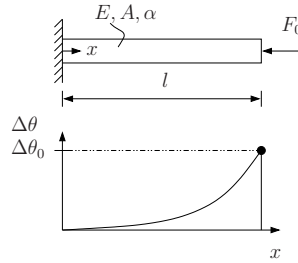


Abb. 8.11: Statisch bestimmt gelagerter Stab unter thermischer Belastung

Aus dem Freischnitt ergibt sich die Normalkraft zu

$$N(x) = -F_0. \quad (8.63)$$

Aus der Verschiebungsdifferentialgleichung

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} + \alpha(x)\Delta\theta(x) = \frac{-F_0}{EA} + \alpha\Delta\theta_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (8.64)$$

folgt nach Integration

$$u(x) = -\frac{F_0 x}{EA} + \frac{\alpha\Delta\theta_0 l}{3} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + C. \quad (8.65)$$

Aus der Lager-Randbedingung $u(x=0) = 0$ ergibt sich $C = 0$. Setzt man nun wie gefordert $u(x=l) = 0$, so folgt

$$u(x=l) = 0 = -\frac{F_0 l}{EA} + \frac{\alpha\Delta\theta_0 l}{3} \rightarrow F_0 = \frac{1}{3}\alpha\Delta\theta_0 EA. \quad (8.66)$$

Fasst man die Ergebnisse zusammen, so erhält man:

$$u(x) = \frac{\alpha\Delta\theta_0 l}{3} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l} \right], \quad (8.67)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\alpha\Delta\theta_0}{3} \left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1 \right], \quad (8.68)$$

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= E[\varepsilon(x) - \alpha\Delta\theta(x)] \\ &= \frac{E\alpha\Delta\theta_0}{3} \left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \\ &= -\frac{E\alpha\Delta\theta_0}{3} = -\frac{F_0}{A} = \frac{N}{A}. \end{aligned} \quad (8.69)$$

►Beispiel: Stab mit inhomogener Temperaturverteilung. Betrachtet wird nun ein statisch unbestimmt gelagerter Stab (Abb. 8.12) der Länge l und mit Querschnittsfläche A . Der Elastizitätsmodul E und der thermische Ausdehnungskoeffizient α sind gegeben. Die Temperaturverteilung im Stab wird durch die Abweichung $\Delta\theta(x) = \Delta\theta_0 (x/l)^2$ beschrieben. Für $\Delta\theta(x) \equiv 0$ ist der Stab spannungsfrei. Berechnen Sie Normalkraft $N(x)$, Normalspannung $\sigma(x)$, Verzerrung $\varepsilon(x)$ und Verschiebung $u(x)$ in Längsrichtung des Stabes sowie die Lagerreaktionen.

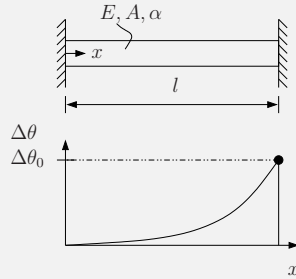


Abb. 8.12: Statisch unbestimmt gelagerter Stab unter thermischer Belastung

Zunächst wird das unbestimmte System durch ein bestimmtes System ersetzt, indem die unbekannte rechte Lagerreaktion durch eine in negativer x -Richtung wirkende Kraft F ersetzt wird. Aus den Gleichgewichtsbedingungen lassen sich Normalkraft und Spannung zu

$$N(x) = -F, \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = -\frac{F}{A} \quad (8.70)$$

bestimmen. Die Verschiebung $u(x)$ erfüllt zudem die Differentialgleichung

$$\frac{du(x)}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA} + \alpha\Delta\theta(x) = -\frac{F}{EA} + \alpha\Delta\theta_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (8.71)$$

und die zugehörigen Randbedingungen $u(x=0) = 0 = u(x=l)$. Integriert man $u'(x)$, so erhält man

$$u(x) = -\frac{Fx}{EA} + \frac{\alpha\Delta\theta_0 l}{3} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + C. \quad (8.72)$$

Die Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt dann:

$$C = 0, \quad F = \frac{\alpha\Delta\theta_0 EA}{3} = -N(x). \quad (8.73)$$

Für die Spannung gilt also

$$\sigma(x) = -\frac{F}{A} = -\frac{\alpha\Delta\theta_0 E}{3}. \quad (8.74)$$

Kapitel 9

Statik der undeformbaren Seile

9.1 Typische Belastungsfälle und vereinfachende Annahmen

Vereinfachende Annahmen. Unter einem Seil versteht man eine Struktur, die man leicht biegen kann und deren Querschnittsabmessungen gegenüber der Längsabmessung klein sind. Zur Spezifikation der Lage und der Form eines Seils genügt auf Grund dieser geometrischen Abmessungen eine Raumkurve, die **Seilkurve** genannt wird. Die Gleichgewichtslagen von Seilen können im Rahmen der Statik der starren Körper behandelt werden, wenn die Längenänderung des Seils infolge der äußeren Lasten vernachlässigt werden kann. Die Schnittkraft in einem Querschnitt des Seils wird als **Seilkraft** bezeichnet. Seile übertragen nur Zugkräfte, die tangential zur Seilkurve liegen. Das Ziel besteht im Folgenden in der Berechnung der Seilkurve und der Seilkraft. Ein **ideales Seil** ist dadurch gekennzeichnet, dass es vollkommen biegsam und undeformbar ist, sowie nur Zugkräfte aufnehmen kann. Ketten lassen sich analog zu Seilen behandeln.



9.1.a: Hängebrücke

9.1.b: Überlandleitung

9.1.c: Oberleitung

Abb. 9.1: Seile mit verschiedenen Belastungen

Ideales Seil

- 1) 1D - Struktur, undeformbar, biegsam
- 2) nur Aufnahme von Zugspannen (Linienwerk)

Seilgeometrie:

s : "Bogenlänge", Seil wird parametrisiert

Auswertung der GGBen

$$\underline{0} = \underline{S}(s+\Delta s) - \underline{S}(s) + \int_s^{s+\Delta s} \underline{q}(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\underline{S}(s+\Delta s) - \underline{S}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \underline{q}(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

$$\frac{d\underline{S}(s)}{ds} = -\underline{q}(s)$$

Gleichgewichtsbedingung für die Seilkraft
tangential zur Seilkurve

Seilkraft

$$\underline{S}(s) = H(s) \underline{e}_H + V(s) \underline{e}_V$$

zerlegt in Komponenten

$H(s)$: Horizontalzug

$V(s)$: Vertikalzug

$$\underline{q}(s) = q_H(s) \underline{e}_H + q_V(s) \underline{e}_V$$

Einsetzen in DGL

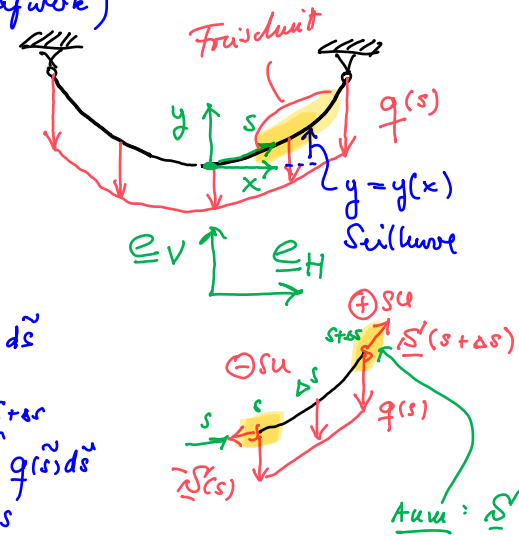
$$\underline{e}_H: H'(s) = -q_H(s)$$

$$\underline{e}_V: V'(s) = -q_V(s)$$

DGL in Komponenten

oder

Wichtigster Sonderfall: $q_H = 0$: Streckenlast im Seil wirkt vertikal
 $\rightarrow H'(s) = \frac{dH(s)}{ds} = 0 \rightarrow H = H_0 = \text{konst.}$
 konstanter Horizontalzug



Typische Belastungsfälle. Abb. 9.1 zeigt typische Belastungsfälle von Seilen. Im Fall der abgebildeten Hängebrücke in Abb. 9.1.a ist das Eigengewicht des Seils gegenüber der Brückenlast vernachlässigbar, so dass die das Seil belastende Streckenlast als konstant in horizontaler Richtung betrachtet werden kann.

Im Fall des Seils unter Eigengewicht in Abb. 9.1.b ist die Streckenlast durch die Massenverteilung des Seils gegeben und damit konstant entlang der Seilkurve (homogene Massendichte).

Abb. 9.1.c zeigt ein mit Einzelkräften belastetes Seil. Sind die Einzelkräfte groß im Vergleich zur Gewichtskraft des Seils, so kann man das Eigengewicht des Seils vernachlässigen.

9.2 Differentialgleichung der Seilkraft

Bogenlängenformulierung. Bildet man das Kräftegleichgewicht an einem Seilstück der Länge Δs (siehe Abb. 9.2) und bildet den Grenzübergang $\Delta s \rightarrow 0$, so erhält man die **Differentialgleichung der Seilkraft S**

$$\frac{dS(s)}{ds} = -q(s). \quad (9.1)$$

Die Änderung der Seilkraft S mit der Bogenlänge s ist gleich der negativen Streckenlast $q(s)$.

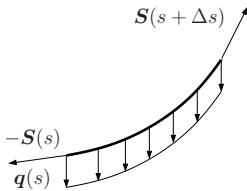


Abb. 9.2: Kräftegleichgewicht an einem Seilstück der Länge Δs

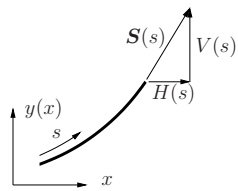


Abb. 9.3: Seilkurve und Seilkraft

Zerlegt man die Seilkraft S und die Streckenlast q jeweils in eine Horizontal- und eine Vertikalkomponente

$$S(s) = H(s)e_x + V(s)e_y, \quad q(s) = q_H(s)e_x + q_V(s)e_y, \quad (9.2)$$

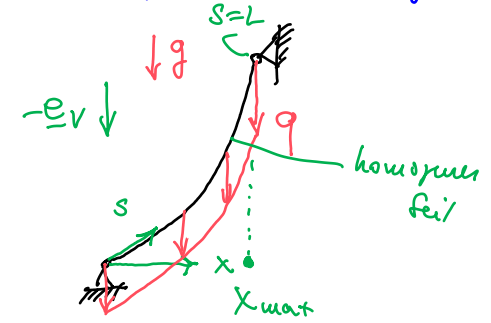
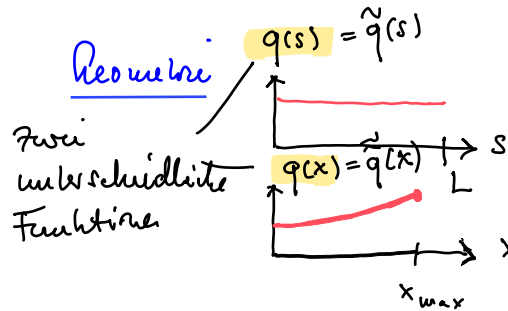
so erhält man aus der vektorwertigen Gleichung (9.1) durch Komponentenvergleich

Vertikalkomponente:

$$V'(s) = -q_V(s) =: q(s)$$

$\uparrow e_v$ $\downarrow q$

$q(s)$: Streckenlast in negativ e_v -Richtung



$$q(s) \neq q(x)$$

$$\frac{ds}{dx} dy$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{dV(s)}{ds} = q(s)$$

Dal s.o.

$$\frac{dV}{dx} \frac{dx}{ds} = q(s)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = q(s) \sqrt{1 + y'^2} = q(x)$$

$$q(s) ds = q(x) dx$$

$$q(s) \sqrt{1 + y'^2} = q(x)$$



$$y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)} = \frac{V(x)}{H_0}$$

$y(x)$ Seilkurve $y'(x)$: Tangente

② u. ①

$$y''(x) = \frac{V'(x)}{H_0} = \frac{q(x)}{H_0}$$

DAL für Fall Brücke $q = q(x)$

lineare DAL

nichtlineare DAL

$$y''(x) = \frac{q(s)}{H_0} \sqrt{1 + y'^2}$$

DAL für Fall Seil unter Eigengewicht $q = q(s) = q_0$

die beiden skalaren Gleichungen

$$\frac{dH(s)}{ds} = -q_H(s), \quad \frac{dV(s)}{ds} = -q_V(s). \quad (9.3)$$

Bei der Zerlegung der Seilkraft und der Streckenlast wurde angenommen, dass die horizontale Richtung mit e_x und die vertikale Richtung mit e_y bezeichnet wird.

In vielen Fällen werden Seile nur in vertikaler Richtung belastet ($q_H = 0$). Führt man die Abkürzung $q(s) = -q_V(s)$ ein, so ergibt sich aus Gleichung (9.3) für den Fall einer reinen Vertikalbelastung

$$\frac{dH(s)}{ds} = 0, \quad \frac{dV(s)}{ds} = q(s). \quad (9.4)$$

Bei reiner vertikaler Belastung eines Seils ist die **Horizontalkraft** konstant: $H(s) = H_0$. Die Änderung der **Vertikalkraft** $V(s)$ mit der Bogenlänge s ist gleich der Streckenlast $q(s)$.

Formulierung mit der Horizontalkoordinate x . Bei der in Abb. 9.1.a dargestellten Hängebrücke liegt der Fall einer in horizontaler Richtung konstanten Streckenlast vor ($q(x) = q_0$). Bei dem in Abb. 9.1.b dargestellten Seil unter Eigengewicht liegt der Fall einer konstanten Last entlang der Bogenlänge des Seils vor ($q(s) = q_0$). Diese beiden Fälle können als die zwei Grundtypen der Belastung eines Seils durch eine Streckenlast aufgefasst werden. Bisher wurde die Differentialgleichung der Seilkraft nur für den Fall der Parametrisierung mittels der Bogenlänge s abgeleitet. Um die beiden Grundtypen der Belastung eines Seils behandeln zu können, muss die Differentialgleichung für die Seilkraft auch für den Fall einer Parametrisierung mittels der Horizontalkoordinate x formuliert werden.

Um den Zusammenhang zwischen $q(x)$ und $q(s)$ herzustellen, kann man von der Forderung der Gleichheit der resultierenden Kraft Q beider Streckenlasten ausgehen

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx = \int_{s_1}^{s_2} q(s) ds. \quad (9.5)$$

Für das Differential der Bogenlänge gilt

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (9.6)$$

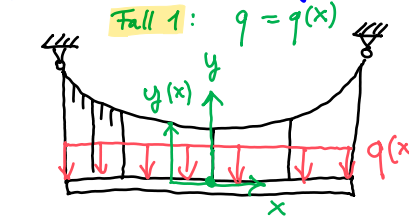
mit der ersten Ableitung $y'(x) = dy(x)/dx$ der Seilcurve $y(x)$. Einsetzen von Gleichung (9.6) in Gleichung (9.5) ergibt

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} q(s(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (9.7)$$

Nach einem Vergleich der Integranden folgt

$$q(x) = q(s) \sqrt{1 + y'(x)^2}, \quad (9.8)$$

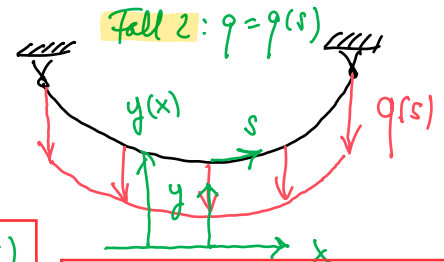
Zusammenfassung: Seile



$$y''(x) = \frac{q(x)}{H_0}$$

konst.

$$q(x) \neq q(s)$$



$$y''(x) = \frac{q(s)}{H_0} \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

konst.

TM1: $q(s) = q_0 = \text{konst.}$
homogenes Seil

H_0 : Horizontalzug

$$\underline{S} = H \underline{e}_H + V \underline{e}_V$$

$$q = q_V \underline{e}_V \quad q_H = 0 \rightarrow H = H_0 = \text{konst.}$$

woraus sich mit Gleichung (9.6)

$$q(x)dx = q(s)ds \quad (9.9)$$

ergibt.

Mit Hilfe dieser Formel kann nun die Differentialgleichung für die Seilkraft auch in Abhängigkeit von der Horizontalen Koordinate x formuliert werden. Aus $dV(s)/ds = q(s)$ folgt $dV = q(s)ds = q(x)dx$ und damit $dV(x)/dx = q(x)$. Aus $dH(s)/ds = 0$ folgt $dH(x)/dx = 0$. Äquivalent zu den Differentialgleichungen (9.4) gilt somit

$$\frac{dH(x)}{dx} = 0, \quad \frac{dV(x)}{dx} = q(x). \quad (9.10)$$

Die Änderung der Vertikalkraft $V(x)$ mit der Horizontalen Koordinate ist gleich der Streckenlast $q(x)$. Es sei nochmals betont, dass die Funktionen $q(x)$ und $q(s)$ im Allgemeinen verschieden sind.

9.3 Die Differentialgleichung der Seilkurve

Differentialgleichung der Seilkurve. Da ein ideales Seil nur Zugkräfte aufnehmen kann, tangiert der Vektor der Seilkraft S die Seilkurve, die im ebenen Fall durch eine Funktion $y(x)$ beschrieben wird. Zwischen der ersten Ableitung der Seilkurve $y'(x) = dy(x)/dx$ und den Komponenten von S in horizontaler und vertikaler Richtung besteht daher der Zusammenhang

$$y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)} \quad (9.11)$$

(siehe Abb. 9.3), der sich bei reinen Vertikallasten zu

$$y'(x) = \frac{V(x)}{H_0} \quad (9.12)$$

vereinfacht. Leitet man diese Differentialgleichung nach x ab und setzt Gleichung (9.10)₂ ein, so folgt

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{H_0} \quad (9.13)$$

Das ist die **Differentialgleichung der Seilkurve** in der Parametrisierung mit der Horizontalen Koordinate x . Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Ist die Streckenlast in Form der Funktion $q(x)$ gegeben, so kann die Seilkurve $y(x)$ aus Gleichung (9.13) durch Integration

Beispiel zu Fall 1:

geg: $q_0, B=2b, h, f$

ges: 1) Seilkurve

2) Seilkraft ($V(x), H(x)$)

lös: DGL: $y''(x) = \frac{q(x)}{H_0} = \frac{q_0}{H_0}$ *konst.*

H_0 ist unbekannt und muss bestimmt werden

Integration 1: $y'(x) = \frac{q_0}{H_0} x + C_1$

Integration 2: $y(x) = \frac{q_0 x^2}{2H_0} + C_1 x + C_2$ 3 Unbekannte: C_1, C_2, H_0

RBen: ① $y'(x=0) = 0 \leadsto C_1 = 0$

② $y(x=0) = h - f \leadsto h - f = C_2$

$\leadsto y(x) = \frac{q_0}{2H_0} x^2 + h - f$ *unbekannt*

③ $y(x=b) = h \leadsto h = \frac{q_0}{2H_0} b^2 + h - f$

$f = \frac{q_0 b^2}{2H_0} \leadsto H_0 = \frac{q_0 b^2}{2f}$

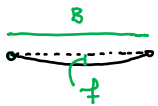
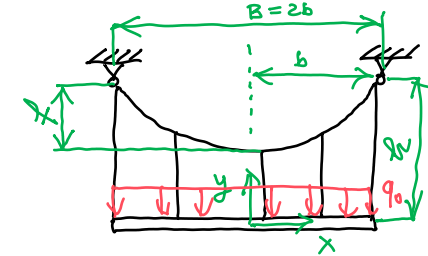
$\rightarrow y(x) = \frac{q_0}{2} \frac{x^2}{\frac{q_0 b^2}{2f}} + h - f = \frac{f}{b^2} x^2 + h - f = y(x)$

Seilkraft: $|S| = \sqrt{H_0^2 + V(x)^2} = \sqrt{H_0^2 + V'^2(x)} H_0 = \sqrt{1 + y'^2(x)} H_0$

$S_{\min} = |S|(x=0) = H_0 = \sqrt{1 + y'^2(x=0)} H_0 = \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 x}{H_0}\right)^2} H_0$ (H_0 siehe oben)

$S_{\max} = |S|(x=b) = \sqrt{H_0^2 + (q_0 b)^2}$

$y'(x) = \frac{q_0}{H_0} x$



bestimmt werden. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

Die Differentialgleichung (9.13) ist insbesondere dann zu verwenden, wenn wie im Beispiel der Hängebrücke $q(x) = q_0$ gilt (siehe Abb. 9.1.a). In diesem Fall ist die Seilkurve durch eine Parabel gegeben. Aus Gleichung (9.13) folgt weiterhin, dass für eine verschwindende Streckenlast ($q(x) = 0$) die Seilkurve eine Gerade ist ($y''(x) = 0$). Dies ist z.B. dann der Fall, wenn ein Seil durch Einzelkräfte belastet wird und das Eigengewicht des Seils gegenüber den Einzelkräften vernachlässigt werden kann (siehe Abb. 9.1.c).

Ist dagegen die Streckenlast in Form von $q(s)$ gegeben, z.B. als $q(s) = q_0$, so ist es vorteilhaft, $q(x) = q(s)\sqrt{1 + y'(x)^2}$ aus Gleichung (9.8) in Gleichung (9.13) einzusetzen. Man erhält dann

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{q_0}{H_0} \sqrt{1 + y'(x)^2}. \quad (9.14)$$

Diese zu Gleichung (9.13) mathematisch äquivalente Differentialgleichung ist insbesondere dann zu verwenden, wenn $q(s) = q_0$ gilt, was dem Fall eines Seils mit konstantem Querschnitt und homogener Dichte unter Eigengewicht entspricht. In diesem Fall lautet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{q_0}{H_0} \sqrt{1 + y'(x)^2}. \quad (9.15)$$

Das ist eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wählt man das Koordinatensystem derart, dass $y'(x=0) = 0$ gilt, so hat die Lösung der Differentialgleichung (9.15) die Form

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + y_0 \quad (9.16)$$

mit dem **Seilparameter** $a = H_0/q_0$. Ohne die Annahme $y'(x=0) = 0$ lautet die Lösung der Differentialgleichung $y(x) = a \cosh((x - x_0)/a) + y_0$. Im Falle des Seils mit konstanter Streckenlast pro Bogenlänge ist die Seilkurve durch den cosinus hyperbolicus gegeben. Parametrisiert man das Seil mit der Bogenlänge s so, dass $s(x=0) = 0$ gilt (siehe Abb. 9.6), dann folgt mit Gleichung (9.8)

$$s(x) = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\bar{x})^2} d\bar{x} \quad (9.17)$$

und daraus mit Gleichung (9.16)

$$s(x) = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right). \quad (9.18)$$

Die **Hyperbolicus-Funktionen** $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ sind durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) \quad (9.19)$$

Allg. Lösung für den Fall: Seil mit Eigengewicht

DGL: $y''(x) = \frac{q_0}{H_0} \sqrt{1 + y'(x)^2}$

nicht lineare
gewöhnliche
DGL

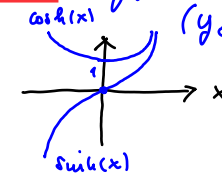
Ansatz:
für Lösung

$$y(x) = y_0 + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

a : Seilparameter
 y_0 : Konstante
($y_0 \neq y(0)$)

Ergänzung:

$$\begin{aligned} e^x &= \exp(x) \\ \sinh(x) &:= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh(x) &:= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ 1 + \sinh^2(x) &= \cosh^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ 1 &= \sinh^2(x) + \cosh^2(x) \end{aligned}$$

Probe: $y(x) = y_0 + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ (Ansatz)

$$y'(x) = \frac{a}{a} \sinh\left(\frac{x}{a}\right) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

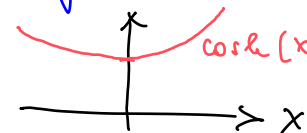
$$y'^2(x) = \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) - 1$$

$$y''(x) = + \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{q_0}{H_0} \sqrt{1 + \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) - 1} = \frac{q_0}{H_0} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{q_0}{H_0} \quad a = \frac{H_0}{q_0}$$

$\Rightarrow y(x) = y_0 + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ löst die nichtlineare DGL



definiert, woraus z.B. $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ folgt. Für die Seilkraft gilt im Falle reiner Vertikallasten

$$|S(x)| = \sqrt{H(x)^2 + V(x)^2} = H_0 \sqrt{1 + y'^2(x)}. \quad (9.20)$$

► **Beispiel: Seil mit Einzelkraft.** Ein Seil der Länge L wird in zwei Punkten mit dem Abstand B gelagert und in der Mitte durch eine Einzelkraft F belastet (siehe Abb. 9.4). Man bestimme die Seilcurve und die Seilkraft unter der Voraussetzung, dass das Eigengewicht des Seils vernachlässigbar ist.

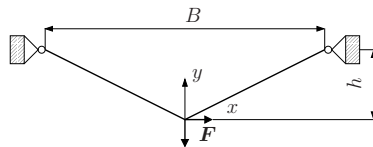


Abb. 9.4: Seil mit Einzelkraft

Die Streckenlast ist in diesem Beispiel null. Aus Gleichung (9.13) folgt daher: $y''(x) = 0$. Die Seilcurve besteht also aus zwei Geraden. Die Integration der Differentialgleichung ergibt $y(x) = C_1 x + C_2$. Die Integrationskonstante C_2 verschwindet auf Grund der Wahl des Koordinatenursprunges. Da das Seil undeformbar ist, gilt für h

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - B^2}. \quad (9.21)$$

Für die Seilcurve ergibt sich

$$y(x) = \pm \frac{2h}{B} x, \quad (9.22)$$

wobei das positive Vorzeichen für $x \geq 0$ gilt und das negative für $x \leq 0$. Die Seilkraft ergibt sich zu

$$S = \frac{F}{2} \frac{L}{\sqrt{L^2 - B^2}}. \quad (9.23)$$

Für $L \rightarrow B$ wird die Seilkraft unendlich. Für $B \rightarrow 0$ folgt $S = F/2$.

► **Beispiel: Hängebrücke.** Eine Brücke der Länge $B = 2b$ sei an einem Seil befestigt, dessen Eigengewicht vernachlässigbar sei (siehe Abb. 9.5). Der Durchhang f des Seils, die Höhe h und die Streckenlast $q(x) = q_0$ sind gegeben. Man bestimme die Seilcurve $y(x)$ und die Seilkräfte H_0 und $V(x)$.

Beispiel: Seil unter Eigengewicht S. 122

geg: $L = 2\ell$ (Länge des Seils)

q_0 , $B = 2b$

ges: Lösung der Seilcurve (a, H_0, y_0)
Seilkraft $H_0, V(x)$

lös: $y''(x) = \frac{q_0}{H_0} \sqrt{1 + y'^2(x)}$

die allg. Lösung lautet

$$y(x) = y_0 + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{Setze } y_0 = 0$$

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad a = \frac{H_0}{q_0}$$

NR: Zusammenhang von Seillänge und Seilcurve

$$L(x) = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\tilde{x})} d\tilde{x} = \int_0^x \cosh\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) d\tilde{x} = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

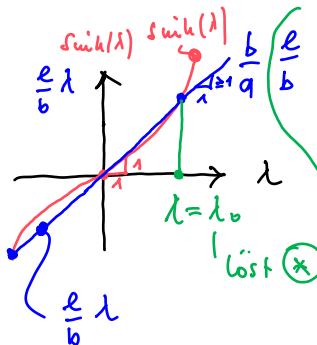
$$RB: L(x=b) = \ell$$

$$\ell = a \sinh\left(\frac{b}{a}\right)$$

ℓ, b : gegeben
 a : gesucht

$$\frac{\ell}{b} = \sinh\left(\frac{b}{a}\right) \quad \frac{b}{a} =: \lambda$$

$$\left(\frac{\ell}{b}\right) \lambda = \sinh(\lambda)$$



$$y(0) = a = \frac{b}{\lambda_0}$$

$$\lambda \text{ folgt aus numerischen Berekdy } \leadsto \text{Seilcurve}$$

$$y(x=0) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_0 \quad a = \frac{H_0}{q_0} \quad \lambda = \lambda_0 = \frac{b}{a} \quad a = \frac{b}{\lambda_0}$$

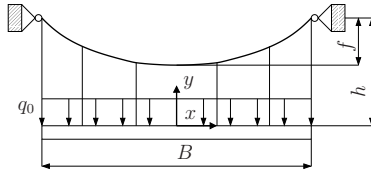


Abb. 9.5: Hängebrücke

Aus Gleichung (9.13) folgt nach Integration

$$y'(x) = \frac{q_0}{H_0} x + C_1 \quad (9.24)$$

und

$$y(x) = \frac{q_0}{2H_0} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (9.25)$$

Die Gleichung für die Seilcurve enthält drei Unbekannte: die Horizontalkraft H_0 und die zwei Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Aus den Randbedingungen $y'(x=0)=0$ und $y(x=0)=h-f$ folgen die Integrationskonstanten $C_1=0$ und $C_2=h-f$. Aus der Bedingung $y(x=b)-y(x=0)=f$ folgt für die Horizontalkraft

$$H_0 = \frac{q_0 b^2}{2f} = \frac{q_0 B^2}{8f}. \quad (9.26)$$

Die Horizontalkraft H_0 ist also proportional zu q_0 und b^2 und umgekehrt proportional zum Durchhang f . Für $f \rightarrow 0$ folgt $H_0 \rightarrow \infty$. Einsetzen der Horizontalkraft in die Seilcurve ergibt schließlich

$$y(x) = f \left(\frac{x}{b} \right)^2 + h - f. \quad (9.27)$$

Die Vertikalkraft folgt aus der Gleichung (9.12) zu

$$V(x) = H_0 y'(x) = q_0 x. \quad (9.28)$$

Die Vertikalkraft $V(x)$ ist also bei $x = \pm b$ betragsmäßig am größten. Ist statt des Durchhangs f die Länge des Seils L gegeben, so ist die Bedingung (siehe Gleichung (9.8))

$$L = \int_{-b}^{+b} ds = \int_{-b}^{+b} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (9.29)$$

zu verwenden. Für $y'(x) = q_0 x / H_0$ ist diese Gleichung zwar analytisch integrierbar, das Integral ist aber eine transzendente Gleichung in der Unbekannten H_0 , die grafisch oder numerisch gelöst werden muss.

► **Beispiel: Seil unter Eigengewicht.** Ein Seil der Länge $L = 2l$ ist zwischen zwei Lagern mit dem Abstand $B = 2b$ gespannt (siehe Abb. 9.6). Die Streckenlast infolge des Eigengewichts des Seils ist $q(s) = q_0$. Man gebe die Gleichung für den Seilparameter $a = H_0/q_0$ an und bestimme den

max. Durchhang :

$$\begin{aligned} f &= y(b) - y(a) = a \cosh\left(\frac{b}{a}\right) - a \cosh\left(\frac{0}{a}\right) \\ &= a \left(\cosh\left(\frac{b}{a}\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{H} &= y' \rightarrow V(x) = y'(x) H_0 \\ &= H_0 \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

Anm: dort wo das Seil den größten Ausknig hat, ist Seilkraft am größten

Durchhang f , die Horizontalkraft H_0 , die Vertikalkraft $V(x)$ und den Betrag der Seilkraft S als Funktion des Seilparameters a .

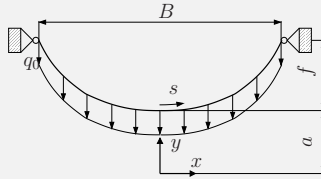


Abb. 9.6: Seil unter Eigengewicht

Die Seilcurve ist durch Gleichung (9.16) gegeben. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass $y'(0) = 0$ und $y_0 = 0$ gelten. Damit folgt für die Seilcurve

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right). \quad (9.30)$$

Der unbekannte Seilparameter a kann mittels der Gleichung (9.18) und der Bedingung $s(b) = l$ bestimmt werden. Aus dieser Bedingung folgt

$$l = a \sinh\left(\frac{b}{a}\right). \quad (9.31)$$

Das ist eine transzendente Gleichung für den Seilparameter a , die nur grafisch oder numerisch gelöst werden kann. Ist a bestimmt worden, so folgt für den Durchhang des Seils

$$f = y(b) - y(0) = a \cosh\left(\frac{b}{a}\right) - a. \quad (9.32)$$

Die Horizontalkraft ergibt sich aus Gleichung (9.16) zu

$$H_0 = q_0 a. \quad (9.33)$$

Die Vertikalkraft folgt aus Gleichung (9.12)

$$V(x) = H_0 y'(x) = q_0 a \sinh\left(\frac{x}{a}\right). \quad (9.34)$$

Für den Betrag der Seilkraft folgt schließlich

$$|S(x)| = \sqrt{H(x)^2 + V(x)^2} = H_0 \sqrt{1 + y'^2(x)} = q_0 a \sqrt{1 + \sinh^2(x/a)}. \quad (9.35)$$

Abschließend soll noch der Sonderfall eines flachen Durchhangs eines Seils diskutiert werden. Der Durchhang ist nur flach, wenn die Horizontalkraft H_0 groß im Vergleich zur Gewichtskraft $q_0 L$ ist. In diesem Fall ist $x/a \ll 1$ und die Seilcurve kann durch die ersten beiden Terme der Taylor-Reihenentwicklung der Funktion $\cosh(x/a)$ bestimmt werden

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \approx a \left(1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right). \quad (9.36)$$

Man sieht, dass im Fall eines flachen Durchhangs die Seilcurve wiederum durch eine Parabel gegeben ist. Für den Durchhang des Seils folgt mit $L = 2l \approx B = 2b$

$$f = y(b) - y(0) \approx \frac{q_0 L^2}{2H_0} = \frac{q_0 L^2}{8H_0}, \quad (9.37)$$

woraus sich für die Seilkraft in Abhängigkeit vom Durchhang

$$H_0 \approx \frac{q_0 L^2}{8f} \quad (9.38)$$

ergibt.

►**Beispiel: Streckenlast eines Seils infolge Eigengewicht.** Gegeben ist ein homogenes Seil der Massendichte ϱ_0 und dem Durchmesser $2R_0$. Man bestimme die Streckenlast $q(s) = q_0$ infolge des Eigengewichts des Seils. Die Streckenlast infolge Eigengewicht ist gleich der Gewichtskraft pro Längeneinheit. Für den Betrag der Gewichtskraft gilt: $G = mg$ mit $m = \varrho_0 \pi R_0^2 L$, wobei L die Seillänge und g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Für die Streckenlast folgt damit aus $q_0 = G/L$

$$q_0 = \varrho_0 g \pi R_0^2. \quad (9.39)$$

Kapitel 10

Haftung und Gleitreibung

10.1 Haften

Haften. Wir betrachten jetzt zwei Körper, die sich an einer ebenen Fläche in Kontakt befinden. Es soll keine Relativbewegung zwischen den Körpern stattfinden, sondern Haften vorliegen. Schneidet man die Kontaktfläche frei und trägt ein äquivalentes Kraftsystem ein, so liegt im allgemeinen Fall ein Kraftvektor und ein Momentenvektor vor. Das resultierende Moment wird bei Reibungsphänomenen in der Regel nicht betrachtet. Die resultierende Kraft wird, wie in Abb. 10.1 dargestellt, in einen Anteil H tangential zur Kontaktfläche und einen Anteil N normal zur Kontaktfläche zerlegt. Es wird im Weiteren die Vorzeichenkonvention derart gewählt, dass N ein positives Vorzeichen besitzt. Die Größe H wirkt einem Gleiten entgegen. Sie ist nicht durch ein Kraft- oder Materialgesetz gegeben, sondern folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen. Deshalb ist H eine Reaktionskraft.

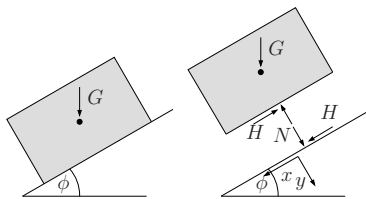
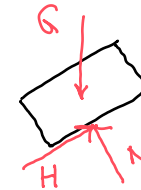


Abb. 10.1: Freischnitt eines Quaders auf einer schiefen Ebene mit Haftung

Viele alltägliche Vorgänge basieren auf dem oben geschilderten Haftmechanismus. Man denke beispielsweise an die Fortbewegung zu Fuß oder mittels Fahrzeugen. Das einfachste Experiment zum Nachweis des Haftmechanismus besteht darin, einen Körper auf eine horizontale Ebene zu legen und den Neigungswinkel der Ebene

Haftbedingung:



Gleichgewicht



bei Haften

G : Gewichtskraft

H : Haftkraft

N : Normalkraft

$$\begin{aligned} \text{GGBen:} \quad \sin \phi &= \frac{H}{G} & x: \quad 0 &= G \sin \phi - H \\ \cos \phi &= \frac{N}{G} & y: \quad 0 &= G \cos \phi - N \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{H}{G} \\ \cos \phi &= \frac{N}{G} \end{aligned}} \right\} \frac{H}{N} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi$$

Experimenteller Befund:

ϕ_0 : Haftgrenzwinkel

$$-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0 \quad | \tan(\cdot)$$

$$-\tan(\phi_0) = \tan(-\phi_0) \leq \tan(\phi) \leq \tan(\phi_0)$$

μ_0 : Haftgrenzzahl

$$-\mu_0 = -\tan(\phi_0) \leq \frac{H}{N} \leq \tan(\phi_0) =: \mu_0$$

Haftbedingung:

$(N > 0)$

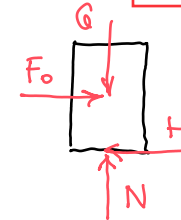
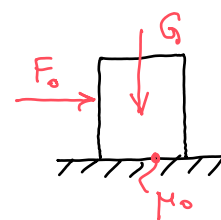
$$-\mu_0 \leq \frac{H}{N} \leq \mu_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|H|}{N} \leq \mu_0$$

Haftgrenzbedingung

$$\frac{|H|}{N} = \mu_0$$

Beispiel:



Haften!

$$\begin{aligned} F_0 &= H \\ G &= N \end{aligned}$$

GGBen

$$H \leq \mu_0 N$$

Haftbedingung

$$H \leq \mu_0 N$$

$$F_0 \leq \mu_0 G \quad \mu_0 \approx 0.1 \leadsto \max(F_0)_{\text{Haften}} = \mu_0 G = 0.1 G$$

Anmerkungen:

- μ_0 : kein Materialparameter, zwei Materialien u. Oberflächenbeschaffenheit
- Haftbedingung: stark vereinfachtes Modell, Fläche geht nicht ein, ...

langsam zu erhöhen. Bis zu einem kritischen Winkel ϕ_0 haftet der Körper. Für größere Winkel kommt es zu einem **Gleiten** also einer Relativbewegung zwischen den beiden Körpern. Bei welcher Neigung der Ebene der Körper anfängt zu gleiten hängt unter anderem von der Oberflächenbeschaffenheit der beiden Körper ab.

Haftbedingung. Die einfachste Formulierung einer Haftbedingung besteht in der Angabe des **Haftgrenzwinkels** ϕ_0 . Die Haftbedingung lautet dann

$$\phi \leq \phi_0. \quad (10.1)$$

Die Größe $\mu_0 = \tan(\phi_0)$ bezeichnet man als **Haftgrenzzahl**, deren Bedeutung aus der Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen für einen Quader auf einer schrägen Ebene folgt (vgl. Abb. 10.1). Die Gewichtskraft hat in Abhängigkeit des Neigungswinkels ϕ folgende Form: $\mathbf{G} = G \sin(\phi) \mathbf{e}_x + G \cos(\phi) \mathbf{e}_y$. $G = mg$ ist der Betrag der Gewichtskraft. Die Reaktionskraft in der Kontaktfläche wird in einen Haftanteil H und in den Normalanteil N zerlegt: $\mathbf{R} = -H \mathbf{e}_x - N \mathbf{e}_y$. Die Gleichgewichtsbedingung für den freigeschnittenen Quader lautet: $\mathbf{0} = \mathbf{G} + \mathbf{R}$. Ein Komponentenvergleich ergibt

$$H = G \sin(\phi), \quad N = G \cos(\phi). \quad (10.2)$$

Eliminiert man die Gewichtskraft, so erhält man

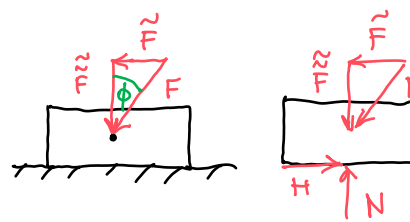
$$H = N \tan(\phi). \quad (10.3)$$

Da für den Neigungswinkel im Falle des Haftens $\phi \leq \phi_0$ gelten muss, gilt ebenfalls $\tan(\phi) \leq \tan(\phi_0) = \mu_0$. Aus dieser Ungleichung folgt zusammen mit (10.3): $H \leq \mu_0 N$. Da aus Symmetriegründen auch die Ungleichung $-\mu_0 \leq -\tan(\phi)$ gelten muss, lässt sich die Haftbedingung vollständig in folgender Form angeben

$$|H| \leq \mu_0 N, \quad N \geq 0 \quad (10.4)$$

(analog gilt natürlich $|\phi| \leq \phi_0$). Diese Haftbedingung macht keine Aussage bezüglich der Flächenkraftdichte in der Kontaktfläche, sondern setzt nur die Tangential- und die Normalkomponente der Resultierenden ins Verhältnis. Es ist zu beachten, dass in Folge dessen die Größe der Kontaktfläche ebenfalls außer Betracht bleibt. Der Wert der Haftgrenzzahl hängt von der Art der Materialpaarung ab. Tabelle 10.1 gibt einige typische Werte für die Haftgrenzzahl an. Die Haftgrenzzahl ist in den meisten Fällen kleiner eins. In manchen Fällen, z.B. für Aluminium auf Aluminium, gilt aber auch $\mu_0 > 1$ (trockene Reibung).

Der Haftgrenzwinkel hat noch folgende Interpretation. Liegt ein Körper auf einer horizontalen Ebene, so können äußere Kräfte mit einem Winkel $\phi \leq \phi_0$ zur Vertikalen angreifen, ohne dass der Körper anfängt zu Gleiten, wie in Abb. 10.2 angedeutet. Diese Aussage gilt unabhängig von der Größe der äußeren Kraft. Den Umstand, dass



Gegeben:

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= F \sin \phi \\ F_{\perp} &= F \cos \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= F_{\parallel} \\ N &= F_{\perp} \end{aligned}$$

Haftbedingung: $|H| \leq \mu_0 N$
 $F \sin \phi \leq \mu_0 F \cos \phi$

Haftkegel



$$\leadsto \tan(\phi) \leq \mu_0$$

für $\phi \leq \phi_0$ oder
 $\tan(\phi) \leq \mu_0$ liegt
 unabhängig von F Haft
 vor

liegen die Kräfte im Haftkegel, so
 liegt Selbsthemmung vor: Haft unabhängig
 von der Größe von F

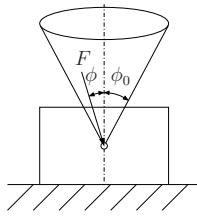


Abb. 10.2: Darstellung des Haftkegels

unabhängig von dem Betrag der äußeren Kraft Haftung vorliegt, bezeichnet man als **Selbsthemmung**. Den durch den Winkel ϕ_0 definierten Kegel nennt man **Haftkegel**.

Materialpaarung	Haftgrenzzahl μ_0 [-]
Stahl auf Stahl	0,15 ... 0,5
Holz auf Holz	0,4 ... 0,6
Gummi auf Asphalt	0,7 ... 0,8
Al auf Al	1,1 ... 1,7

Tabelle 10.1: Haftgrenzzahl für unterschiedliche Materialpaarungen

► **Beispiel: Haften einer Leiter (ebenes Problem).** Eine Leiter der Länge l lehnt unter einem Winkel α an einer Wand (Abb. 10.3). Die Haftgrenzzahl μ_0 ist gegeben. Bis zu welchem Abstand $s = s_{\max}$ vom Punkt P kann eine Vertikalkraft F auf der Leiter angreifen, so dass Haften vorliegt?

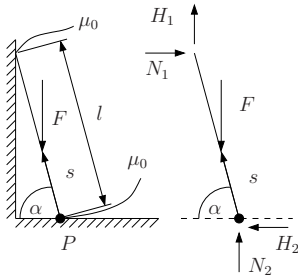


Abb. 10.3: Haften und Rutschen einer Leiter

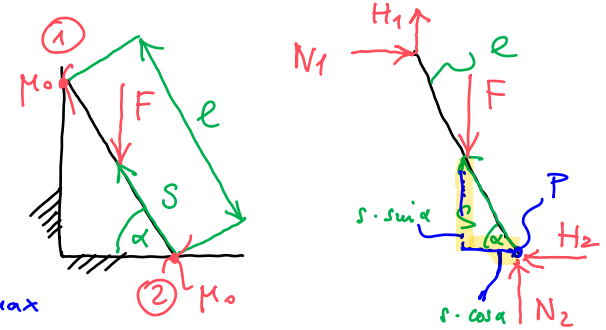
Zunächst schneiden wir die Leiter frei und tragen die Reaktionskräfte ein. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\rightarrow: 0 = N_1 - H_2, \quad \uparrow: 0 = H_1 + N_2 - F, \quad \circlearrowleft_P: 0 = F s_{\max} \cos(\alpha) - H_1 l \cos(\alpha) - N_1 l \sin(\alpha). \quad (10.5)$$

Haften einer Leiter:

geg: α, l, μ_0, F

ges: maximale Steighöhe $s_{\max}$



lös: GG Ben

$$\rightarrow: 0 = N_1 - H_2 \quad (1)$$

$$\uparrow: 0 = H_1 - F + N_2 \quad (2)$$

$$\circlearrowleft_P: 0 = -F s_{\max} \cos \alpha + H_1 l \cos \alpha + N_1 l \sin \alpha \quad (3)$$

Haftbedingungen

$$|H_1| = \mu_0 N_1 \quad H_1 = \mu_0 N_1 \quad (4)$$

$$|H_2| = \mu_0 N_2 \quad H_2 = \mu_0 N_2 \quad (5)$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$(1) \quad N_1 = H_2 = \mu_0 N_2 \quad \left. \begin{array}{l} N_1 = \mu_0 N_2 \\ N_2 = F - \mu_0 N_1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} N_1 = \frac{\mu_0}{1+\mu_0^2} F \\ N_2 = \frac{1}{1+\mu_0^2} F \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad N_2 = F - H_1 = F - \mu_0 N_1 \quad \left. \begin{array}{l} N_1 = \mu_0 N_2 \\ N_2 = F - \mu_0 N_1 \end{array} \right\}$$

$$(3) \quad 0 = -F s_{\max} \cos \alpha + \frac{\mu_0^2 l}{1+\mu_0^2} F \cos \alpha + \frac{\mu_0 l}{1+\mu_0^2} F \sin \alpha \quad H_1 = \mu_0 N_1$$

$$0 = F \left(-s_{\max} \cos \alpha + \frac{\mu_0^2 l \cos \alpha}{1+\mu_0^2} + \frac{\mu_0 l \sin \alpha}{1+\mu_0^2} \right)$$

$$s_{\max} = \frac{\mu_0 l}{1+\mu_0^2} (\mu_0 + \tan(\alpha))$$

Die Haftbedingungen haben die Form: $|H_1| \leq \mu_0 N_1$ und $|H_2| \leq \mu_0 N_2$. Die Haftgrenzbedingungen lauten

$$|H_1| = \mu_0 N_1 \quad |H_2| = \mu_0 N_2. \quad (10.6)$$

Eliminiert man mittels der Haftgrenzbedingungen die Größen H_1 und H_2 in den Gleichgewichtsbedingungen, so verbleiben die drei Gleichungen

$$\rightarrow: 0 = N_1 - \mu_0 N_2, \quad \uparrow: 0 = \mu_0 N_1 + N_2 - F, \quad \circlearrowleft: 0 = F s_{\max} \cos(\alpha) - \mu_0 N_1 l \cos(\alpha) - N_1 l \sin(\alpha). \quad (10.7)$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man schließlich nach Elimination von N_1 und N_2

$$F \left(s_{\max} \cos(\alpha) - \frac{\mu_0 l (\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{1 + \mu_0^2} \right) = 0. \quad (10.8)$$

Für

$$s \leq s_{\max} = \frac{\mu_0 l (\mu_0 + \tan(\alpha))}{1 + \mu_0^2} \quad (10.9)$$

herrscht Gleichgewicht. Diese Aussage gilt unabhängig von der Größe von F (Selbsthemmung).

► **Beispiel: Haften auf einer schiefen Ebene (räumliches Problem).** Ein Quader haftet auf einer schiefen Ebene. Der Neigungswinkel der Ebene ist α . Auf den Quader wirkt neben der Schwerkraft eine Einzelkraft K gemäß Abb. 10.4. Bei welcher Größe der Einzelkraft K fängt der Körper unabhängig von α an zu rutschen?

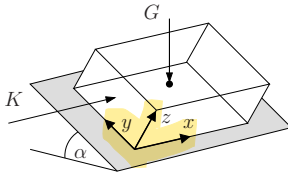


Abb. 10.4: Quader auf einer schiefen Ebene

Die Gewichtskraft hat die Komponenten $G_y = mg \sin(\alpha)$ und $G_z = mg \cos(\alpha)$. Dem Freikörperbild entnimmt man, dass die Gleichgewichtsbedingungen folgende Form haben

$$x: 0 = K + H_x, \quad y: 0 = H_y - mg \sin(\alpha), \quad z: 0 = N - mg \cos(\alpha). \quad (10.10)$$

Bei der Formulierung der Haftgrenzbedingung ist zu beachten, dass es sich um ein räumliches Problem handelt. Die Haftbedingung lautet

$$\sqrt{H_x^2 + H_y^2} \leq \mu_0 N. \quad (10.11)$$

Quadriert man diese Gleichung und eliminiert mittels der Gleichgewichtsbedingungen die Reaktionskräfte, so folgt

$$|K| \leq mg \sqrt{\mu_0^2 \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)} = mg \mu_0 \cos(\alpha) \sqrt{1 - \frac{\tan^2(\alpha)}{\mu_0^2}}. \quad (10.12)$$



Lösungssatz: $\underline{G} = - \begin{pmatrix} 0 \\ G \sin \alpha \\ G \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix}$

$\underline{K} = \begin{pmatrix} K_{\max} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$

GGBen: $\underline{0} = \underline{G} + \underline{K} + \underline{N} + \underline{H}$ ↙ Betrag eines Vektors

Haftbedingung: $|\underline{H}| \leq \mu_0 N$ bisher! $|\underline{H}| \leq \mu_0 N$

Auswertung von GGBen u. HB: $\underline{H}_x^2 + \underline{H}_y^2 \leq \mu_0^2 N^2$ zwei Komponenten

$$K_{\max} = G \cos(\alpha) \sqrt{\mu_0^2 - \tan^2(\alpha)}$$

$\alpha = 0: K_{\max} = \mu_0 G$

$\alpha = \phi_0: K_{\max} = 0$
 $\mu_0 = \tan(\alpha) = \tan(\phi_0)$



Zunächst folgern wir, dass $\tan(\alpha) \leq \mu_0$ gelten muss. Sonst wäre ein Haften nicht möglich. Für $K = 0$ ist diese Ungleichung für alle $\alpha \leq \alpha_0$ erfüllt. Für $\alpha = 0$ folgt $K \leq mg\mu_0$. Für $0 \leq \tan(\alpha) \leq \mu_0$ gibt es immer eine Kraft, bei der der Quader anfängt zu rutschen. Die Aufprägung einer Kraft, die in der schiefen Ebene liegt, reduziert also den maximalen Neigungswinkel der schiefen Ebene, für den Haften vorliegt. Dieses Ergebnis lässt sich auf die Bewegung eines Fahrzeuges auf einer schiefen Ebene übertragen. Ein bremsendes Fahrzeug rutscht auf einer schiefen Fahrbahn bei einem kleineren Neigungswinkel als ein ungebremses Fahrzeug.

► **Beispiel: Haften und Kippen eines Quaders.** An dem in Abb. 10.5 dargestellten Quader der Breite $2b$, der Höhe h und dem Gewicht G greift die Einzelkraft F auf der Höhe a an. Diskutieren Sie, unter welcher Bedingung der Quader aus dem Haftzustand infolge der Kraft kippen kann.

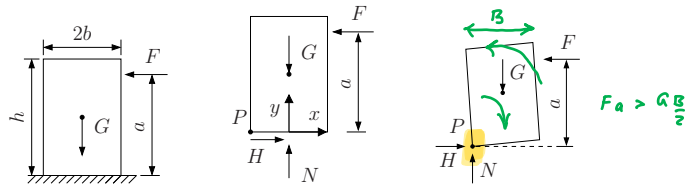


Abb. 10.5: Eben positionierter Quader mit seitlichem Kraftangriff

Dem Freikörperbild entnehmen wir die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Haftens

$$\rightarrow: 0 = H - F, \quad \uparrow: 0 = N - G, \quad \curvearrowright_P: 0 = Fa - Gb. \quad (10.13)$$

Das Momentengleichgewicht wurde für den rechts dargestellten Grenzfall eines Kippens bezüglich Punkt P gebildet. Die Haftbedingung hat die Form

$$H \leq \mu_0 N. \quad (10.14)$$

Aus dem Kräftegleichgewichtsbedingungen und der Haftbedingung folgt eine notwendige Bedingung für das Haften des Quaders

$$F^* = \frac{F}{G} \leq \mu_0. \quad (10.15)$$

Die Beziehung stellt aber keine hinreichende Bedingung für das Haften dar, da das Momentengleichgewicht noch nicht ausgewertet wurde. Dieses ergibt die Grenzbedingung

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{F^*} \quad (10.16)$$

oder äquivalent

$$\frac{a}{h} = \frac{b}{h} \frac{1}{F^*}. \quad (10.17)$$

Da $a/h \leq 1$ und $F^* \leq \mu_0$ gelten, kann der Quader nur im Falle von

$$b \leq h\mu_0 \quad (10.18)$$

kippen. Ist diese Bedingung erfüllt, dann lässt sich für eine gegebene Kraft $F \leq \mu_0 G$ der kritische Angriffspunkt für das Kippen

$$a = b \frac{G}{F}. \quad (10.19)$$

berechnen.

10.2 Haften von Seilen *(nicht prinzipiell relevant!)*

Anwendung der Schnittgrößendifferentialgleichung. Als nächstes betrachten wir das **Haften von Seilen** auf zylindrischen Körpern und fragen nach den Kräften, die durch das Seil übertragen werden können. Dazu wollen wir annehmen, dass ein ideales Seil eine Rolle mit dem Radius R in einem gewissen Winkelbereich $\Delta\varphi$ ohne Verwindung umschlingt und dort haftet (Abb. 10.6). Ein **ideales Seil** zeichnet sich dadurch aus, dass es vollkommen biegsam, undehnbar und masselos ist. Der Haftkoeffizient sei μ_0 . Gesucht ist das Verhältnis der Seilkräfte S_0 und S , von denen wir annehmen wollen, dass $S > S_0$ gilt. Die **Seilkraft** S nimmt also mit der **Bogenlänge** s zu: $S'(s) > 0$. Zur Berechnung des Verhältnisses von S_0 und S kann die Schnittgrößendifferentialgleichung (5.10) verwendet werden. Diese lautet $\mathbf{Q}'(s) = -\mathbf{q}(s)$. Da das Seil vollkommen biegsam ist, ist die Schnittkraft im Seil - also die Seilkraft - tangential zur **Seilkurve** orientiert

$$\mathbf{Q}(s) = S(s)\mathbf{e}_T(s). \quad (10.20)$$

Leitet man diesen Ausdruck nach der Bogenlänge ab, so folgt unter Beachtung von $\mathbf{e}'_T = \mathbf{e}_N/R$

$$\mathbf{Q}' = S'\mathbf{e}_T + \frac{S}{R}\mathbf{e}_N. \quad (10.21)$$

Die Streckenlast kann ebenfalls bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_T, \mathbf{e}_N\}$ dargestellt werden

$$\mathbf{q} = q_T\mathbf{e}_T + q_N\mathbf{e}_N, \quad q_T ds = -|dH|, \quad q_N ds = -dN. \quad (10.22)$$

Bei den Vorzeichen der Komponenten der Streckenlast ist zu beachten, dass bei $S'(s) > 0$ aus Gleichgewichtsgründen die beiden Ungleichungen $q_T < 0$ und $q_N < 0$ gelten müssen. Fordert man Haften, so gilt

$$|dH| \leq \mu_0 dN, \quad (10.23)$$

wobei unmittelbar vor dem Rutschen das Gleichheitszeichen gilt.

Differentialgleichung der Seilkraft. Betrachtet man den Grenzfall bei dem gerade noch Haften vorliegt ($|dH| = \mu_0 dN$), so gilt für die Streckenlast

$$\mathbf{q} ds = -\mu_0 dN \mathbf{e}_T - dN \mathbf{e}_N. \quad (10.24)$$

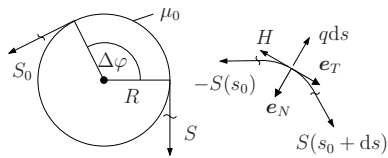


Abb. 10.6: Haftung eines Seiles an einem zylindrischen Körper

Setzt man dieses Zwischenergebnis in die Schnittgrößendifferentialgleichung ein, so erhält man die beiden Gleichungen

$$S' ds = -\mu_0 dN, \quad \frac{S}{R} ds = -dN. \quad (10.25)$$

Nach der Elimination von dN erhält man $S' = \mu_0 S/R$. Da der Krümmungsradius des Seils konstant ist, gilt: $RS' = dS/d\varphi$, so dass man schließlich zu der **Differentialgleichung der Seilkraft**

$$\frac{dS}{d\varphi} = \mu_0 S \quad (10.26)$$

mit der Lösung

$$S = \exp(\mu_0 \Delta\varphi) S_0 \quad (10.27)$$

gelangt. Gleichung (10.27) gilt nur im Falle des Haftens des Seils, also auch bis zum Übergang vom Haften zum Gleiten.

► **Beispiel: Haftkraft eines um eine Rolle geschlungenen Seiles.** Eine Masse mit Gewichtskraft G wird über ein ideales Seil von der Kraft F gehalten wie in Abb. 10.7 dargestellt. Das Seil umschlingt eine undrehbar gelagerte Rolle mit dem Umschlingungswinkel $\Delta\varphi = 90^\circ$. In welchem Bereich kann die Kraft F variieren, so dass die Masse in Ruhe bleibt? Diskutieren Sie das Ergebnis.

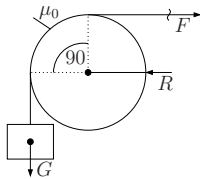


Abb. 10.7: Haltekraft bei Umlenkung eines Seiles über eine starre Rolle

Wir betrachten zunächst den Haftgrenzfall, für den Übergang aus der Ruhe in eine Aufwärtsbewegung der Masse. In diesem Fall gilt: $F > G = mg$ mit der Haftzahl μ_0 . Aus (10.27)

$\Delta\varphi$: Umschlingungswinkel

$S_0 \hat{=} 1$ Halten des Gewichtes $\hat{=} S$

$F_{\min} = \exp(-\mu_0 \Delta\varphi) G$

$S \hat{=} F_{\max} = \exp(+\mu_0 \Delta\varphi) G$

Übergang vom Haften zum Gleiten

$\Delta\varphi = 90^\circ$
 $\mu_0 = 0.5$

$0.46 \leq \frac{F}{G} \leq 2.2$

folgt $F_{\max} = \exp(\mu_0 \Delta\varphi)G$. Wird dieser Wert von F überschritten, so bewegt sich die Masse nach oben.

Für den Fall dass eine Bewegung der Masse nach unten gerade verhindert wird, gilt $F < G$ und die Haftgrenzbedingung lautet: $F_{\min} = \exp(-\mu_0 \Delta\varphi)G$. Es ist zu beachten, dass der Radius der Rolle bei der Berechnung des Kraftbereichs unberücksichtigt bleibt. Dem Verhältnis $F_{\max}/F_{\min} = \exp(2\mu_0 \Delta\varphi)$ entnimmt man, dass schon bei kleinen Umschlingungswinkeln ein signifikanter Unterschied zwischen $F_{\max}$ und $F_{\min}$ besteht. Für den oben angegebenen Winkel erhält man für $\mu_0 = 0.5$ folgende Zahlenwerte: $F_{\max} = 2.19G$, $F_{\min} = 0.456G$, also $F_{\max}/F_{\min} = 4.81$. Für die Umschlingungswinkel 2π und 4π ergeben sich die Werte $F_{\max}/F_{\min} \approx 535$ und $F_{\max}/F_{\min} \approx 286750$.

10.3 Gleitreibung (nicht blau relevant.)

Das Coulomb'sche Gleitreibungsgesetz. Ist die Relativgeschwindigkeit zwischen den Kontaktflächen zweier Körper ungleich null, so liegt **Gleiten** vor. Die Kräfte, die bei einem Gleitvorgang in der Kontaktfläche wirken, unterscheiden sich im Allgemeinen von denen beim Haften. Ein einfaches Modell zur Beschreibung dieser Kräfte basiert auf den Annahmen (**Coulomb'sches Gleitreibungsgesetz**), dass der Tangentialanteil der Kraft in der Kontaktfläche proportional zum Betrag der **Normalkraft** N und der Relativbewegung entgegengesetzt ist. Der Normalanteil der Kontaktkraft ist aus Gleichgewichtsgründen entgegengesetzt gleich der Normalkraft $N > 0$. Die

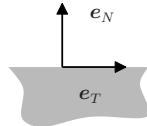


Abb. 10.8: Koordinatensystem

Kraft in der Kontaktfläche hat bei Verwendung des in Abb. 10.8 dargestellten Koordinatensystems folgende Form

$$\mathbf{R} = -N(\mu \mathbf{e}_T + \mathbf{e}_N). \quad (10.28)$$

Der Proportionalitätsfaktor μ heißt **Reibungszahl**. Der Normalanteil der Kraft $\mathbf{R}$ ist eine Reaktionskraft, wohingegen der Tangentialanteil, d.h. die Gleit- oder Reibkraft, keine Reaktionskraft ist, da hier eine Materialkonstante eingeht. Die Reibungszahl hängt wie die Haftzahl von der Art der Materialpaarung ab. Experimente zeigen, dass die Reibungszahl kleiner als die **Haftgrenzzahl** ist

$$\mu < \mu_0. \quad (10.29)$$

Das Coulomb'sche Gleitreibungsgesetz geht davon aus, dass die Größe der Kontaktfläche für die Gleitkraft nicht von Bedeutung ist. Weiterhin ist festzustellen, dass die Relativgeschwindigkeit der Kontaktflächen die Gleitreibungskraft nicht beeinflusst. Die Gleitreibungskraft ist also geschwindigkeitsunabhängig. Trotz dieser starken Vereinfachungen hat sich dieses Gesetz in vielen Fällen bewährt. Tabelle 10.2 gibt einige typische Werte für die Reibungszahl an.

Materialpaarung	Reibungszahl μ [-]
Stahl auf Stahl	0,1 ... 0,4
Holz auf Holz	0,3
Gummi auf Asphalt	0,5 ... 0,8

Tabelle 10.2: Reibungszahlen für unterschiedliche Materialpaarungen